Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Белорусский государственный педагогический университет
имени Максима Танка»

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ, АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

В четырех частях

Часть 3
Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Учебное электронное издание локального распространения

Минск
БГПУ
2018

УДК 517.9(076.5)
ББК 22.14я73
П691

Издается по решению редакционно-издательского совета БГПУ

Р е ц е н з е н т ы:
Примичева З. Н., кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики БГУИР;
Шалик Э. В., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
менеджмента и образовательных технологий ИПКиП БГПУ

А в т о р ы:
Черняк А. А., доктор физико-математических наук, профессор кафедры
математики и методики преподавания математики БГПУ;
Василец С. И., кандидат физико-математических наук,
декан физико-математического факультета БГПУ;
Богданович С. А., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
математики и методики преподавания математики БГПУ;
Черняк Ж. А., кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики БГУИР

Практикум по математическому анализу, алгебре и геометрии : в 4 ч. Ч. 3.
П691 Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных / А. А. Черняк [и др.]. – Минск : БГПУ, 2018.
ISBN 978-985-541-440-8.

В издании рассматриваются решения типовых разноуровневых задач. Приведены тесты для самоконтроля, помогающие закреплению теоретического материала и развитию навыков решения задач. Включены математические диктанты, задания из которых предназначены для проведения самостоятельных проверочных работ, а также даны типовые задания различной сложности для контрольных работ.

Адресуется студентам дневной и заочной форм получения высшего образования физико-математического факультета БГПУ, а также преподавателям для организации самостоятельной работы студентов и методов ее контроля.

УДК 517.9(076.5)
ББК 22.14я73

ISBN 978-985-541-084-4
ISBN 978-985-541-440-8 (Ч. 3)

Предисловие

Данное электронное пособие «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных» является продолжением «Практикума по математическому анализу, алгебре и геометрии», первая часть которого содержала введение в анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной, а вторая – неопределенный и определенный интегралы. При этом соблюдается структурная преемственность содержания, а именно: пособие начинается подробными решениями типовых задач по соответствующей теме; затем идут тесты для самоконтроля, позволяющие приобрести базовые навыки решения задач; далее следуют математические диктанты для самостоятельной проверки техники вычислений; завершают пособие тематические контрольные задания для проведения аттестационных работ.

Таким образом, достигается основная цель пособия – активизировать самостоятельную работу студентов, помочь им разобраться в решениях типовых задач, научиться самостоятельно решать задачи начального и среднего уровней сложности с помощью подсказок и алгоритмов, а также обеспечить проверку полученных навыков посредством математических диктантов и контрольных работ.

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

При решении задач необходимо обратить внимание на то, что правила вычисления частных производных совпадают с правилами, указанными для функции одной переменной [3].

Задача 1. Найти область определения функции $y = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$ и построить ее на плоскости.

Решение. *Шаг 1.* Область определения заданной функции состоит из всех точек (x; y) плоскости, удовлетворяющих неравенствам:

$$-1 \le \frac{y}{x} \le 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ -x \le y \le x, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x \le y \le -x. \end{cases} \end{array} \right.$$

Шаг 2. Строим область определения на плоскости xOy. Проведем прямые $y=x$ и $y=-x$, ограничивающие искомую область. В полуплоскости $x > 0$ выберем произвольную точку, например, $A(1; 0)$. Так как ее координаты $x = 1$, $y = 0$ удовлетворяют неравенству $-x \le y \le x$, то угол, образованный прямыми $y = x$ и $y = -x$, содержащий положительную полуось Ox, является графическим изображением решений системы неравенств

$$\begin{cases} \boldsymbol{x > 0}, \\ \boldsymbol{-x \le y \le x}. \end{cases}$$

Аналогично, выбрав в полуплоскости $x < 0$ точку $B(-1; 0)$, убеждаемся в том, что она удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x < 0, \\ x \le y \le -x. \end{cases}$$

Поэтому угол, образованный прямыми $y = -x$ и $y = x$, содержащий отрицательную полуось Ox (без точки O), является графическим изображением решений последней системы неравенств.

Таким образом, область определения заданной функции изображена на рисунке 1.

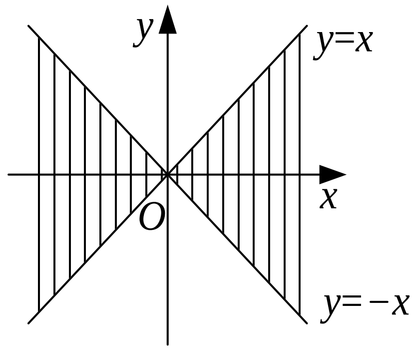

Рисунок 1

Задача 2. Найти предел функции

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\left(x^2-y^2+2xy-\frac{8x^3+7}{y^2-3}\right).$$

Решение. *Шаг 1.* Воспользуемся определением повторного предела функции двух переменных. Вначале вычислим повторный предел $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{y\to 0} f(x,\, y)$:

$$\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 0}\left(x^2-y^2+2xy-\frac{8x^3+7}{y^2-3}\right)\right)=\lim_{x\to 1}\left(x^2-\frac{8x^3+7}{-3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(x^2+\frac{8x^3+7}{3}\right)=$$

$$=1+\frac{8+7}{3}=6.$$

Шаг 2. Вычислим повторный предел $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 1} f(x,\, y)$:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 1}\left(x^2-y^2+2xy-\frac{8x^3+7}{y^2-3}\right)\right)=\lim_{y\to 0}\left(1-y^2+2y-\frac{8+7}{y^2-3}\right)=1-\frac{15}{-3}=6.$$

Шаг 3. Повторные пределы существуют и равны, поэтому

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\left(x^2-y^2+2xy-\frac{8x^3+7}{y^2-3}\right)=6.$$

Ответ: 6.

Задача 3. Найти всевозможные частные производные второго порядка функции

$$z = 2x^3y - 7xy^2.$$

Решение. *Шаг 1.* Применяя правила дифференцирования функции одной переменной, вычисляем частную производную по x, рассматривая y как величину постоянную:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y - 7y^2.$$

Шаг 2. Аналогично, рассматривая x как величину постоянную, находим частную производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 - 14xy.$$

Шаг 3. Пользуясь определением и правилами дифференцирования функции одной переменной, находим всевозможные частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(6x^2y - 7y^2\right) = 12xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3 - 14xy\right) = -14x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3 - 14xy\right) = 6x^2 - 14y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(6x^2y - 7y^2\right) = 6x^2 - 14y.$$

Задача 4. Найти полный дифференциал функции

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Решение. *Шаг 1.* Находим частные производные заданной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Шаг 2. Подставляем найденные частные производные в формулу полного дифференциала функции

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

и получаем искомый полный дифференциал:

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}dx + \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}dy = \frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Ответ: $\frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Задача 5. Найти производную функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1;\ 1)$ по направлению вектора $\vec{s} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Решение. *Шаг 1.* Находим направляющие косинусы вектора $\vec{s}$:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Шаг 2. Находим значения частных производных заданной функции в точке $M(1;\ 1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial z(1;1)}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial z(1;1)}{\partial y} = 2.$$

Шаг 3. Подставляем вычисленные в точке $M(1;\ 1)$ частные производные в формулу для вычисления производной по направлению, определяемому вектором $\vec{s}$:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\cos\beta.$$

Получаем производную заданной функции по указанному направлению:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = 2\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

Задача 6. Определить направление $\vec{l}$ быстрейшего возрастания функции $z = x^2 + xy + 7$ в точке $M_0(1;\ -1)$. Вычислить значение производной функции z в этом направлении в точке M_0.

Решение. *Шаг 1.* Вычисляем частные производные заданной функции и их значения в точке $M_0(1;\ -1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial z(1;-1)}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial z(1;-1)}{\partial y}=1.$$

Шаг 2. Направление быстрейшего возрастания функции в точке M_0 определяется градиентом функции z, вычисленным в этой точке, то есть вектором вида

$$\overrightarrow{grad}z(M_0)=\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\vec{j}=\vec{i}+\vec{j}.$$

Следовательно, искомое направление $\vec{l}$ составляет угол 45° с осью Ox.

Шаг 3. Вычисляем производную по направлению $\vec{l}$ градиента:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \vec{l}}=\left|\overrightarrow{grad}z(M_0)\right|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Ответ: $\vec{l}=\vec{i}+\vec{j}$, $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial \vec{l}}=\sqrt{2}$.

Задача 7. Найти приближенное значение числа $1{,}03^{1{,}98}$.

Решение. *Шаг 1.* Данное число является значением функции $f(x, y) = x^y$ в точке $M(1{,}03;\ 1{,}98)$.

Шаг 2. Возьмем «удобную» для вычислений точку $M_0(1;\ 2)$, близкую к точке $M(1{,}03;\ 1{,}98)$. Обозначим $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $x = 1{,}03$, $y = 1{,}98$. Тогда

$$\Delta x = x-x_0 = 0{,}03,\ \Delta y = y-y_0 = -0{,}02.$$

Шаг 3. Вычисляем значения функции и ее частных производных в точке $M_0(1;\ 2)$:

$$f(1;2)=1^2=1,\quad \frac{\partial f(1;2)}{\partial x}=\left(yx^{y-1}\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=2,\quad \frac{\partial f(1;2)}{\partial y}=\left(x^y\ln x\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=0.$$

Шаг 4. Применим формулу приближенного вычисления значения функции с помощью дифференциала:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\approx f(x_0,\ y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y$$

и найдем приближенное значение выражения:

$$1{,}03^{1{,}98}\approx 1+2\cdot 0{,}03+0\cdot(-0{,}02)=1{,}06.$$

Ответ: 1,06.

Задача 8. Написать уравнения касательных плоскостей и нормалей к поверхности

$$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$$

в точках ее пересечения с прямой $x=y=2$.

Решение. *Шаг 1.* Найдем точки пересечения заданной поверхности с прямой $x = y = 2$ как решения следующей системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, \\ x = 2, \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 2, \\ z = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = 2, \\ z = -3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Обозначим найденные точки пересечения $M_1(2;\ 2;\ 3)$, $M_2(2;\ 2;\ -3)$.

Шаг 2. Поскольку уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ к поверхности, заданной уравнением $F(x,\ y,\ z)=0$, имеют вид соответственно

$$F'_x(M_0)(x-x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

и

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)},$$

то для решения поставленной задачи необходимо найти частные производные функции $F(x, y, z)=x^2+y^2-z^2+1$ и вычислить их значения в точках M_1 и M_2:

$$F'_x = 2x,\ F'_y = 2y,\ F'_z = -2z,$$

$$F'_x(M_1) = 4,\ F'_y(M_1) = 4,\ F'_z(M_1) = -6,$$

$$F'_x(M_2) = 4,\ F'_y(M_2) = 4,\ F'_z(M_2) = 6.$$

Шаг 3. Подставив найденные значения частных производных в уравнение касательной плоскости, получим два искомых уравнения для точек M_1 и M_2:

$$4(x - 2) + 4(y - 2) - 6(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - 3z + 1 = 0,$$

$$4(x-2)+4(y-2)+6(z+3)=0 \Leftrightarrow 2x+2y+3z+1=0.$$

Аналогично получаем уравнения нормалей к поверхности в точках M_1 и M_2:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-6} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3},$$

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+3}{6} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{3}.$$

Ответ: уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M_1(2;\ 2;\ 3)$: $2x+2y-3z+1=0$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3}$; в точке $M_2(2;\ 2;\ -3)$: $2x+2y+3z+1=0$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{3}$.

Задача 9. Составить уравнение касательной плоскости к эллипсоиду $x^2+\frac{y^2}{2}+z^2=1$, которая параллельна плоскости $x+y-z=0$.

Решение. Пусть $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – неизвестная пока точка на поверхности эллипсоида, которая обладает тем свойством, что проведенная в ней касательная плоскость параллельна плоскости $x+y-z=0$. Обозначим $F(x,y,z)=x^2+\frac{y^2}{2}+z^2-1$. Так как

$$F'_x(M_0)=2x_0,\ F'_y(M_0)=y_0,\ F'_z(M_0)=2z_0,$$

то уравнение касательной плоскости к поверхности эллипсоида в точке M_0 имеет вид:

$$2x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0.$$

Из условия параллельности плоскостей следует коллинеарность их нормальных векторов в точке M_0: $\vec{n}_1(2x_0;\ y_0;\ 2z_0)$ и $\vec{n}_2(1;\ 1;\ -1)$, то есть верно

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{y_0}{1}=\frac{2z_0}{-1}.$$

Добавив к этим уравнениям еще одно уравнение

$$x_0^2+\frac{y_0^2}{2}+z_0^2=1,$$

выражающее условие, что точка M_0 лежит на эллипсоиде, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_0 = y_0, \\ 2z_0 = -y_0, \\ x_0^2 + \dfrac{y_0^2}{2} + z_0^2 = 1. \end{cases}$$

Ее решениями являются точки $M_0^1\left(\dfrac{1}{2}; 1; -\dfrac{1}{2}\right)$ и $M_0^2\left(-\dfrac{1}{2}; -1; \dfrac{1}{2}\right)$. Подставляя координаты этих точек в уравнение касательной плоскости, получим уравнения двух искомых касательных плоскостей, отвечающих условиям задачи:

$$x + y - z - 2 = 0$$

и

$$x + y - z + 2 = 0.$$

Ответ: $x + y - z - 2 = 0$, $x + y - z + 2 = 0$.

