УДК 372.851

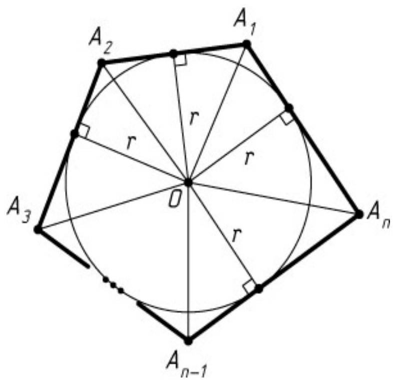
ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ПРИЕМОВ ПРИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ И МНОГОГРАННИКИ

М. Аннаклычева,
БГПУ (Минск)

Науч. рук. – к. п. н., доцент
О. Н. Пирютко

Свойство 1. Даны многоугольник и вписанная в него окружность. Доказать формулу нахождения площади: $S = \frac{1}{2} P \cdot r$, где S – площадь многоугольника, P – периметр многоугольника, r – радиус вписанной окружности.

Доказательство. Соединив центр окружности и вершины многоугольника, разобьем многоугольник на треугольники: AOA_1, A_1OA_2,…,A_nOA.



Вычислим площади каждого из этих треугольников:

$$S_{\Delta AOA_1} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot AA_1$$

$$S_{\Delta A_1 O A_2} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot A_1 A_2$$

…

$$S_{\Delta A_n O A} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot A_n A$$

Сложив левые и правые части соответственно, получим:

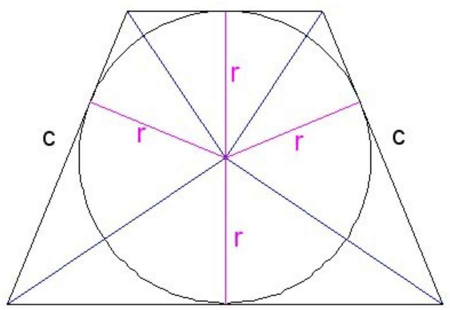
$$S_{\Delta AOA_1} + S_{\Delta A_1 A_2} + \dots + S_{\Delta A_n A} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (AA_1 + A_1A_2 + \dots + A_nA),$$

где левая часть равенства есть площадь данного многоугольника, а $AA_1 + A_1A_2 + \dots + A_nA$ есть его периметр.

Откуда:

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot P \qquad (*)$$

Задача 1. Дана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 30см^2. Радиус вписанной окружности равен 3см. Найти боковые стороны трапеции.



Дано: ABCD–трапеция;
AB = CD;
S = 30см^2;
r = 3см (впис. окр-ти).
Найти: AB = CD = ?

Решение.

Поскольку ABCD – четырехугольник, описанный около окружности, то AB + CD = BC + AD. Отсюда следует, что P = 4*AB, где P – периметр трапеции.

Если подставить все известные величины в (*), то получим:

$$30 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot AB$$

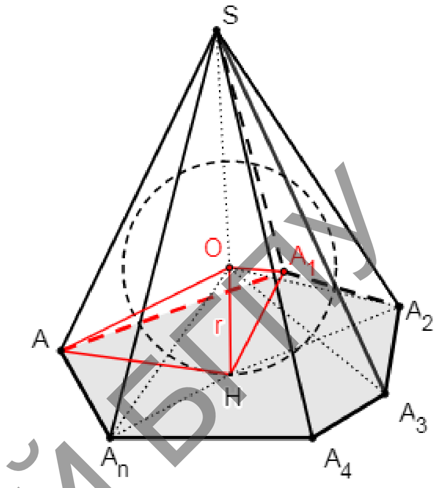
откуда находим

$$AB = \frac{30 \cdot 2}{3 \cdot 4} = 5\text{см}$$

Ответ: AB = CD = 5см.

