ОБ ОБРАЩЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА РИССА ПЕРВОГО ПОРЯДКА В $\mathbb{R}^3$.

С.И. ВАСИЛЕЦ

Белгосуниверситет им. В.И. Ленина (Минск)

Рассматривается потенциал Рисса

$$(K_1\varphi)(|x|)=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{B_{a,b}}\frac{\varphi(|y|)\,dy}{|x-y|^2},\quad x\in B_{a,b}, \qquad (1)$$

где $B_{a,b}=\{y\in\mathbb{R}^3,\ 0\le a<|y|<b<+\infty\}$ –шаровой слой в $\mathbb{R}^3$ (в частности, шар при $a=0$), $\varphi\in L_p(B_{a,b};w)$, вес $w(|y|)=(|y|^2-a^2)^{-1/2}(b^2-|y|^2)^{1/2p}$.

Осуществляя замену $x=r\Psi,\ y=\rho\Theta,\ |x|=r,\ |y|=\rho,\ \Psi,\Theta\in S_2$ (S_2 –единичная сфера в $\mathbb{R}^3$) и переходя к сферическим координатам, приходим к представлению

$$(K_1\varphi)(r)=\frac{1}{\pi r}\int\limits_a^b \ln\frac{r+\rho}{|r-\rho|}\,\rho\varphi(\rho)\,d\rho \qquad (2)$$

Задача обращения оператора $(K_1\varphi)(r)$ возникает при решении некоторых контактных задач теории упругости.

Вводя операторы

$$(S\psi)(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{a^2}^{b^2}\frac{\psi(\tau)\,d\tau}{\tau-t},\quad (I\psi)(t)=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_{a^2}^{t}\psi(\tau)\,d\tau-\int\limits_{t}^{b^2}\psi(\tau)\,d\tau\Big),$$

перепишем (2) в виде

$$(K_1\varphi)(r)=\frac{1}{2}\big(It^{-1/2}(S\sqrt{\tau}\,\varphi(\sqrt{\tau}))(t)(r^2)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b \ln\frac{(t+a)(t+b)}{(t-a)(b-t)}\,t\varphi(t)\,dt \qquad (3)$$

Из (3) вытекает следующая формула обращения потенциала I

$$(K_1^{-1}f)(|x|)=-(|x|^2-a^2)^{1/2}(b^2-|x|^2)^{-1/2}\big(S(b^2-t)^{1/2}(t-a^2)^{-1/2}f'(\sqrt{t})\big)(|x|^2).$$