Задача 10. Зависимость производства национального дохода z (конечного общественного продукта) от объемов использования основных производственных факторов – рабочей силы x и производственных доходов y можно описать функцией $z = f(x,\ y)$. Найти изменение значения функции национального дохода при малом изменении ее аргументов, если

$$z = 3x^2y + \frac{x}{y},\ x = 10^3,\ y = 2^3,\ \Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = 0{,}5.$$

Решение. *Шаг 1.* Вычисляем частные производные заданной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy + \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - \frac{x}{y^2}$$

и их значения при x=10^3, y=2^3:

$$\frac{\partial z(10^3;\,2^3)}{\partial x} = 6\cdot 10^3\cdot 2^3 + \frac{1}{2^3} = 48000 + 0{,}125 = 48000{,}125;$$

$$\frac{\partial z(10^3;\,2^3)}{\partial y} = 3\cdot 10^6 - \frac{10^3}{2^6} = 3000000 - 15{,}625 = 2999984{,}375.$$

Шаг 2. Вычисляем значение заданной функции при $x = 10^3$, $y = 2^3$:

$$z(10^3;\, 2^3) = 3\cdot 10^6\cdot 2^3 + \frac{10^3}{2^3} = 24000000 + 125 = 24000125.$$

Шаг 3. Находим изменение значения функции по формуле

$$\Delta z = z(x_0 + \Delta x;\; y_0 + \Delta y) - z(x_0;\, y_0) \approx \frac{\partial z(x_0;\, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(x_0;\, y_0)}{\partial y}\Delta y\,.$$

$$\Delta z \approx 48000{,}125\cdot 0{,}1 + 2999984{,}375 \cdot 0{,}5 = 1504792{,}2.$$

Следовательно, значение функции увеличилось на 1504792,2.

Ответ: 1504792,2.

Задача 11. Для производственной функции $z = 4x^3 - xy^2 + 5y$ определить коэффициенты эластичности $E_x(z)$, $E_y(z)$ ресурсов x и y, если $x = 1$, $y = 2$.

Решение. *Шаг 1.* Находим частные производные производственной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2 - y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy + 5\,.$$

Шаг 2. Находим значения частных производных и значение функции в точке (1; 2):

$$\frac{\partial z(1;\,2)}{\partial x} = 8; \quad \frac{\partial z(1;\,2)}{\partial y} = 1; \quad z(1;\,2) = 10\,.$$

Шаг 3. Подставляя значения частных производных и значение функции в формулы для вычисления коэффициентов эластичности $E_x(z)=\frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}$ и $E_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}$, получим:

$$E_x(z) = 0{,}8;\;\; E_y(z) = 0{,}2.$$

Значит, объем производства возрастет соответственно на 0,8 % и 0,2 % при изменении ресурсов x и y на 1 %.

Ответ: $E_x(z) = 0{,}8$; $E_y(z) = 0{,}2$.

Задача 12. Определить коэффициенты эластичности производственной функции Кобба – Дугласа $z = 4{,}5x^{0{,}33}y^{0{,}66}$.

Решение. *Шаг 1.* Вычисляем частные производные производственной функции Кобба–Дугласа:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4{,}5 \cdot 0{,}33x^{-0{,}67}y^{0{,}66}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4{,}5 \cdot 0{,}66x^{0{,}33}y^{-0{,}34}.$$

Шаг 2. Подставляем значения частных производных в формулы $E_x(z) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}$ и $E_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}$ для вычисления коэффициентов эластичности:

$$E_x(z) = \frac{x}{4{,}5x^{0{,}33}y^{0{,}66}} \cdot 4{,}5 \cdot 0{,}33x^{-0{,}67}y^{0{,}66} = \frac{4{,}5x^{0{,}33}y^{0{,}66}}{4{,}5x^{0{,}33}y^{0{,}66}} \cdot 0{,}33 = 0{,}33,$$

$$E_y(z) = \frac{y}{4{,}5x^{0{,}33}y^{0{,}66}} \cdot 4{,}5 \cdot 0{,}66x^{0{,}33}y^{-0{,}34} = \frac{4{,}5x^{0{,}33}y^{0{,}66}}{4{,}5x^{0{,}33}y^{0{,}66}} \cdot 0{,}66 = 0{,}66.$$

Ответ: $E_x(z) = 0{,}33$; $E_y(z) = 0{,}66$.

Задача 13. Найти локальные экстремумы функции

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Решение. *Шаг 1.* Функция z определена на всей плоскости. Для нахождения стационарных точек вычисляем частные производные по x и y и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y.$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0, \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получаем

$$x^3 + y^3 = 0 \Leftrightarrow y = -x.$$

Система принимает вид:

$$\begin{cases} y = -x, \\ x^3 - x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x, \\ x(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = -\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Функция имеет три стационарные точки:

$$M_1(0;\, 0),\ M_2(\sqrt{2};\, -\sqrt{2}),\ M_3(-\sqrt{2};\, \sqrt{2}).$$

Шаг 2. Вычисляем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4.$$

В соответствии с достаточными условиями экстремума необходимо вычислить значения $a_{11} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $a_{22} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $a_{12} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ в каждой стационарной точке.

В точке $M_1(0;\ 0)$ получим:

$$a_{11} = -4,\ a_{22} = -4,\ a_{12} = 4,\ \Delta = 0.$$

В этом случае достаточные условия не дают ответа о наличии экстремума в точке $M_1(0;\ 0)$. Заметим, что в любой окрестности этой точки найдутся как точки, в которых значения данной функции являются положительными, так и точки, в которых значения данной функции будут отрицательными. Например, вдоль оси Ox ($y = 0$) значения функции при малых значениях x будут отрицательными:

$$z = f(x,\ y)\big|_{y=0} = f(x,\ 0) = x^4 - 2x^2 = -x^2(2 - x^2) < 0.$$

С другой стороны, вдоль биссектрисы $y=x$ значения функции будут положительными:

$$z = f(x,\ y)\big|_{\substack{y=x \\ x\neq 0}} = f(x,\ x) = 2x^4 > 0.$$

Таким образом, в некоторой окрестности точки $O(0;\ 0)$ полное приращение Δz не сохраняет знака. Следовательно, в этой точке функция не имеет локального экстремума.

В точке $M_2(\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$:

$$a_{11} = 20,\ a_{22} = 20,\ a_{12} = 4,\ \Delta = 384.$$

Так как $a_{11}>0$, $\Delta>0$, то в точке M_2 функция z имеет локальный минимум: $z_{\min} = -8$.

В точке $M_3(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$:

$$a_{11} = 20,\ a_{22} = 20,\ a_{12} = 4,\ \Delta = 384.$$

Аналогично предыдущему, в точке M_3 функция z имеет локальный минимум: $z_{\min} = -8$.

Ответ: $M_2(\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$ и $M_3(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ – точки локального минимума; $z(M_2) = z(M_3) = -8$.

Задача 14. Исследовать функцию $z = 10 - 5x - 7y$ на экстремум при условии $x^2 + y^2 = 16$.

Решение. *Шаг 1.* Будем решать задачу методом Лагранжа. Для этого составляем функцию Лагранжа:

$$\Psi(x, y, \lambda) = 10 - 5x - 7y + \lambda(x^2 + y^2 - 16).$$

Шаг 2. Находим стационарные точки функции Лагранжа, которые являются решениями следующей системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

В нашем случае эта система имеет вид:

$$\begin{cases} -5 + 2x\lambda = 0, \\ -7 + 2y\lambda = 0, \\ x^2 + y^2 - 16 = 0. \end{cases}$$

Шаг 3. Решаем полученную систему и находим стационарные точки:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{20}{\sqrt{74}}, \\ y_1 = \dfrac{28}{\sqrt{74}}, \\ \lambda_1 = \dfrac{\sqrt{74}}{8} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = \dfrac{-20}{\sqrt{74}}, \\ y_2 = \dfrac{-28}{\sqrt{74}}, \\ \lambda_2 = \dfrac{-\sqrt{74}}{8}. \end{cases}$$

Таким образом, функция Лагранжа имеет две стационарные точки:

$$M_1\left(\frac{20}{\sqrt{74}}; \frac{28}{\sqrt{74}}; \frac{\sqrt{74}}{8}\right) \text{ и } M_2\left(\frac{-20}{\sqrt{74}}; \frac{-28}{\sqrt{74}}; \frac{-\sqrt{74}}{8}\right).$$

Шаг 4. Для того, чтобы определить, являются ли точки $N_1\left(\dfrac{20}{\sqrt{74}}; \dfrac{28}{\sqrt{74}}\right)$ и $N_2\left(\dfrac{-20}{\sqrt{74}}; \dfrac{-28}{\sqrt{74}}\right)$ искомыми точками условного экстремума, применим достаточные условия. Для этого вычислим все частные производные второго порядка функции Лагранжа:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial\lambda} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\lambda\partial x} = 2x;$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial\lambda} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\lambda\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial\lambda^2} = 0.$$

Составим определитель

$$\Delta = -\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial\lambda} \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial\lambda} \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial\lambda\partial x} & \frac{\partial^2\Psi}{\partial\lambda\partial y} & \frac{\partial^2\Psi}{\partial\lambda^2} \end{vmatrix}.$$

В нашем случае он имеет вид:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = 8y^2\lambda.$$

Шаг 5. Определяем наличие условного экстремума в соответствии с достаточными условиями.

Так как в точке $M_1\left(\frac{20}{\sqrt{74}}; \frac{28}{\sqrt{74}}; \frac{\sqrt{74}}{8}\right)$ определитель $\Delta>0$, то точка $N_1\left(\frac{20}{\sqrt{74}}; \frac{28}{\sqrt{74}}\right)$ является точкой условного минимума. Поскольку в точке $M_2\left(\frac{-20}{\sqrt{74}}; \frac{-28}{\sqrt{74}}; \frac{-\sqrt{74}}{8}\right)$ определитель $\Delta<0$, то точка $N_2\left(\frac{-20}{\sqrt{74}}; \frac{-28}{\sqrt{74}}\right)$ – точка условного максимума.

При этом $z_{\min}\left(\frac{20}{\sqrt{74}}; \frac{28}{\sqrt{74}}\right) = 10 - \frac{296}{\sqrt{74}}$, $\quad z_{\max}\left(\frac{-20}{\sqrt{74}}; \frac{-28}{\sqrt{74}}\right) = 10 + \frac{296}{\sqrt{74}}$.

Ответ: $z_{\min}\left(\frac{20}{\sqrt{74}}; \frac{28}{\sqrt{74}}\right) = 10 - \frac{296}{\sqrt{74}}$, $\quad z_{\max}\left(\frac{-20}{\sqrt{74}}; \frac{-28}{\sqrt{74}}\right) = 10 + \frac{296}{\sqrt{74}}$.

Задача 15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2y(4 - x - y)$ в области D, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $y = 8 - x$.

Решение. *Шаг 1.* Изображаем область D на координатной плоскости xOy.

Данная область представляет собой треугольник, ограниченный прямой $y = 8 - x$ и координатными осями (рисунок 2).

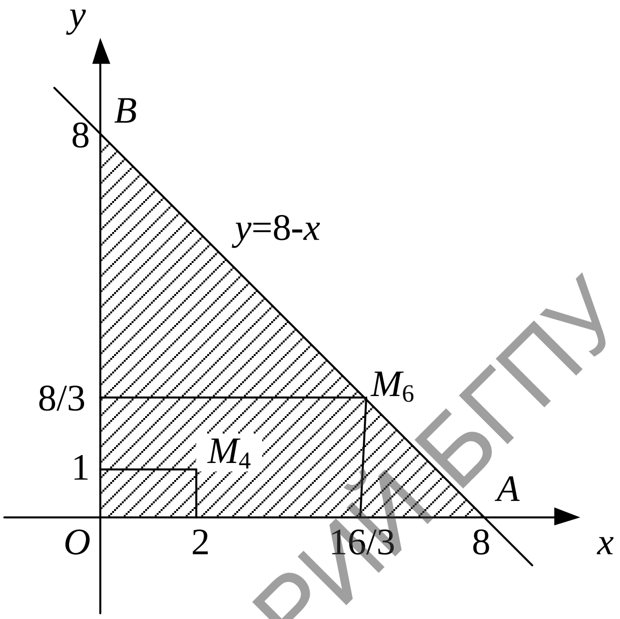

Рисунок 2

Шаг 2. Находим стационарные точки, принадлежащие области D. Для этого составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

В нашем случае система имеет вид:

$$\begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0, \\ x^2(4 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности из четырех систем:

$$1)\ \begin{cases} xy = 0, \\ x^2 = 0, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} xy = 0, \\ 4 - x - 2y = 0, \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} 8 - 3x - 2y = 0, \\ x^2 = 0, \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} 8 - 3x - 2y = 0, \\ 4 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Решив их, найдем стационарные точки: $M(0;\ R)$, $0 \le R \le 8$, $M_1(0;\ 2)$, $M_2(4;\ 0)$, $M_3(0;\ 4)$, $M_4(2;\ 1)$, которые принадлежат данной области. В этих точках значения функции равны

$$f(M) = f(M_1) = f(M_2) = f(M_3) = 0,\ \ f(M_4) = 4.$$

Шаг 3. Исследуем поведение функции на границе области D.

При $x = 0$ и $y = 0$ значения функции равны нулю.

На отрезке прямой $y = 8 - x$, $x \in [0;\ 8]$, данная функция является функцией одной переменной x. Обозначим ее $\bar{z}(x)$:

$$\bar{z}(x) = x^2(8 - x)(4 - x - 8 + x) = -4x^2(8 - x).$$

Найдем стационарные точки этой функции, принадлежащие отрезку [0; 8]:

$$\bar{z}'_x = 4x(3x - 16) = 0\,.$$

Это точки $M_5(0;\ 8)$ и $M_6(16/3;\ 8/3)$, первая из которых совпадает с точкой B (см. рисунок 1.2). Добавим к ним точку $M_7(8;\ 0)$, являющуюся концом рассматриваемого отрезка. Вычислим значения функции в этих точках:

$$f(M_5) = 0,\ \ f(M_6) = -\frac{8192}{27},\ \ f(M_7) = 0.$$

Шаг 4. Сопоставляя значения функции в точках $f(M) = f(M_1) = f(M_2) = f(M_3) = 0$, $f(M_4) = 4$, $f(M_5) = 0$, $f(M_6) = -\frac{8192}{27}$, $f(M_7) = 0$, заключаем, что данная функция $z = x^2y(4 - x - y)$ достигает наименьшего значения в точке M_6, причем $z_{наим}(16/3;\ 8/3) = -\frac{8192}{27}$ и наибольшего значения в точке M_4, причем $z_{наиб}(2;\ 1) = 4$.