Свойство 2. Даны произвольный многогранник и вписанная в нее сфера. Доказать формулу: $V_{\text{мног.}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{полн.пов.}} \cdot r$, где $V_{\text{мног.}}$ – объем многогранника, $S_{\text{полн.пов.}}$ – площадь полной поверхности многогранника, r – радиус вписанной сферы.

Доказательство. Для того, чтобы найти объем многогранника, разобьем ее на пирамиды, для каждой из которых высотой служит радиус вписанной сферы.



Пусть точка O – центр данной сферы. Соединим все вершины данного многогранника с O, и проведем радиусы ко всем точкам касания.

Для каждой полученной пирамиды находим объемы:

$$V_{AA_1OH} = \frac{1}{3} S_{\Delta AA_1H} \cdot r$$

$$V_{A_1A_2OH} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1A_2H} \cdot r$$

$$V_{AA_1SO} = \frac{1}{3} S_{\Delta AA_1S} \cdot r$$

…

$$V_{AA_nSO} = \frac{1}{3} S_{\Delta AA_nS} \cdot r$$

Сложим левые и правые части равенств соответственно. Тогда получим:

$$V_{AA_1SO} + V_{A_1A_2OH} + V_{AA_1SO} + \dots + V_{AA_nSO} = \frac{1}{3} \cdot r (S_{\Delta AA_1H} + S_{\Delta A_1A_2H} + S_{\Delta AA_1S} + \dots + S_{\Delta AA_1S})$$

где левая часть равенства есть объем данного многогранника, а выражение в скобках, стоящее в правой части равенства, – площадь полной поверхности многогранника. Другими словами,

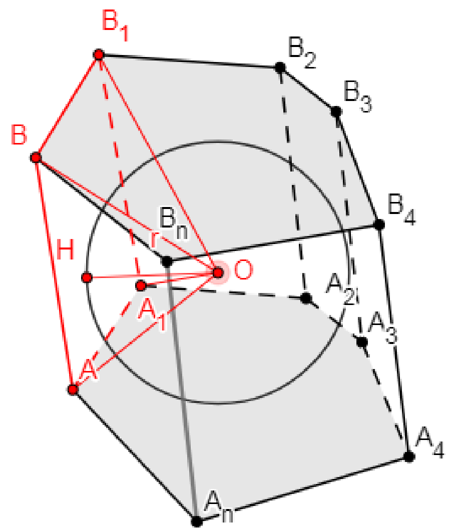
$$V_{\text{мног.}} = \frac{1}{3} S_{\text{полн.пов.}} \cdot r$$

Задача 2. Определить полную поверхность призмы, описанной около сферы, если площадь ее основания равна S.

Выше доказанная формула была для пирамиды. Но и призму можно разбить на пирамиды и по доказанной формуле вычислить ее объем.

Пусть нам дана произвольная призма и сфера вписанная в нее с центрам O.

Тогда ее объем по доказанной формуле будет иметь вид:



$$V_{\text{пр.}} = \frac{1}{3} \cdot r \left(\left(S_{\Delta AA_1B_1B} + S_{\Delta B_1A_1B_2A_2} + \dots + S_{\Delta A_nB_nAB} \right) + 2S_{\text{осн.}} \right)$$

Т.е.

$$V_{\text{пр.}} = \frac{1}{3} \cdot r (S_{\text{бок.пов.}} + 2S_{\text{осн.}})$$

С другой стороны,

$$V_{\text{пр.}} = S_{\text{осн.}} \cdot 2r$$

$$\frac{1}{3} \cdot r (S_{\text{бок.пов.}} + 2S_{\text{осн.}}) = S_{\text{осн.}} \cdot 2r$$

отсюда выражаем $S_{\text{бок.пов.}}$

$$S_{\text{бок.пов.}} = 4S_{\text{осн.}}$$

$$S_{\text{полн.пов.}} = 4S_{\text{осн.}} + 2S_{\text{осн.}} = 6S_{\text{осн.}}$$