Ответ: $z_{наим}(16/3;\ 8/3) = -\frac{8192}{27}$, $z_{наиб}(2;\ 1) = 4$.

Задача 16. На эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку, наиболее удаленную от точки $A(0; 0; 3)$.

Решение. *Шаг 1.* Расстояние d между точками $M(x; y; z)$ и $A(0; 0; 3)$ находится по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2}.$$

Поэтому исходная задача равносильна задаче об условном максимуме функции

$$u = d^2 = x^2 + y^2 + (z - 3)^2$$

при условии

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8.$$

Шаг 2. Выразим x^2 из последнего уравнения

$$x^2 = 8 - 2y^2 - 4z^2$$

и подставим в функцию u. Полученную функцию двух переменных y и z обозначим $u_1(y, z)$:

$$u_1(y, z) = 8 - 2y^2 - 4z^2 + y^2 + (z - 3)^2 \Leftrightarrow u_1(y, z) = 8 - y^2 - 4z^2 + (z - 3)^2.$$

Шаг 3. Найдем точку, в которой функция u_1 принимает наибольшее значение. Для этого определим стационарные точки функции u_1.

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} = -8z + 2(z-3) = -6z - 6.$$

Составим систему, решениями которой будут стационарные точки функции u_1:

$$\begin{cases} -2y = 0, \\ -6z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ z = -1. \end{cases}$$

Точка $M_1(0; -1)$ – единственная стационарная точка функции u_1.

Шаг 4. Исследуем наличие экстремума в этой точке, для чего вычислим

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -2, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial z} = 0, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = -6,$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 12.$$

Поскольку $a_{11}<0$, $\Delta>0$, то точка $M_1(0;\ -1)$ – точка максимума функции $u_1(y, z)$. Вычисляем соответствующее значение переменной x:

$$x^2 = 8-4-2\cdot 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Таким образом, точки $M(2;\ 0;\ -1)$ и $N(-2;\ 0;\ -1)$ являются искомыми точками на эллипсоиде, наиболее удаленными от точки $A(0;\ 0;\ 3)$.

Ответ: $M(2;\ 0;\ -1)$ и $N(-2;\ 0;\ -1)$.

Задача 17. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема, если его полная поверхность равна заданной величине S.

Решение. Обозначим длины сторон параллелепипеда x, y, z. Тогда требуется найти наибольшее значение функции $V = xyz$ при условии $xy + xz + yz = S/2$.

Шаг 1. Выразим z из последнего уравнения

$$z=\frac{S-2xy}{2(x+y)}$$

и подставим в функцию V. Тогда

$$V_1(x, y) = xy\cdot\frac{S-2xy}{2(x+y)}=\frac{Sxy-2x^2y^2}{2(x+y)}.$$

Таким образом, задача на условный экстремум сведена к задаче на нахождение наибольшего значения функции $V_1(x, y)$ при условии $x>0$, $y>0$.

Шаг 2. Найдем стационарные точки функции $V_1(x, y)$. Для этого вычисляем частные производные первого порядка функции $V_1(x, y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x}=\dfrac{y^2(S-2x^2-4xy)}{2(x+y)^2}, \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial y}=\dfrac{x^2(S-2y^2-4xy)}{2(x+y)^2}. \end{cases}$$

Составляем систему для нахождения стационарных точек функции $V_1(x, y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2(S-2x^2-4xy)}{2(x+y)^2}, \\ \dfrac{x^2(S-2y^2-4xy)}{2(x+y)^2}, \\ x>0, \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S-2x^2-4xy=0, \\ S-2y^2-4xy=0, \\ x>0, \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \\ 2x^2+4xy=S, \\ x>0, \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\sqrt{\frac{S}{6}}.$$

Таким образом, получена единственная стационарная точка $M_1\left(\sqrt{\frac{S}{6}};\sqrt{\frac{S}{6}}\right)$ функции V_1. Из геометрических соображений ясно, что это точка максимума.

Шаг 3. Находим недостающее измерение параллелепипеда:

$$z=\frac{S-S/3}{2\left(\sqrt{\frac{S}{6}}+\sqrt{\frac{S}{6}}\right)}=\frac{2S/3}{4\sqrt{\frac{S}{6}}}=\sqrt{\frac{S}{6}}.$$

Таким образом, искомый параллелепипед – куб с ребром $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

Ответ: куб с ребром $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

Задача 18. Фирма имеет два филиала, издержки производства в которых описываются функциями $K_1(x)$ и $K_2(y)$ соответственно, где x и y – объемы продукции, производимые каждым филиалом. Общий спрос на товар фирмы определяется ценой p за единицу продукции, зависящей от суммарного объема выпускаемой продукции $z = x + y$ и определяемой функцией $z = f(p)$. Рассчитать оптимальный объем выпуска продукции для производителя, оптимальную цену в целом и распределение производственной программы по филиалам, если известно, что

$$K_1(x) = 0{,}1x^2 + 2x + 1000,\ \ K_2(y) = 0{,}1y^2 + 3y + 1120,\ \ z = 10000 - 25p.$$

Решение. *Шаг 1.* Составляем функцию оптимального выпуска продукции, которая определяется максимальной прибылью фирмы:

$$Q(x, y) = p(x + y) - 0{,}1x^2 - 2x - 1000 - 0{,}1y^2 - 3y - 1120,$$

где произведение $p(x + y)$ выражает доход фирмы от реализации продукции объемом $x+y$ по цене p.

Поскольку, с одной стороны, $z = x + y$, а с другой, $z = 10000 – 25p$, то из равенства $x + y = 10000 – 25p$ можно найти $p = 400 – 0{,}04(x + y)$. Тогда

$$Q(x, y) = (400 – 0{,}04(x + y))(x + y) – 0{,}1x^2 – 2x – 1000 – 0{,}1y^2 – 3y – 1120 =$$
$$= –0{,}14x^2 – 0{,}14y^2 – 0{,}08xy + 398x + 397y – 2120.$$

Шаг 2. Находим экстремумы функции $Q(x, y)$. Для этого вычисляем частные производные первого порядка функции $Q(x, y)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -0{,}28x - 0{,}08y + 398, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -0{,}08x - 0{,}28y + 397.$$

Составляем систему для нахождения стационарных точек функции $Q(x, y)$:

$$\begin{cases} -0{,}28x - 0{,}08y + 398 = 0, \\ -0{,}08x - 0{,}28y + 397 = 0. \end{cases}$$

Откуда x=1106,6≈1107, y=1101,6≈1102. Таким образом, получена стационарная точка (1107; 1102).

Шаг 3. Исследуем наличие экстремума в стационарной точке. Для этого вычисляем частные производные второго порядка:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -0{,}28, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} = -0{,}08, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -0{,}28,$$

и значение выражения

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = (-0{,}28)^2 - (-0{,}08)^2 = 0{,}072.$$

Так как a11<0, Δ>0, то стационарная точка (1107; 1102) – точка максимума.

Ответ: если в первом филиале фирма произведет 1107 единиц продукции, а во втором – 1102 единиц продукции, то, продав ее по цене $p = 400 – 0{,}04(1107 + 1102) = 311{,}64$ денежных единиц за единицу продукции, фирма получит максимальную прибыль, равную $Q_{max}(1107; 1102) = 436787{,}46$ денежных единиц.

Задача 19. Имеются два технологических процесса производства некоторого изделия. Издержки производства при каждом технологическом процессе описываются функциями $K_1(x)$ и $K_2(y)$ соответственно, где x и y – объемы производимых изделий при первом и втором технологическом процессе соответственно. В течение некоторого времени нужно произвести b единиц изделий, используя оба технологических процесса. Выпуск изделий надо распределить таким образом, чтобы минимизировать общие издержки, если известно, что

$$K_1(x) = K_2(y) = 2 + 40y + 2y^2,\ \ b = 100.$$

Решение. *Шаг 1.* Составляем функцию общих издержек:

$$K(x, y) = K_1(x) + K_2(y) = 3 + 24x + 2x^2 + 40y + 2y^2.$$

В соответствии с условиями задачи необходимо произвести $x + y = 100$ изделий.

Шаг 2. Поскольку уравнение $x + y = 100$ является линейным, поставленную задачу на нахождение условного минимума проще решать не методом Лагранжа, а сведением к задаче на локальный минимум функции одной переменной. Для этого из уравнения $x + y = 100$ выразим, например, переменную y:

$$y = 100 – x.$$

Подставив в функцию общих издержек $K(x, y)$, получим функцию $\overline{K}(x)$:

$$\overline{K}(x) = 3 + 24x + 2x^2 + 40(100 – x) + 2(100 – x)^2 \Leftrightarrow \overline{K}(x) = 4x^2 – 416x + 24003.$$

Шаг 3. Исследуем эту функцию на экстремум.

$$\overline{K}'(x) = 8x - 416,$$

$$\overline{K}'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x = 416 \Leftrightarrow x = 52.$$

Получена стационарная точка функции $\overline{K}(x)$. Поскольку справа от этой точки производная $\overline{K}'(x)>0$, а слева $\overline{K}'(x)<0$, то $x = 52$ – точка минимума функции $\overline{K}(x)$.

Шаг 4. Находим $y = 100 – 52 = 48$. Найденная точка $M(52; 48)$ является точкой условного минимума поставленной задачи.

Итак, для минимизации общих издержек нужно 52 изделия произвести первым технологическим способом, и 48 изделий – вторым технологическим способом.

Ответ: 52 изделия нужно произвести первым технологическим способом и 48 изделий – вторым технологическим способом.

Задача 20. Предполагая, что между переменными x и y существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу вида $y = ax + b$ по следующим данным: имеются данные (таблица 1) о цене на нефть x (денежные единицы) и индексе акций нефтяных компаний y (условные единицы).

Таблица 1

x	17,28	17,05	18,30	18,80	19,20	18,50
y	537	534	550	555	560	552

Решение. Так как переменные x и y связаны линейной зависимостью $y = ax + b$, то параметры a и b можно найти, решив следующую систему:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Для нахождения коэффициентов системы выполним необходимые расчеты, результаты которых внесем в таблицу 2.

Таблица 2

i				
1	17,28	537	9279,36	298,59
2	17,05	534	9104,7	290,7
3	18,30	550	10065	334,89
4	18,80	555	10434	353,44
5	19,20	560	10752	368,64
6	18,50	552	10212	342,25
Σ	109,13	3288	59847,06	1988,51

Подставив найденные значения коэффициентов, получим линейную систему уравнений вида:

$$\begin{cases} 109{,}13a + 6b = 3288, \\ 1988{,}51a + 109{,}13b = 59847{,}06, \end{cases}$$

решив которую, найдем значения искомых параметров:

$$\begin{cases} a = 12{,}1137, \\ b = 327{,}6725. \end{cases}$$

Тогда искомая эмпирическая формула имеет вид:

$$y = 12{,}1137x + 327{,}6725.$$

Ответ: $y = 12{,}1137x + 327{,}6725$.

Задача 21. Предполагая, что между переменными x и y существует зависимость $y = ax^2 + bx + c$, определить параметры a, b, c, исходя из имеющихся данных (таблица 3) об изменении цены x на акции и количестве акций y на бирже.

Таблица 3

x	1	2	3	4	5
y	2,9	8,9	19,1	33,2	50,8

Решение. Так как переменные x и y связаны зависимостью $y=ax^2+bx+c$, то параметры a, b, c можно найти, решив систему следующего вида:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Для нахождения коэффициентов системы выполним необходимые расчеты, результаты которых внесем в таблицу 4.

Таблица 4

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	$x^2{}_i\ y_i$	x_i^3	x_i^4
1	1	2,9	2,9	1	2,9	1	1
2	2	8,9	17,8	4	35,6	8	16
3	3	19,1	57,3	9	171,9	27	81
4	4	33,2	132,8	16	531,2	64	256
5	5	50,8	254	25	1270	125	625
Σ	15	114,9	464,8	55	2011,6	225	979

Подставив найденные значения коэффициентов, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 55a + 15b + 5c = 114{,}9, \\ 225a + 55b + 15c = 464{,}8, \\ 979 + 225b + 55c = 2011{,}6, \end{cases}$$

решив которую, найдем значения параметров a, b, c:

$$a = 1{,}936, \quad b = 0{,}394, \quad c = 0{,}502.$$

Тогда искомая эмпирическая зависимость описывается функцией:

$$y = 1{,}936x^2 + 0{,}394x + 0{,}502.$$

Ответ: $y = 1{,}936x^2 + 0{,}394x + 0{,}502$.

Тесты для самопроверки с указаниями и подсказками

Задание 1. Для функции $z(x,\, y) = \dfrac{x - 2y}{2x - y}$ вычислите

1.1) $z(3;\, 1)$;

1.2) $z(1;\, 3)$;

1.3) $z(1;\, 2)$;

1.4) $z(a;\, a)$;

1.5) $z(a;\, -a)$.

Варианты ответов:

1) 1;

2) 0;

3) –1;

4) значение не определено;

5) 2;

6) –5;

7) 0,2;

8) 5.

Правильные ответы представлены в таблице 5.

Таблица 5

№ задачи	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
№ ответа	7	8	4	3 ($a \neq 0$)	1 ($a \neq 0$)

Задание 2. Используя *подсказку*, для функции $z = x^2 - xy - y^2$ вычислите частные приращения по переменной x ($\Delta_x z$), по переменной y ($\Delta_y z$) и полное приращение по обеим переменным (Δz), если x изменяется от $x_0 = 2$ до $x_1 = 2{,}1$, а y изменяется от $y_0 = 2$ до $y_1 = 1{,}9$. В ответ запишите тройку чисел ($\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz).

Подсказка к заданию 2. Частные приращения $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ по переменным x и y соответственно вычисляются по формулам:

$$\Delta_x z = z(\Delta x,\, y_0) = z(x_1,\, y_0) - z(x_0,\, y_0),$$

$$\Delta_y z = z(x_0, \Delta y) = z(x_0, y_1) - z(x_0, y_0).$$

Полное приращение Δz по совокупности переменных x, y вычисляется по формуле:

$$\Delta z = z(\Delta x, \Delta y) = z(x_1, y_1) - z(x_0, y_0).$$

Варианты ответов:

1) (0,2; 0,03; 0,1);

2) (0,21; 0,1; 0,81);

3) (0,21; 0,1; 0,03);

4) (0,21; 0,59; 0,81);

5) (0,2; 0,69; 0,03).

Правильный ответ: 4.

Задание 3. Дайте определение частной производной функции $z(x, y)$ по переменным x и y. Изучите правила вычисления частных производных функций двух переменных и найдите определитель $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$, если

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Варианты ответов:

1) φ;

2) 1;

3) r;

4) 0;

5) –1.

Правильный ответ: 3.

Задание 4. Повторите определение дифференцируемой в точке функции $z(x, y)$. Что такое полный дифференциал функции? По какой формуле он вычисляется и как используется в приближенных вычислениях? Воспользуйтесь *подсказкой*, чтобы для данных функций $z(x, y)$ и указанной для каждой из них пары точек M_0 и M_1

4.1) $z = x^y$, $M_0(1; 3)$, $M_1(1{,}02; 3{,}01)$;

4.2) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $M_0(2;\,3)$, $M_1(2{,}1;\,2{,}5)$

вычислить:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в произвольной точке $M(x;\,y)$;

2) полный дифференциал dz в произвольной точке;

3) $dz(M_0)$, где M_0 – данная точка;

4) приближенное изменение функции, вызванное переходом от точки M_0 к точке M_1, заменяя приращение $\Delta z(M_0,\,M_1)$ полным дифференциалом $dz(M_0)$;

5) приближенное значение функции в точке M_1.

В ответ запишите тройки чисел ($z'_x(M_0)$, $z'_y(M_0)$, $\Delta z(M_0,\,M_1)$).

Подсказка к заданию 4. Функция $z = z(x,\,y)$ называется дифференцируемой в точке $M_0(x_0;\,y_0)$, если в некоторой окрестности этой точки полное приращение $\Delta z(M_0,\,M)$ можно представить в виде

$$\Delta z(M_0,\,M) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$; точка $M(x;\,y)$ принадлежит указанной окрестности точки $M_0(x_0;\,y_0)$.

Полным дифференциалом функции $z = z(x,\,y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy, то есть

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, то есть $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

Полный дифференциал функции $z = z(x,\,y)$ в точке M_0 вычисляется по формуле

$$dz(M_0) = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}dy\,.$$

Для дифференцируемой в точке $M_0(x_0;\,y_0)$ функции $z = z(x,\,y)$ справедливы приближенные равенства:

$$\Delta z(M_0,\,M_1) \approx dz(M_0) \Leftrightarrow z(M_1) \approx z(M_0) + dz(M_0).$$

где M_1 – точка, лежащая в достаточно малой окрестности точки M_0.

Варианты ответов:

1) (3; 1; 0,06);

2) (–3; 0; 0,1);

3) (3; 0; 0,06);

4) $\left(-\frac{3}{13};-\frac{2}{13};1\right)$;

5) $\left(\frac{3}{13};\frac{2}{13};0{,}1\right)$;

6) $\left(-\frac{3}{13};\frac{2}{13};-0{,}1\right)$.

Правильные ответы представлены в таблице 6.

Таблица 6

№ функции	4.1	4.2
№ ответа	3	6

Задание 5. Приведите определение и напишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0 = f(x_0; y_0)$. Используя *подсказку*, составьте уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, в указанной точке:

5.1) $z = xy$, $M_0(1; 0; 0)$;

5.2) $z = x + y^2$, $M_0(0; 1; 1)$;

5.3) $z = e^{x+y}$, $M_0(1; -1; 1)$.

Подсказка к заданию 5. Касательной плоскостью к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0 = f(x_0; y_0)$, называется плоскость, проходящая через точку M_0, и содержащая касательные ко всем кривым, проведенным на поверхности через точку M_0.

Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид:

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

Варианты ответов:

1) $z = x$;

2) $z = y$;

3) $z = x + y + 1$;

4) $z = x + y$;

5) $z = x + 2y - 1$.

Правильные ответы представлены в таблице 7.

Таблица 7

№ функции	5.1	5.2	5.3
№ ответа	2	5	3

Задание 6. Является ли плоскость $z = 0$ касательной плоскостью в точке $O(0;0;0)$

6.1) к параболоиду $z = x^2 + y^2$;

6.2) к конусу $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

6.3) к гиперболическому параболоиду $z = xy$?

Правильные ответы: 6.1) да; 6.2) нет; 6.3) да.

Задание 7. Приведите определение и напишите уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0 = f(x_0; y_0)$. Используя *подсказку*, составьте уравнения нормалей к поверхностям 5.1)–5.3) из *задания 5* в указанных там точках.

Подсказка к заданию 7. Нормалью к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0 = f(x_0; y_0)$, называется прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной плоскости, проведенной к поверхности в этой точке. Уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ записывается в виде

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Варианты ответов:

1) $\frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$;

2) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$;

3) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-1}$;

4) $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$;

5) $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

Правильные ответы представлены в таблице 8.

Таблица 8

№ функции	5.1	5.2	5.3
№ ответа	4	2	3

Задание 8. Дайте определение производной функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в направлении вектора $\vec{l}$ и запишите формулу для вычисления этой производной в указанной точке. Какой вектор называется градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0? Используя *подсказку*, найдите для функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M_0(1; 1; 1)$

1) $\overrightarrow{grad u}(M_0)$;

2) модуль вектора $\overrightarrow{grad u}(M_0)$;

3) производную $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ в направлении вектора $\vec{l} = (\cos 45°; \cos 60°; \cos 60°)$.

В ответ запишите пару чисел $\left(\left|\overrightarrow{grad u}(M_0)\right|, \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)\right)$.

Подсказка к заданию 8. Пусть дифференцируемая функция $u = f(x, y, z)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, а направление $\vec{l}$ характеризуется направляющими косинусами $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$. Тогда производная функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{l}$ вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma .$$

Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 называется вектор, имеющий координаты, соответственно равные частным производным

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, вычисленным в точке M_0. Таким образом,

$$\overrightarrow{gradu}(M_0) = \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}; \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}; \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \right).$$

Длина (модуль) градиента вычисляется по формуле

$$\left|\overrightarrow{gradu}(M_0)\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \right)^2}.$$

Варианты ответов:

1) $(4;\ 2\sqrt{2})$;

2) $(12;\ 2+\sqrt{2})$;

3) $(\sqrt{12};\ 2+\sqrt{2})$;

4) $(2\sqrt{3};\ 2-\sqrt{2})$;

5) $(\sqrt{6};\ \sqrt{2}+2)$.

Правильный ответ: 3.

Задание 9. Вспомните определения и правила вычисления частных производных второго порядка для функции $z(x, y)$ по переменным x и y. В каком случае частная производная второго порядка называется смешанной? Сформулируйте теорему о равенстве смешанных производных второго порядка функции $z(x, y)$.

Найдите частные производные 2-го порядка следующих функций:

9.1) $z=x^2y^3$;

9.2) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$;

9.3) $v = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

Из приведенных вариантов ответов выберите правильные, указав при этом, производной какой из функций (z, u или v) и по какой из переменных (x или y) является данное выражение.

Варианты ответов:

1) $-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

2) $\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

3) $\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$;

4) $6xy^2$;

5) $6x^2y$;

6) $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;

7) $2y^3$.

Правильные ответы представлены в таблице 9.

Таблица 9

№ ответа	1	2	3	4	5	6	7
Производная	$u''_{xy}=v''_{x^2}$	v''_{y^2}	u''_{x^2}	z''_{xy}	z''_{y^2}	$u''_{y^2}=v''_{xy}$	z''_{x^2}

Задание 10. Дайте определение дифференциала второго порядка функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ и запишите формулу для вычисления второго дифференциала (см. *подсказку*). Найдите второй дифференциал функции 9.1 из *задания* 9 в точке $M_0(1; –1)$.

Подсказка к заданию 8. Второй дифференциал d^2z в точке M_0 определяется как дифференциал в точке M_0 от первого дифференциала и вычисляется по формуле

$$d^2z(M_0)=\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2}dy^2,$$

где $dx^2=(dx)^2$, $dy^2=(dy)^2$.

Варианты ответов:

1) $d^2z(M_0) = 2dx^2 + 3dxdy – 6dy^2$;

2) $d^2z(M_0) = –2dx^2 + 12dxdy – 6dy^2$;

3) $d^2z(M_0) = –2dx^2 + 6dxdy – 6dy^2$.

Правильный ответ: 2.

Задание 11. Запишите формулу Тейлора второго порядка для функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ (см. *подсказку*). Найдите разложение функции 9.1 из *задания* 9 по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(1; -1)$ до членов второго порядка включительно.

Подсказка к заданию 11. Если функция $z = z(x, y)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, то для любой точки $M(x; y)$ из этой окрестности справедливо равенство

$$z(x, y) = z(M_0) + dz(M_0) + \frac{1}{2!}d^2z(M_0) + R_2 =$$

$$= z(M_0) + \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}(y - y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2\right) + R_2.$$

Эта формула называется формулой Тейлора второго порядка в точке $M_0(x_0; y_0)$ с остаточным членом R_2.

Варианты ответов:

1) $z(x, y) = -2(x - 1) + 3(y + 1) - 2(x - 1)^2 + 12(x - 1)(y + 1) - 6(y + 1)^2 + R_2$;

2) $z(x, y) = -1 - 2x + 3y - x^2 + 6xy - 3y^2 + R_2$;

3) $z(x, y) = -1 - 2(x - 1) + 3(y + 1) - (x - 1)^2 + 6(x - 1)(y + 1) - 3(y + 1)^2 + R_2$.

Правильный ответ: 3.

Задание 12. Изучите правила дифференцирования сложных функций. Запишите формулы вычисления частных производных сложной функции $z = z(x, y)$ по переменным u и v, если $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ (см. *подсказку*).

Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ для функций

12.1) $z = x^2 + y^2$, где $x = u + v$, $y = u - v$;

12.2) $z = \ln(x^2 + y^2)$, где $x = uv$, $y = u/v$.

Подсказка к заданию 12. Пусть z = z(x, y) – функция двух переменных x и y, каждая из которых является функцией двух независимых переменных u и v, то есть $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тогда частные производные сложной функции z = z($x(u, v)$, $y(u, v)$) по переменным u и v вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Варианты ответов:

1) $2u$;

2) $4v$;

3) $\frac{2}{u}$;

4) $\frac{v^4-1}{v(v^4+1)}$;

5) $4u$;

6) $\frac{2(v^4-1)}{v(v^4+1)}$.

Правильные ответы представлены в таблице 10.

Таблица 10

№ функции	12.1		12.2	
Частная производная	$\frac{\partial z}{\partial u}$	$\frac{\partial z}{\partial v}$	$\frac{\partial z}{\partial u}$	$\frac{\partial z}{\partial v}$
№ ответа	5	2	3	6

Задание 13. Дайте определение неявной функции двух переменных, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$. Приведите формулы вычисления частных производных этой функции по ее аргументам x и y (см. *подсказку*). Найдите частные производные первого порядка в указанной точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$:

13.1) $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$, $M_0(1; -2; 2)$;

13.2) $e^z + 2xz + y^2 - 2 = 0$, $M_0(-1; 1; 0)$.

В ответ запишите пару чисел $\left(\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\right)$.

Подсказка к заданию 13. Функция $z = z(x, y)$ называется неявной, если она задается уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

не разрешенным относительно z.

Частные производные этой функции в точке M_0 по переменным x и y вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(M_0)}{F'_z(M_0)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(M_0)}{F'_z(M_0)},$$

при условии $F'_z(M_0) \neq 0$.

Варианты ответов:

1) (–1, 1/2);

2) (–1, 2);

3) (0, 2);

4) (1, 1/2);

5) (2, 1);

6 (–1, 1).

Правильные ответы представлены в таблице 11.

Таблица 11

№ функции	13.1	13.2
№ ответа	4	3

Задание 14. Опираясь на *подсказку*, составьте уравнение касательной плоскости к каждой из поверхностей, заданных неявно уравнениями 13.1 и 13.2 *задания* 13, в указанных там точках.

Подсказка к заданию 14. Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, имеет вид

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Варианты ответов:

1) $2y - z - 2 = 0$;

2) $2y - z = 0$;

3) $2x + y - 2z = 0$;

4) $2x + y - 2z + 4 = 0$.

Правильные ответы представлены в таблице 12.

Таблицам 12

№ функции	13.1	13.2
№ ответа	4	1

Задание 15. Пользуясь *подсказкой*, составьте уравнение нормали к каждой из поверхностей 13.1, 13.2 из *задания* 13 в указанных там точках.

Подсказка к заданию 15. Уравнение нормали к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, записывается в виде

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Варианты ответов:

1) $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{2}$;

2) $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-2}{2}$;

3) $\dfrac{x+1}{0} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$;

4) $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$.

Правильные ответы представлены в таблице 13.

Таблица 13

№ функции	13.1	13.2
№ ответа	2	3

Задание 16. Дайте определение стационарной точки функции двух переменных $z = z(x, y)$ (см. *подсказку*).

Найдите стационарные точки следующих функций:

16.1) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$;

16.2) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;

16.3) z = x

16.3) $z = x^3 + y^3 + 6xy$.

Из приведенных вариантов ответов выберите стационарные точки функций 16.1, 16.2, 16.3 и укажите, для какой именно функции данная точка является стационарной.

Подсказка к заданию 16. Пусть функция $z = z(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$. Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется стационарной точкой функции $z = z(x, y)$, если частные производные функции по переменным x и y в этой точке одновременно равны нулю, то есть

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Варианты ответов:

1) $M_1(0; 0)$;

2) $M_2(1; 1)$;

3) $M_3(3; 0)$;

4) $M_4(0; 3)$;

5) $M_5(-2; 2)$;

6) $M_6(-2; -2)$;

7) $M_7(2; 2)$;

8) $M_8(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$;

9) $M_9(\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,)$;

10) $M_{10}(-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,)$.

Правильные ответы представлены в таблице 14.

Таблица 14

№ функции	16.1	16.2	16.3
Стационарные точки	M_4	M_1, M_8, M_{10}	M_1, M_6

Задание 17. Изучите достаточные условия существования локального экстремума функции двух переменных $z = z(x,\ y)$ (см. *подсказку*). Основываясь на достаточных условиях экстремума, сделайте вывод о том, имеет ли каждая из функций 16.1–16.3 из *задания* 16 экстремум в своих стационарных точках.

Подсказка к заданию 17. Пусть в стационарной точке $M_0(x_0;\ y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $z = z(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Составим матрицу H вторых производных в стационарной точке M_0:

$$H = \begin{bmatrix} z''_{xx}(M_0) & z''_{xy}(M_0) \\ z''_{xy}(M_0) & z''_{yy}(M_0) \end{bmatrix}.$$

Обозначим через Δ_1 и Δ_2 главные миноры этой матрицы первого и второго порядков соответственно, то есть

$$\Delta_1 = z''_{xx}(M_0), \quad \Delta_2 = z''_{xx}(M_0)z''_{yy}(M_0) - \left(z''_{xy}(M_0)\right)^2.$$

Тогда, если

1) $\Delta_1>0$ и $\Delta_2>0$, то точка M_0 является точкой минимума функции $z = z(x, y)$;

2) $\Delta_1<0$ и $\Delta_2>0$, то точка M_0 является точкой максимума функции $z = z(x, y)$;

3) $\Delta_2<0$, функция $z=z(x, y)$ в точке M_0 экстремума не имеет.

В остальных случаях требуются дополнительные исследования.

Варианты ответов представлены в таблице 15.

Таблица 15

№ ответа	1	2	3	4	5	6	7
Δ_1	–12	0	20	–4	–12	20	2
Δ_2	108	–36	384	0	108	384	3
Вывод	Точка максимума	Не точка экстремума	Точка минимума	Нужны дополнительные исследования	Точка минимума	Точка максимума	Точка минимума

Правильные ответы представлены в таблице 16.

Таблица 16

Функция	16.1	16.2	16.2	16.2	16.3	16.3
Точка	M_4	M_1	M_8	M_{10}	M_1	M_6
№ ответа	7	4	3	3	2	1

Задание 18. На плоскости xOy заданы ограниченные замкнутые множества:

D_1 – прямоугольник $ABCD$, где $A(–3; –3)$, $B(–3; 2)$, $C(1; 2)$, $D(1; –3)$;

D_2 – треугольник ABC, где $A(–4; 0)$, $B(0; 4)$, $C(4; 0)$;

D_3 – трапеция $ABCD$, где $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1; 1)$, $D(0; 5)$.

Выполните следующие задания.

1) изобразите множества D_1, D_2, D_3 на рисунке;

2) задайте эти множества с помощью уравнений ограничивающих их прямых;

3) задайте эти множества с помощью системы неравенств, используя уравнения ограничивающих их прямых;

4) проверьте, принадлежат ли этим множествам следующие точки: $M_1(0; 3)$, $M_2(0; 0)$, $M_3(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $M_4(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Правильные ответы представлены в таблице 17.

Таблица 17

		Точки			
		M_1	M_2	M_3	M_4
Множества	D_1	нет	да	нет	да
	D_2	да	да	нет	да
	D_3	да	да	нет	нет

Задание 19. Функция $z = x^3 + y^3 + 6xy$ определена на множестве точек треугольника ABC, который задан координатами своих вершин: $A(–4; 0)$, $B(0; 4)$, $C(4; 0)$.

а) напишите уравнения сторон треугольника ABC (см. *задание 18*).

б) напишите, каким уравнением определяется данная функция z на каждом из отрезков AB, BC, AC, являющихся сторонами треугольника ABC.

Варианты ответов представлены в таблице 18.

Таблица 18

		Сторона Δ		
		AB	AC	BC
№ ответа	1	а) $y = x + 4$, б) $z = 2x^3 + 18x^2 + 72x$, $x \in [–4; 0]$.	а) $y = 0$, б) $z = x^3 + 6x$, $x \in [–4; 4]$.	а) $y = x – 4$, б) $z = 2x^3 – 6x^2 + 24x$, $x \in [0; 4]$.
	2	а) $y = x – 4$, б) $z = 2x^3 – 6x^2 + 24x$, $x \in [–4; 4]$.	а) $x = 0$, б) $z = y^3$, $x \in [–4; 4]$.	а) $y = x + 4$, б) $z = 2x^3 + 18x^2 + 72x$, $x \in [–4; 0]$.
	3	а) $y = x + 4$, б) $x \in [0; 4]$.	а) $y = 0$, б) $z = x^3$, $x \in [–4; 4]$.	а) $y = –x – 4$, б) $z = –2x^3 – 18x^2 – 72x$, $x \in [–4; 4]$.
	4	а) $y = 4 – x$, б) $z = 6x^2 – 24x + 64$, $x \in [–4; 0]$.	а) $x = 0$, б) $z = x^3$, $x \in [0; 4]$.	а) $y = –4 – x$, б) $z = 6x^2 – 24x + 64$, $x \in [0; 4]$.

Правильные ответы представлены в таблице 19.

Таблица 19

Сторона треугольника	AB	AC	BC
№ ответа	1	3	4

Задание 20. Изучите алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $z = z(x, y)$ на произвольном ограниченном замкнутом множестве D. Рассмотрите случай, когда множество D состоит из всех точек ΔABC (см. *подсказку*). Используя результат *задания* 19, найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 + 6xy$ на множестве точек треугольника ABC из *задания* 19.

Подсказка к заданию 20. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = z(x, y)$ на множестве точек треугольника ABC:

1) найдите стационарные точки функции $z = z(x, y)$, принадлежащие множеству точек треугольника ABC, и вычислите в них значения функции;

2) зная уравнения сторон треугольника ABC и уравнения, которыми задается функция $z = z(x, y)$ на отрезках AB, BC и AC, найдите значения функции на концах отрезков и в стационарных точках, принадлежащих каждому из отрезков;

3) среди вычисленных значений функции z выберите наибольшее и наименьшее значения.

В вариантах ответов приведены пары чисел, являющихся наибольшим (первое число) и наименьшим значениями данной функции.

Варианты ответов представлены в таблице 20.

Таблица 20

№ ответа	1	2	3	4	5	6	7
$(z_{max}; z_{min})$	(64; 0)	(64; –64)	(64; 40)	(208; 64)	(40; –64)	(64; –40)	(64; –280)

Правильный ответ: 7) $z_{max} = 64$; $z_{min} = –280$.

Математический диктант

Вариант 1

1. Привести графический пример плоского несвязного ограниченного множества.

2. Написать уравнение 5-мерной сферы радиусом $\sqrt{2}$ и центром в точке $A(1; 0; –1; 2; 3)$.

3. Задать аналитически и изобразить на плоскости область определения функции $z = \sqrt{y \sin x}$.

4. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = 2xy + xe^{y/x}$ уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - xy - z = 0$.

5. Пояснить, является ли плоскость $z = 0$ касательной плоскостью к поверхности $z = -\sqrt{5x^2 + y^2}$ в точке $O(0; 0; 0)$.

6. Написать уравнение нормали к поверхности, заданной уравнением $z = x^2 + y^2 + xy$, в точке $A(x_0; y_0; z(x_0; y_0))$, где $x_0 = y_0 = 1$.

7. Найти производную функции $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$ в точке $A(2; -1)$ по направлению $\overrightarrow{grad}\, z(A)$.

8. Найти $d^2z(A)$, если $z = x^2 + 3y^2 – xy + 5y – 4$, $A(\sqrt{2}; 1)$.

9. Пусть M_0 – стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой в этой точке функции $u=f(x, y, z)$. Является ли точка M_0 точкой экстремума функции, если матрица вторых производных в точке M_0 имеет вид $H(M_0) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$?

10. При каких размерах открытого прямоугольного ящика объемом $V = 32$ м^3 площадь его поверхности будет наименьшей?

Вариант 2

1. Привести графический пример плоского неограниченного замкнутого множества.

2. Как задается 4-мерный открытый шар с центром в точке $A(2; –1; 1; 0)$ и радиусом $\sqrt{3}$?

3. Задать аналитически и изобразить на плоскости область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{y - 2\sqrt{x}}}$.

4. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = e^{x/y}\ln y$ уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{\ln y} = 0$.

5. Пояснить, является ли плоскость $z = 0$ касательной плоскостью к поверхности $z = -\frac{x^2}{2} + 3y^2$ в точке $O(0; 0; 0)$.

6. Написать уравнение нормали к поверхности, заданной уравнением $z = 3x^4 + 2x^2y^3$, в точке $A(x_0; y_0; z(x_0; y_0))$, где $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.

7. Найти производную функции $z = \arccos(x/y)$ в точке $A(1; 2)$ по направлению $\overrightarrow{grad}\, z(A)$.

8. Найти $d^2z(A)$, если $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $A(1/3; 1/2)$.

9. Пусть M_0 – стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой в этой точке функции $u = f(x, y, z)$. Является ли точка M_0 точкой экстремума функции, если матрица вторых производных в точке M_0 имеет вид $H(M_0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$?

10. Определить размеры цилиндра наибольшего объема при условии, что его полная поверхность $S = 6\pi$ м^2.

Ответы к математическому диктанту

Вариант 1

2. $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2 + (x_4 - 2)^2 + (x_5 - 3)^2 = 2$.

3. $y\sin x \geq 0$. См. рисунок 3.

4. Нет.

5. Нет.

6. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$.

7. $\dfrac{\sqrt{17}}{5}$.

8. $2dx^2 - 2dxdy + 6dy^2$.

9. Не является.

10. $a = b = 4$, $h = 2$.

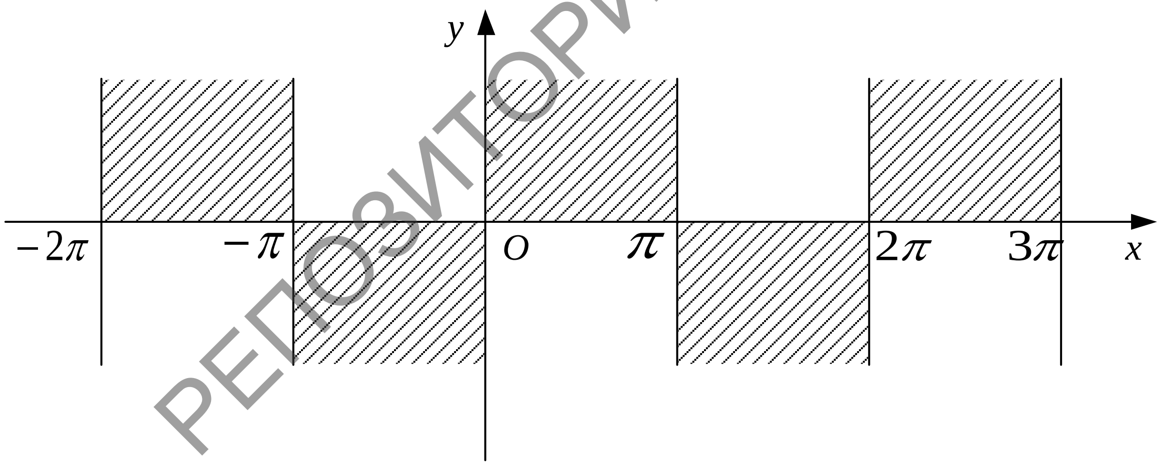

Рисунок 3

Вариант 2

2. $(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + x_4^2 < 3$.

3. $y > 2\sqrt{x}$. См. рисунок 4.

4. Да.

5. Да.

6. $\dfrac{x+1}{20}=\dfrac{y-2}{24}=\dfrac{z-19}{-1}$.

7. $\dfrac{\sqrt{15}}{6}$.

8. $2dx^2 - 6dxdy + 3dy^2$.

9. Точка максимума.

10. $R = 1$, $H = 2$.

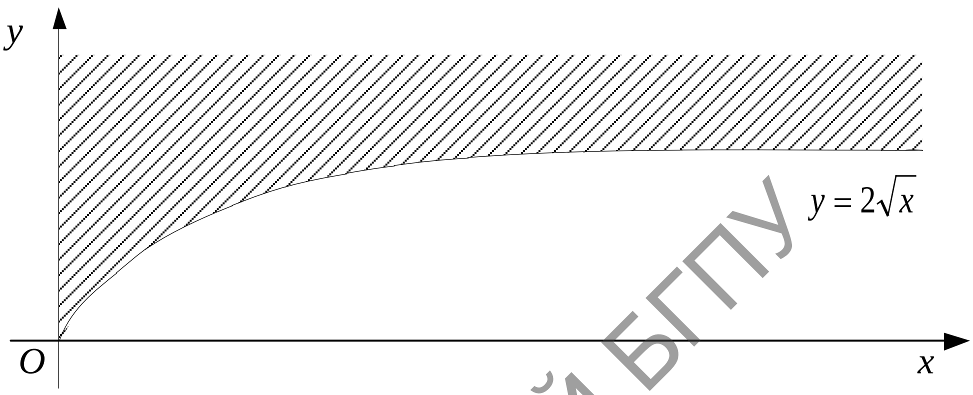

Рисунок 4

Контрольная работа № 1

Вариант 1

Задание 1. Даны функция $z = f(x, y)$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ из ее области определения: $z = \log_2(9 - 4x^2 - y^2)$, $M_0(1; 1)$. Найдите:

а) область определения функции z;

б) дифференциал $dz(M_0)$;

в) градиент $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

г) производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

д) уравнение касательной плоскости к поверхности S с уравнением $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$; D: $x = 5$, $y = 0$, $x - y = 1$; уравнение связи: $x - y - 1 = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Вариант 2

Задание 1. Даны функция $z = f(x, y)$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ из ее области определения: $z = \sqrt{36 - x^2 - 4y^2}$, $M_0(2; 2)$. Найдите:

а) область определения функции z;

б) дифференциал $dz(M_0)$;

в) градиент $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

г) производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

д) уравнение касательной плоскости к поверхности S с уравнением $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$; D: $y = 2x$, $y = 2$, $x = 0$; уравнение связи: $y - 2x = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Вариант 3

Задание 1. Даны функция $z = f(x, y)$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ из ее области определения: $z = \arcsin 2x + \arccos(y - x)$, $M_0(0; 1/2)$. Найдите:

а) область определения функции z;

б) дифференциал $dz(M_0)$;

в) градиент $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

г) производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

д) уравнение касательной плоскости к поверхности S с уравнением $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = 3x^2+3y^2 - 2x - 2y + 2$; D: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$; уравнение связи: $x + y - 1 = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Вариант 4

Задание 1. Даны функция $z = f(x, y)$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ из ее области определения: $z = \frac{2x}{\sqrt{4x - x^2 - y^2}}$, $M_0(2; 0)$. Найдите:

а) область определения функции z;

б) дифференциал $dz(M_0)$;

в) градиент $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

г) производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

д) уравнение касательной плоскости к поверхности S с уравнением $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$; D: $x + y = 3$, $x = 0$, $y = 0$; уравнение связи: $x + y - 3 = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Вариант 5

Задание 1. Даны функция $z = f(x, y)$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ из ее области определения: $z = y + \log_3(6y - x^2 - y^2)$, $M_0(0; 3)$. Найдите:

а) область определения функции z;

б) дифференциал $dz(M_0)$;

в) градиент $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

г) производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

д) уравнение касательной плоскости к поверхности S с уравнением $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$; D: $x = y - 1$, $x = 3$, $y = 0$; уравнение связи: $x - y + 1 = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Вариант 6

Задание 1. Даны функция $z = f(x, y)$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ из ее области определения: $z = \sqrt{25 - x^2} + 2\sqrt{4 - 3y - y^2}$, $M_0(3; 0)$. Найдите:

а) область определения функции z;

б) дифференциал $dz(M_0)$;

в) градиент $\overrightarrow{grad} z(M_0)$;

г) производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad} z(M_0)$;

д) уравнение касательной плоскости к поверхности S с уравнением $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$; D: $y = -2 - x$, $x = 0$, $y = 0$; уравнение связи: $x + y + 2 = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y)=0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Вариант 7

Задание 1. Даны функция $z = f(x, y)$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ из ее области определения: $z = \dfrac{3}{\sqrt{10 - x^2 - y^2}}$, $M_0(1; 0)$. Найдите:

а) область определения функции z;

б) дифференциал $dz(M_0)$;

в) градиент $\overrightarrow{grad} z(M_0)$;

г) производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad} z(M_0)$;

д) уравнение касательной плоскости к поверхности S с уравнением $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$; D: $y = 1 - x$, $x = 0$, $y = 0$; уравнение связи: $x + y - 1 = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Вариант 8

Задание 1. Даны функция $z = f(x, y)$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ из ее области определения: $z = \arcsin(x + y) + \arccos(x - y)$, $M_0(1/2; 0)$. Найдите:

а) область определения функции z;

б) дифференциал $dz(M_0)$;

в) градиент $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

г) производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

д) уравнение касательной плоскости к поверхности S с уравнением $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = 3x + y - xy$; D: $y = x$, $y = 4$, $x = 0$; уравнение связи: $y - x = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Вариант 9

Задание 1. Дана функция $z = f(x, y)$ и две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ из области определения функции: $z = \log_2(9 - 4x^2 - y^2)$; $M_0(1, 1)$, $M_1(0,98; 1,01)$.

а) найдите область определения z, изобразите ее на плоскости и вычислите ее площадь;

б) найдите дифференциал функции z в точке M_0 и вычислите приближенное значение $z(M_1)$ с помощью дифференциала;

в) найдите вектор $\overrightarrow{grad}z(M_0)$ и вычислите косинусы углов, которые образует этот вектор с осями координат;

г) найдите производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad} z(M_0)$;

д) составьте уравнение касательной плоскости к поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$ и найдите расстояние от начала координат до этой плоскости.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$; D: $x + 2y = 4$, $x - 2y = 4$, $x = 0$; уравнение связи: $x + 2y - 4 = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Вариант 10

Задание 1. Дана функция $z = f(x, y)$ и две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ из области определения функции: $z = \sqrt{36 - x^2 - 4y^2}$; $M_0(2; 2)$, $M_1(2{,}15; 0{,}97)$.

а) найдите область определения z, изобразите ее на плоскости и вычислите ее площадь;

б) найдите дифференциал функции z в точке M_0 и вычислите приближенное значение $z(M_1)$ с помощью дифференциала;

в) найдите вектор $\overrightarrow{grad} z(M_0)$ и вычислите косинусы углов, которые образует этот вектор с осями координат;

г) найдите производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad} z(M_0)$;

д) составьте уравнение касательной плоскости к поверхности S, заданной уравнением $z=f(x, y)$, в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0=f(x_0, y_0)$ и найдите расстояние от начала координат до этой плоскости.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = x^2 + 2xy - 10$; D: $y = x^2 - 4$, $y = 0$; уравнение связи: $y - x^2 + 4 = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Вариант 11

Задание 1. Дана функция $z = f(x, y)$ и две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ из области определения функции: $z = \arcsin 2x + \arccos(y - x)$; $M_0(1;\ 0{,}5)$, $M_1(0{,}1;\ 0{,}49)$.

а) найдите область определения z, изобразите ее на плоскости и вычислите ее площадь;

б) найдите дифференциал функции z в точке M_0 и вычислите приближенное значение $z(M_1)$ с помощью дифференциала;

в) найдите вектор $\overrightarrow{grad}z(M_0)$ и вычислите косинусы углов, которые образует этот вектор с осями координат;

г) найдите производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

д) составьте уравнение касательной плоскости к поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$ и найдите расстояние от начала координат до этой плоскости.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = 4 - 2x^2 - y^2$; D: $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = 0$; уравнение связи: $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Вариант 12

Задание 1. Дана функция $z = f(x, y)$ и две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ из области определения функции: $z = \dfrac{2x}{\sqrt{4x - x^2 - y^2}}$; $M_0(2;\ 0)$, $M_1(2{,}1;\ 0{,}05)$.

а) найдите область определения z, изобразите ее на плоскости и вычислите ее площадь;

б) найдите дифференциал функции z в точке M_0 и вычислите приближенное значение $z(M_1)$ с помощью дифференциала;

в) найдите вектор $\overrightarrow{grad}z(M_0)$ и вычислите косинусы углов, которые образует этот вектор с осями координат;

г) найдите производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

д) составьте уравнение касательной плоскости к поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, и найдите расстояние от начала координат до этой плоскости.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$; D: $y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}$, $y = 0$; уравнение связи: $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Вариант 13

Задание 1. Дана функция $z = f(x, y)$ и две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ из области определения функции: $z = y + \log_3(6y - x^2 - y^2)$; $M_0(0; 3)$, $M_1(0{,}2; 2{,}92)$.

а) найдите область определения z, изобразите ее на плоскости и вычислите ее площадь;

б) найдите дифференциал функции z в точке M_0 и вычислите приближенное значение $z(M_1)$ с помощью дифференциала;

в) найдите вектор $\overrightarrow{grad}z(M_0)$ и вычислите косинусы углов, которые образует этот вектор с осями координат;

г) найдите производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

д) составьте уравнение касательной плоскости к поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$ и найдите расстояние от начала координат до этой плоскости.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = x^2 + xy - 2$; D: $y = 4x^2 - 4$, $y = 0$; уравнение связи: $4x^2 - y - 4 = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Вариант 14

Задание 1. Дана функция $z = f(x, y)$ и две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ из области определения функции: $z = \sqrt{25 - x^2} + 2\sqrt{4 - 3y - y^2}$; $M_0(3;\ 0)$, $M_1(2{,}93;\ -0{,}9)$.

а) найдите область определения z, изобразите ее на плоскости и вычислите ее площадь;

б) найдите дифференциал функции z в точке M_0 и вычислите приближенное значение $z(M_1)$ с помощью дифференциала;

в) найдите вектор $\overrightarrow{grad}z(M_0)$ и вычислите косинусы углов, которые образует этот вектор с осями координат;

г) найдите производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

д) составьте уравнение касательной плоскости к поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, и найдите расстояние от начала координат до этой плоскости.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = \frac{x^2}{2} - xy$; D: $y = 2x^2$, $y = 8$; уравнение связи: $y - 2x^2 = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Вариант 15

Задание 1. Дана функция $z = f(x, y)$ и две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ из области определения функции: $z = \dfrac{3}{\sqrt{10x - x^2 - y^2}}$; $M_0(1; 0)$, $M_1(1{,}05; 0{,}25)$.

а) найдите область определения z, изобразите ее на плоскости и вычислите ее площадь;

б) найдите дифференциал функции z в точке M_0 и вычислите приближенное значение $z(M_1)$ с помощью дифференциала;

в) найдите вектор $\overrightarrow{grad}z(M_0)$ и вычислите косинусы углов, которые образует этот вектор с осями координат;

г) найдите производную функции z в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{grad}z(M_0)$;

д) составьте уравнение касательной плоскости к поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, и найдите расстояние от начала координат до этой плоскости.

Задание 2. Даны функция $z = f(x, y)$; область D, ограниченная указанными линиями; уравнение связи $F(x, y) = 0$: $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$; D: $x + y = 6$, $x = 0$, $y = 0$; уравнение связи: $x + y - 6 = 0$. Найдите:

а) экстремумы функции $z = f(x, y)$;

б) условные экстремумы этой же функции при наличии уравнения связи $F(x, y) = 0$;

в) наибольшее и наименьшее значение этой функции в ограниченной замкнутой области D.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $u=\dfrac{\ln x\cdot\ln y}{\sqrt{1-2x-3y}}$. Является ли полученное множество ограниченным; замкнутым?

2. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{1-\sqrt[3]{1+xy}}$.

3. Вычислить $\dfrac{du}{dt}(t_0)$, если $u = y^x$, $x = \ln(t - 1)$, $y = e^{t/2}$, $t_0 = 2$.

4. Вычислить $dz(M_0)$, если $M_0(-1;\ 0;\ 1)$, а функция $z = z(x,\ y)$ задана неявно уравнением: $3x - 2y + z = xz + 5$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}$, если $f=\dfrac{x^4+8xy^3}{x+2y}$.

6. Разложить функцию $u(x,y)=\int\limits_1^{2xy} e^{-t^2}dt$ по формуле Тейлора 2-го порядка в точке $M_0(x_0;\ y_0)$.

7. Написать уравнения касательных плоскостей к поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$ в точках ее пересечения с прямой $x = 1$, $y = 2$.

8. Найти производную функции $f=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, где $M_0(1;\ 1;\ 1)$, $M_1(1;\ 5;\ 4)$.

9. Найти условные экстремумы функции $u=1 - 4x - 8y$, если $x^2 - 8y^2 = 8$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ на множестве $0\le x\le 2$, $|y|\le 1$.

Вариант 2

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $u=\sqrt{3-2|x|-|y|}$. Является ли полученное множество ограниченным; замкнутым?

2. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{3x+y}$.

3. Вычислить $\dfrac{du}{dt}(t_0)$, если $u = x^2e^{-y}$, $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$, $t_0 = \pi/2$.

4. Вычислить $dz(M_0)$, если $M_0(1;\ 1;\ 0)$, а функция $z = z(x,\ y)$ задана неявно уравнением: $e^z + x^2 + 2y^3 + z = 4$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, если $f = \ln(2x + 3y)$.

6. Разложить функцию $u(x, y) = \int\limits_2^{4x+y/2} \dfrac{\sin t}{t} dt$ по формуле Тейлора 2-го порядка в точке $M_0(x_0;\ y_0)$.

7. На поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости xOy.

8. Найти производную функции $f = 3x^4 + y^3 + xy$ в точке $M_0(1;\ 2)$ по направлению луча, образующего угол 135° с осью Ox.

9. Найти условные экстремумы функции $u = x^2 + xy + y^2$, если $x^2 + y^2 = 1$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = x + |x - y|$ на множестве $|x|\le 1$, $|y|\le 2$.

Вариант 3

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $u = \dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$. Является ли полученное множество ограниченным; замкнутым?

2. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2(x^2+y^2)}{1-\cos^2(x^2+y^2)}$.

3. Вычислить $\dfrac{du}{dt}(t_0)$, если $u = e^{y-2x-1}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t_0 = \pi/2$.

4. Вычислить $dz(M_0)$, если $M_0(0;\ 1;\ -1)$, а функция $z = z(x,\ y)$ задана неявно уравнением: $\sin(xy)=z^2-1$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, если $f = \sin(x + \cos y)$.

6. Разложить функцию $u(x, y) = \int\limits_{3y-x/4}^{5} \frac{\cos t}{t} dt$ по формуле Тейлора 2-го порядка в точке $M_0(x_0; y_0)$.

7. Для поверхности $x^2 - z^2 - 2x + 6y - 4 = 0$ найти уравнение нормали, параллельной прямой $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 3x - 5y + 3z + 9 = 0. \end{cases}$

8. Найти производную функции $f = x^2 - 3yz + 4$ в точке $M_0(1; 2; -1)$ по направлению луча, образующего одинаковые углы со всеми координатными осями.

9. Найти условные экстремумы функции $u = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$, если $x + y + z = 13$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = x^2 - xy + y^2$ на множестве $|x| + |y| \leq 1$.

Вариант 4

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $u = \sqrt{y \sin x}$. Является ли полученное множество ограниченным; замкнутым?

2. Найти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2x + y}{7x - 5y}$.

3. Вычислить $\frac{du}{dt}(t_0)$, если $u = \arcsin(x/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

4. Вычислить $dz(M_0)$, если $M_0(1; 1; 1)$, а функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением: $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2$.

5. Найти $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, если $f = \cos(e^{2y} - 2x)$.

6. Разложить функцию $u(x, y) = \int\limits_{0}^{4x+5y} \cos(2t^2) dt$ по формуле Тейлора 2-го порядка в точке $M_0(x_0; y_0)$.

7. На поверхности $x^2 + 5y^2 - z^2 - 4xz + 6x - 20y - 2z - 1 = 0$ найти точки, в которых нормаль к поверхности перпендикулярна плоскости $y = 0$.

8. Найти производную функции $f = \ln(e^x + e^y + e^z)$ в точке $M_0(0; 0; 0)$ по направлению луча, образующего с осями координат Ox, Oy, Oz углы, соответственно равные $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/3$.

9. Найти условные экстремумы функции $u=\sin x\sin y\sin z$, если $x + y + z =$ $= \pi/2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = (x + y)e^{xy}$ на множестве $-2\leq x + y\leq 1$.

Вариант 5

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $u = \ln(x^2 + 4y^2 - 2x - 3)$. Является ли полученное множество ограниченным; замкнутым?

2. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\sqrt[3]{\sin^4 x+\cos^4 x}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3. Вычислить $\dfrac{du}{dt}(t_0)$, если $u = \arccos(2x/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

4. Вычислить $dz(M_0)$, если $M_0(2;\ 1;\ 2)$, а функция $z = z(x,\ y)$ задана неявно уравнением: $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$, если $f = \sqrt{xy^3z^5}$.

6. Разложить функцию $u(x,\ y) = \displaystyle\int_{2x-3y}^{10} \sin\left(\frac{t^2}{2}\right)dt$ по формуле Тейлора 2-го порядка в точке $M_0(x_0;\ y_0)$.

7. В каких точках эллипсоида $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{15}+\dfrac{z^2}{14}=1$ нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

8. Найти производную функции $f = \operatorname{tg}(xz)$ в точке $M_0(\pi/4;\ \pi/4;\ 1)$ по направлению градиента функции $g = \sin(yz)$ в точке M_0.

9. Найти расстояние между кривой $y = x^2$ и прямой $x - y - 5 = 0$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = x + 3y$ на множестве $x + y\leq 6$, $x + 4y\geq 4$, $y\leq 2$.

Вариант 6

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $u=\dfrac{5}{\sqrt{2x+1}}+\sqrt{-(x-y)^2}$. Является ли полученное множество ограниченным; замкнутым?

2. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)$.

3. Вычислить $\frac{du}{dt}(t_0)$, если $u=\frac{x^2}{y+1}$, $x = 1 - 2t$, $y = \mathrm{arctg}t$, $t_0 = 0$.

4. Вычислить $dz(M_0)$, если $M_0(0;\ \pi/2;\ \pi)$, а функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением: $x\cos y + y\cos z + z\cos x = \pi/2$.

5. Найти $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$, если $f = x^3\sin y + y^3\sin z + z^3\sin x$.

6. Разложить функцию $u(x,y)=\int\limits_{x^2-3y^2}^{e}\frac{dt}{\ln t}$ по формуле Тейлора 2-го порядка в точке $M_0(x_0;\ y_0)$.

7. Написать уравнения тех касательных плоскостей к поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, которые параллельны плоскости $x - y + 2z = 0$.

8. Найти производную функции $f = \mathrm{arctg}(y/x)$ в точке $M_0\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ по направлению внешней нормали к окружности $x^2 + y^2 = 2x$.

9. Найти точку, лежащую на плоскости $x + y - 2z = 0$, для которой сумма квадратов расстояний до плоскостей $x + 3z - 6=0$ и $y + 3z = 2$ была бы наименьшей.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = 3 + 2xy$ на множестве $x^2 + y^2\le 1$.

Вариант 7

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $u=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{x+y-3}+\sqrt{42-6x-7y}$. Является ли полученное множество ограниченным; замкнутым?

2. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos(x^2+y^2)}}{\mathrm{tg}^2(x^2+y^2)}$.

3. Вычислить $\frac{du}{dt}(t_0)$, если $u = x/y - y/x$, $x = \sin 2t$, $y = \mathrm{tg}^2 t$, $t_0 = \pi/4$.

4. Вычислить $dz(M_0)$, если $M_0(2;\ -1;\ -1)$, а функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением: $x + y + z + 2 = xyz$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, если $f = 2^{xyz}$.

6. Разложить функцию $u(x, y) = \int\limits_{x-y}^{12} \dfrac{\arcsin t}{t} dt$ по формуле Тейлора 2-го порядка в точке $M_0(x_0; y_0)$.

7. Написать для поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ уравнение касательной плоскости, перпендикулярной данной прямой $\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 2x - 2y - z = 4. \end{cases}$

8. Найти наибольшее значение $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}$ в точке $M_0(\pi/4;\ \pi/3;\ \pi/2)$, если $f = \mathrm{tg}x - x + 3\sin y - \sin^3 y + 2z + \mathrm{ctg}z$.

9. Найти расстояние между кривой $x^2 - y^2 = 3$ и прямой $y = 2x$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = x^2 - y^2$ на множестве $x^2 + y^2 \leq 2x$.

Вариант 8

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $u = 3\arcsin x + \sqrt{y}\arccos\dfrac{2}{y}$. Является ли полученное множество ограниченным; замкнутым?

2. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\cos\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

3. Вычислить $\dfrac{du}{dt}(t_0)$, если $u = \arcsin(x^2/y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$.

4. Вычислить $dz(M_0)$, если $M_0(2;\ 1;\ 0)$, а функция $z = z(x,\ y)$ задана неявно уравнением: $e^{z} - xyz - x + 1 = 0$.

5. Найти $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, если $f = \dfrac{27x^3 y - y^4}{3x - y}$.

6. Разложить функцию $u(x, y) = \int\limits_{\pi}^{2x-y} \dfrac{\cos 2t}{t^2} dt$ по формуле Тейлора 2-го порядка в точке $M_0(x_0; y_0)$.

7. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2 - y^2 = 3z$ в точке $M_0(0; 0; 1)$, параллельной прямой $x = 2y = z$.

8. Найти единичный вектор, по направлению которого $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$ в точке $M_0(1;\ 0{,}5;\ 0)$ достигает своего наибольшего значения, если $f = \arcsin xy + \arccos yz$.

9. Найти точку, для которой сумма квадратов расстояний до прямых $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ наименьшая.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u=x^2y$ на множестве $x^2+y^2\leq 1$.

Ответы к контрольной работе № 2

Вариант 1

1. $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ 1 - 2x - 3y > 0. \end{cases}$ См. рисунок 5.

2. –3.

3. 1.

4. $dz = -dx + dy$.

5. –4.

6. $u(x, y) = \int\limits_1^{2x_0y_0} e^{-t^2}dt + 2e^{-4x_0^2y_0^2}\left(y_0dx + x_0dy - 8x_0y_0^3dx^2 + 2(1-8x_0^2y_0^2)dxdy - 8x_0^3y_0dy^2\right) + R_2.$

7. $x - 6y + 9z = 16$; $5x + 3y + 9z = -16$.

8. 1/5.

9. $u_{\min} = u(-4; 1) = 9$, $u_{\max} = u(4; -1) = -7$.

10. $m = -7$, $M = 9 + 4\sqrt{2}$.

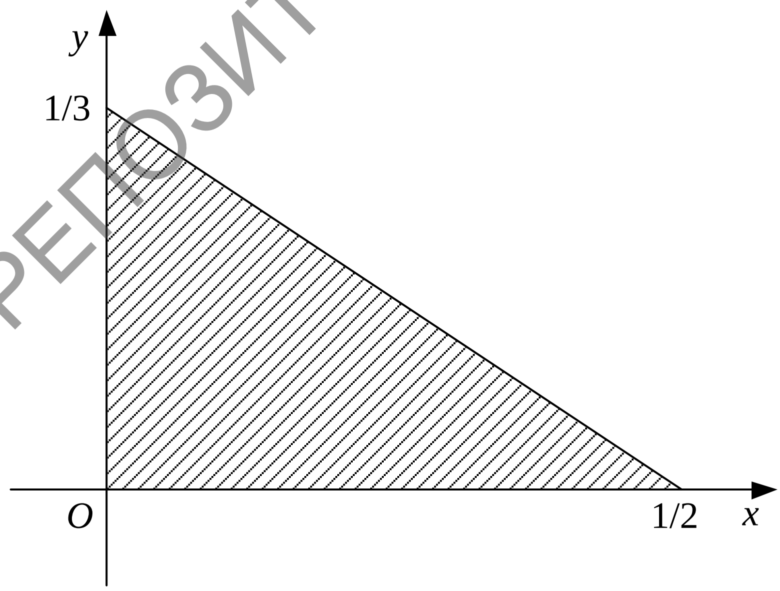

Рисунок 5

Вариант 2

1. $2|x| + |y| \le 3$. См. рисунок 6.

2. Не существует.

3. 0.

4. $dz = -dx - 3dy$.

5. $24(2x + 3y)^{-3}$.

6. $$u(x,\ y) = \int_2^{4x_0+0,5y_0} \frac{\sin t}{t}dt + \frac{\sin(4x_0 + 0,5y_0)}{4x_0 + 0,5y_0}(4dx + 0,5dy) +$$

$$+\frac{(4x_0 + 0,5y_0)\cos(4x_0 + 0,5y_0) - \sin(4x_0 + 0,5y_0)}{(4x_0 + 0,5y_0)^2} \cdot \left(8dx^2 + 2dxdy + \frac{dy^2}{8}\right) + R_2.$$

7. $M_1(0;\ 3;\ -7)$, $M_2(0;\ 3;\ 3)$.

8. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

9. $u_{\min} = u\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}};\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}, \quad u_{\max} = u\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}};\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{2}$.

10. $m = -1$, $M = 4$.

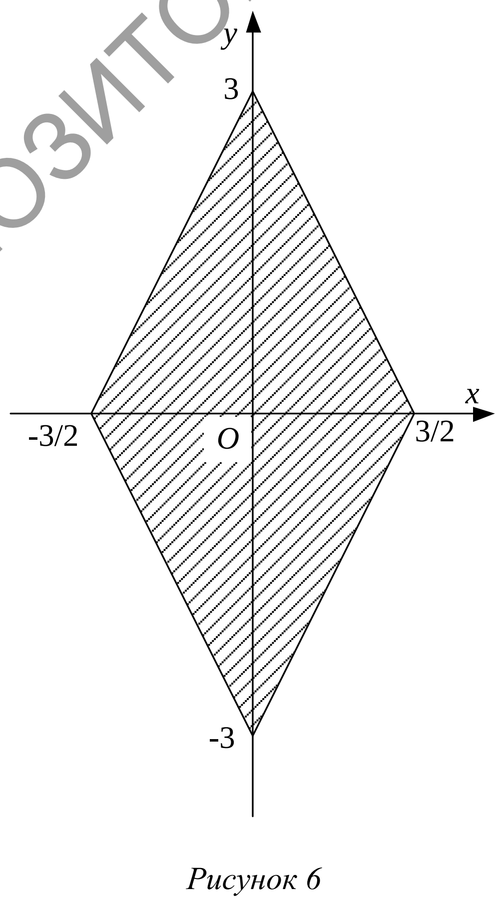

Рисунок 6

Вариант 3

1. $y > \sqrt{x}$. См. рисунок 7.

2. 0.

3. 2.

4. $dz = -\dfrac{dx}{2}$.

5. $\sin y \cdot \cos(x + \cos y)$.

6.
$$u(x,\, y) = \int\limits_{3y_0 - \frac{x_0}{4}}^{5} \frac{\cos t}{t}\,dt + \frac{\cos\left(3y_0 - \frac{x_0}{4}\right)}{3y_0 - \frac{x_0}{4}}\left(\frac{dx}{4} - 3dy\right) +$$
$$+ \frac{1}{2(12y_0 - x_0)^2}\left(\left(\frac{1}{4}(12y_0 - x_0)\sin\left(3y_0 - \frac{x_0}{4}\right) + \cos\left(3y_0 - \frac{x_0}{4}\right)\right)dx^2 +\right.$$
$$+\left(6(12y_0 - x_0)\sin\left(3y_0 - \frac{x_0}{4}\right) - 24\cos\left(3y_0 - \frac{x_0}{4}\right)\right)dxdy +$$
$$\left.+144\left(\left(3y_0 - \frac{x_0}{4}\right)\sin\left(3y_0 - \frac{x_0}{4}\right) + 3\cos\left(3y_0 - \frac{x_0}{4}\right)\right)dy^2\right) + R_2 .$$

7. $x - 2 = \dfrac{y - 10/3}{3} = \dfrac{z + 4}{4}$.

8. $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

9. $u_{\min} = u(6;\, 4;\, 3) = 156$.

10. $m = 0$, $M = 1$.

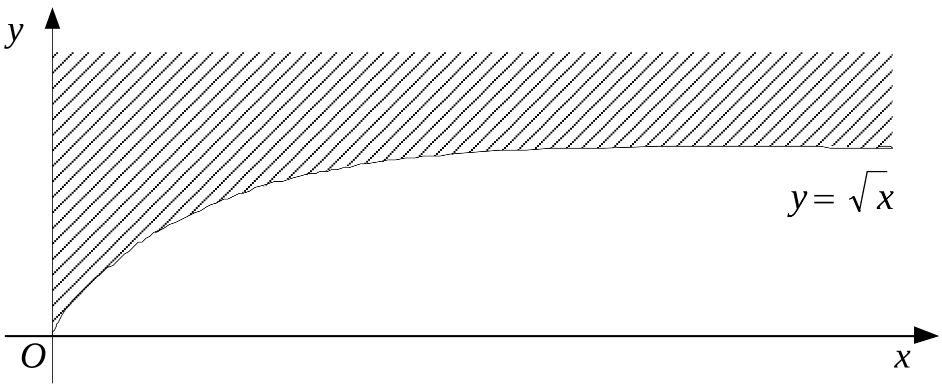

Рисунок 7

Вариант 4

1. $y\sin x \geq 0$. См. рисунок 8.

2. Не существует.

3. 1.

4. $dz = -0{,}4dx + 0{,}8dy$.

5. $8e^{2y}\sin(e^{2y} - 2x)$.

6. $$u(x,\, y) = \int_0^{4x_0+5y_0} \cos(2t^2)dt + \cos 2(4x_0 + 5y_0)^2(4dx + 5dy) -$$

$$-4(4x_0 + 5y_0)\sin 2(4x_0 + 5y_0)^2\left(8dx^2 + 20dxdy + \frac{25}{2}dy^2\right) + R_2.$$

7. $(-1;\ 2\pm\sqrt{5};\ 1)$.

8. $\dfrac{2+\sqrt{2}}{6}$.

9. $u_{\max} = u(\pi/6;\ \pi/6;\ \pi/6) = 1/8$.

10. $m = -2e,\ M = \sqrt[4]{e}$.

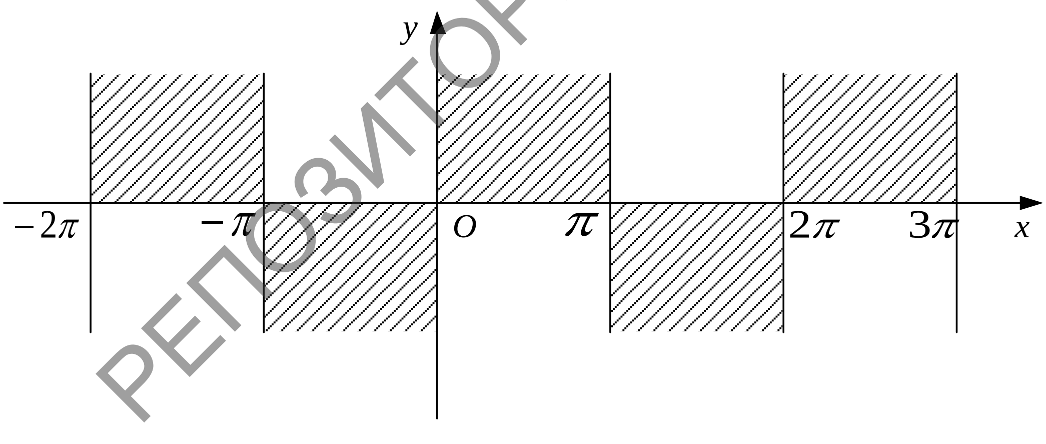

Рисунок 8

Вариант 5

1. $\dfrac{(x-1)^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{1^2} > 1$. См. рисунок 9.

2. 0.

3. –2.

4. $dz = 7dx - 16dy$.

5. $\dfrac{15}{8}\sqrt{\dfrac{yz^3}{x}}$.

6. $u(x,\,y) = \int\limits_{2x_0-3y_0}^{10} \sin\left(\dfrac{t^2}{2}\right)dt - \sin\dfrac{(2x_0-3y_0)^2}{2}(2dx-3dy) -$

$$-(2x_0-3y_0)\cos\frac{(2x_0-3y_0)^2}{2}\left(2dx^2-6dxdy+\frac{9}{2}dy^2\right)+R_2.$$

7. (20/7; 15/7; 2), (–20/7; –15/7; –2).

8. $\dfrac{\pi^2}{2\sqrt{\pi^2+16}}$.

9. $\dfrac{19\sqrt{2}}{8}$.

10. $m = 2$, $M = 10$.

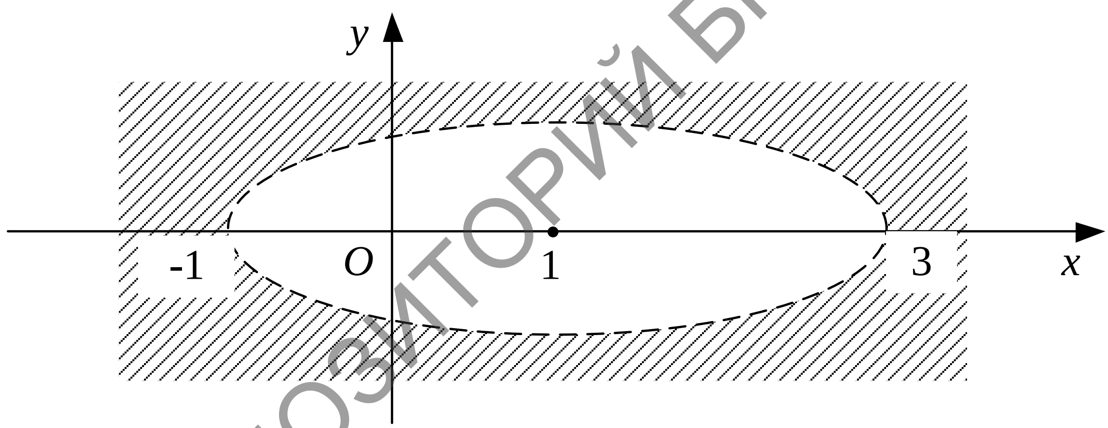

Рисунок 9

Вариант 6

1. $\begin{cases} 2x+1>0, \\ x=y. \end{cases}$ См. рисунок 10.

2. 0.

3. –5.

4. $dz = -dy$.

5. 0.

6. $u(x, y) = \int\limits_{x_0^2-3y_0^2}^{e} \frac{dt}{\ln t} + \frac{-2x_0dx + 6y_0dy}{\ln(x_0^2 - 3y_0^2)} + \frac{\left(2x_0^2 - \left(x_0^2 - 3y_0^2\right)\ln\left(x_0^2 - 3y_0^2\right)\right)dx^2}{\left(x_0^2 - 3y_0^2\right)\ln^2\left(x_0^2 - 3y_0^2\right)} -$

$$- \frac{12x_0y_0\left(x_0^2 - 3y_0^2\right)dxdy + \left(18y_0^2 + 3\left(x_0^2 - 3y_0^2\right)\ln\left(x_0^2 - 3y_0^2\right)\right)dy^2}{\left(x_0^2 - 3y_0^2\right)\ln^2\left(x_0^2 - 3y_0^2\right)} + R_2 .$$

7. $2x - 2y + 4z = \pm\sqrt{22}$.

8. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. (3; –1; 1).

10. $m = 2$, $M = 4$.

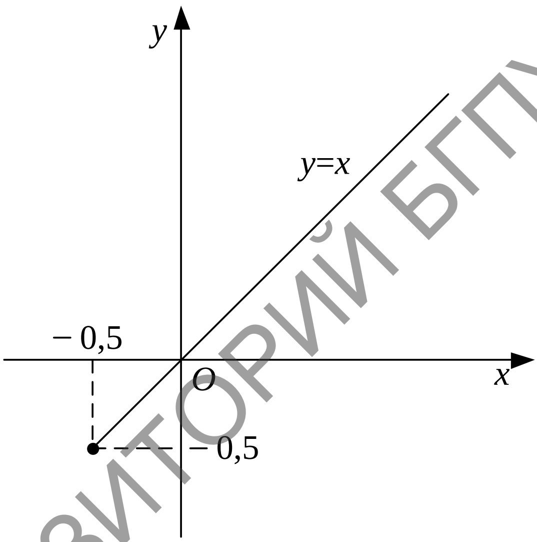

Рисунок 10

Вариант 7

1. $\begin{cases} x \geq 1, \\ y \geq 1, \\ x + y \geq 3, \\ 6x + 7y \leq 42. \end{cases}$ См. рисунок 11.

2. $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

3. –8.

4. $dz = -dy$.

5. $2^{xyz}\ln 2(xyz\ln 2(3 + xyz\ln 2) + 1)$.

6. $u(x,\ y) = \int\limits_{x_0-y_0}^{12} \dfrac{\arcsin t}{t}dt - \dfrac{\arcsin(x_0 - y_0)}{x_0 - y_0}(dx - dy) +$

$$+\frac{\arcsin(x_0 - y_0)\sqrt{1-(x_0 - y_0)^2} - x_0 + y_0}{2(x_0 - y_0)^2\sqrt{1-(x_0 - y_0)^2}}\left(dx^2 - 2dxdy + dy^2\right) + R_2.$$

7. $x + y = 1 \pm \sqrt{2}$.

8. $\dfrac{\sqrt{137}}{8}$.

9. $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

10. $m = -1/2$, $M = 4$.

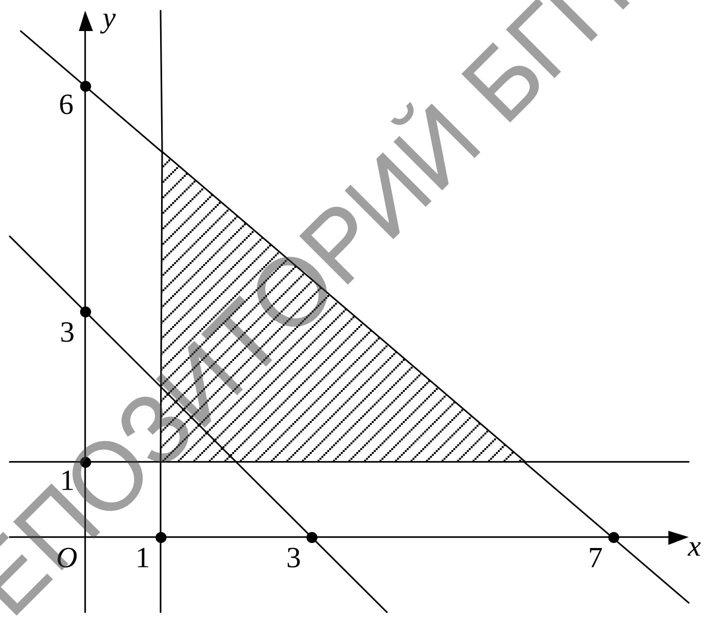

Рисунок 11

Вариант 8

1. $\begin{cases} |x| \le 1, \\ y \ge 0, \\ \left|\dfrac{2}{y}\right| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 1, \\ y \ge 2. \end{cases}$ См. рисунок 12.

2. $\sqrt{e}$.

3. 0.

4. $dz = -dx$.

5. 6.

6. $u(x,\, y) = \int\limits_{\pi}^{2x_0 - y_0} \frac{\cos 2t}{t^2} dt + \frac{\cos(4x_0 - 2y_0)}{(2x_0 - y_0)^2}(2dx - dy) -$

$$-\frac{2(2x_0 - y_0)\sin(4x_0 - 2y_0) + 2\cos(4x_0 - 2y_0)}{(2x_0 - y_0)^3}(2dx^2 - 2dxdy + dy^2) + R_2.$$

7. $4x - 2y - 3z = 3$.

8. $\frac{1}{\sqrt{23}}\left(2\vec{i} + 4\vec{j} - \sqrt{3}\vec{k}\right)$.

9. (1,6; 3,2).

10. $m = -\frac{2\sqrt{3}}{9}, \quad M = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

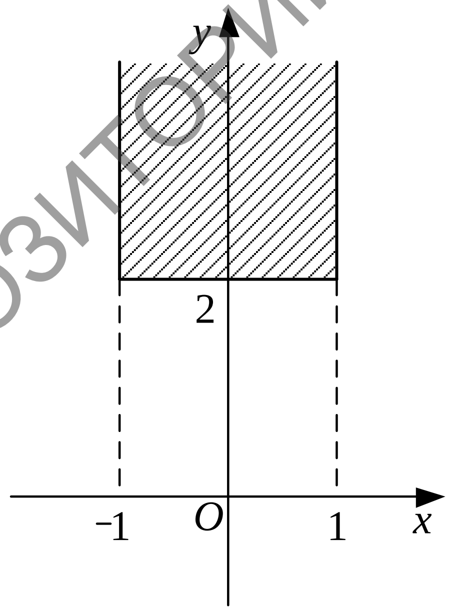

Рисунок 12

Литература

1. Черняк, А. А. Высшая математика для инженерно-экономических специальностей вузов + CD: Учебно-методический комплекс / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк. – Минск : Харвест-Альянс, 2009. – 700 с.
2. Типовые расчеты по высшей математике : в 3 ч. / Ж. А. Черняк [и др.]. Часть 3. – Минск : БГУИР, 2015. – 101 с.
3. Практикум по математическому анализу, алгебре и геометрии : в 4 ч. / А. А. Черняк [и др.]. Часть 1. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – Минск : БГПУ, 2013.
4. Практикум по математическому анализу, алгебре и геометрии : в 4 ч. / А. А. Черняк [и др.]. Часть 2. Определенный и неопределенный интегралы. – Минск : БГПУ, 2017.
5. Комплекс заданий по математике для студентов заочной формы обучения / Ж. А. Черняк [и др.]. Часть 1. – Минск : БГУИР, 2016. – 150 с.
6. Черняк, Ж. А. Математика для экономистов на базе Mathcad / Ж. А. Черняк, А. А. Черняк, С. И. Василец. – БХВ-Петербург, 2016. – 495 с.

Содержание

Учебное издание

ЧЕРНЯК Аркадий Александрович
ВАСИЛЕЦ Сергей Иванович
БОГДАНОВИЧ Сергей Адамович и др.

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ, АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

В четырех частях

Часть 3
Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Учебное электронное издание локального распространения

Корректор *О. В. Юхновец*
Компьютерная верстка *О. С. Яворской*
Дизайн обложки *Е. С. Выдрицкой*

Гарнитура *Times*. 793 Kb. Тираж 5 электрон. экз. Заказ 479.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка».

Свидетельство о государственной регистрации издателя печатных изданий № 1/236 от 24.03.14.
ЛП № 02330/448 от 18.12.13. Ул. Советская, 18, 220030, Минск.