Отсюда в силу формулы Тейлора — Пеано для степенного разложения получаем

$$\frac{1}{x_{n+1}^2}=\frac{1}{x_n^2}\left(1+\frac{2}{3}x_n^2+o(x_n^2)\right)=\frac{1}{x_n^2}+\frac{2}{3}+\alpha_n, \tag{5}$$

где $\alpha_n = o(1)$ — некоторая бесконечно малая последовательность. Полагая в (5) $n = 0,1,2,\ldots$ и суммируя, находим $\dfrac{1}{x_n^2}=\dfrac{1}{x_0^2}+\dfrac{2}{3}n+\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}$, т. е.

$$\frac{1}{nx_n^2}=\frac{1}{nx_0^2}+\frac{2}{3}+\beta_n, \tag{6}$$

где $\beta_n=(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})/n,\ n\in\mathbb{N}$.

Известно, что если $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Поэтому из(6) следует $1/(nx_n^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2/3$, т. е. $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{3/(2n)}$.

В заключение укажем некоторые базовые неравенства, получаемые из соответствующих разложений по Тейлору элементарных функций. Использование этих неравенств упрощает решение ряда задач, аналогичных рассмотренным выше. Итак, для $\forall n\in\mathbb{N}_0$ имеем:

1) $\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{(-1)x^{2k+1}}{(2k+1)!}\leqslant\sin x\leqslant\sum\limits_{k=0}^{2n}\dfrac{(-1)^kx^{2k+1}}{(2k+1)!},\ 0\leqslant x\leqslant\pi,$

2) $\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!}\leqslant\cos x\leqslant\sum\limits_{k=0}^{2n}\dfrac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!},\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},$

3) $e^x\geqslant\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!},\ x\in[0;+\infty[,$

4) $\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{(-1)^kx^k}{k!}\leqslant e^{-x}\leqslant\sum\limits_{k=0}^{2n}\dfrac{(-1)^kx^k}{k!},\ x\in[0;+\infty[,$

5) $\ln(1+x)\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^kx^{k+1}}{k+1},\ x\in]-1;0],$

6) $\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{(-1)^kx^{k+1}}{k+1}\leqslant\ln(1+x)\leqslant\sum\limits_{k=0}^{2n}\dfrac{(-1)^kx^{k+1}}{k+1},\ x\in[0;+\infty[,$

7) $\operatorname{tg}x\geqslant\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{2k+1},\ x\in[0;\pi/2[$, где $a_k=\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}+\sum\limits_{m=1}^{k}\dfrac{(-1)^{m-1}}{(2m)!}a_{k-m},\ k\in\mathbb{N},\ a_0=1,$

8) $\sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dfrac{(-1)^kx^{2k+1}}{2k+1}\leqslant\operatorname{arctg}x\leqslant\sum\limits_{k=0}^{2n}\dfrac{(-1)^kx^{2k+1}}{2k+1},\ x\in[0;+\infty[,$

9) $\arcsin x\geqslant\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2},\ x\in[0;1].$

ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОЕ ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ: ПРОБЛЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ НА РАЗНЫХ СТУПЕНЯХ

Ю.К. Войтова[1], Е.П. Кузнецова[2], Г.Л. Муравьева[2]

[1] Гомельский областной институт развития образования, Гомель, Беларусь
Juliav-a@mail.ru

[2] Белорусский государственный педагогический университет имени М. Танка, Минск, Беларусь
elenapav@tut.by, m.galina62@gmail.com

На разных этапах истории развития школьного математического образования по различным причинам становились актуальными вопросы реализации его прикладной направленности. Сейчас наблюдается всплеск интереса к этой проблематике, что вызвано комплексом причин:

— падение уровня общей математической подготовки абитуриентов;

— низкие баллы ряда стран (и, в частности, России), в международном тестировании PISA, которое, по утверждению организаторов, проверяет не знания по математике или другому предмету, а подготовленность учащихся к жизни;

— заметная утрата интереса школьников к учебе под влиянием интернета и множества других социальных реалий и факторов.

Практико-ориентированное обучение математике должно базироваться на взаимосвязи процессов формирования программных знаний и развития умений, необходимых для решения доступных прикладных задач средствами математики. Ключевыми являются следующие умения: *а*) умение моделировать условие задачи математическими средствами; *б*) умение решать математическую задачу, полученную в результате моделирования; *в*) умение интерпретировать решение в соответствии с условием исходной задачи.

Очевидно, что формирование этих (не простых) ключевых умений на разных ступенях общего среднего образования должно вестись в соответствии с возрастными особенностями психофизического и умственного развития школьников, с учетом их индивидуальных способностей и потребностей, познавательных интересов и склонностей. Проблемы при реализации практико-ориентированного обучения математике на каждой из ступеней школьного образования возникают при отсутствии указанных соответствий.

Например, как показывает практика обучения младших школьников, на I ступени овладение счетом, отработка вычислительных навыков требуют больших усилий и существенно отличаются у разных учащихся объемом тренинга, необходимым для их усвоения. У многих школьников не происходит перехода этих операций на уровень устных вычислений. И, как следствие, решение даже самых простых текстовых задач, тем более быстрое, для таких учащихся затруднительно или просто невозможно. А, согласно новой учебной программе, особая роль в обучении математике отводится «методу учебного моделирования, ... в основе которого лежит умение представлять существенную информацию с помощью моделей разных видов». Новая учебная программа ставит перед учителями задачи по формированию у 6–10-летних школьников умений представлять информацию «в табличной форме и в виде диаграмм», создавать математическую модель «реальных ситуаций ... с помощью визуальных, вербальных и символических средств» [1, с. 50–52].

Стоит обратить внимание специалистов образования, что среди победителей математического тестирования PISA по результатам 2012 года -- представители Востока (Китай, Корея, Япония). Именно в этих странах — культ репродуктивных методик в обучении, в почете устный счет с многозначными числами при соответствующем запрете калькуляторов в школах, в традиции — жесткие требования к результатам обучения. А у нас в традиции последнего времени — массовое незнание таблицы умножения даже среди студентов: Программные требования, в контексте практико-ориентированного обучения математике, например, для 5-го класса звучат так: «решать задачи с практическим и межпредметным содержанием» [2, с. 99, 102]. Однако изучение основных предметов естественнонаучного цикла еще не началось, присутствуют лишь пропедевтические вводные курсы. Поэтому реализация межпредметных связей в рамках интегрированного курса математики 5–6 классов возможна только через задачи с доступным для 10–12-летнего возраста познавательным содержанием, решая которые учащиеся знакомятся с интересной и полезной информацией естественнонаучного характера.

Диапазон доступных практико-ориентированных задач и связанный с ними соответствующий учебный материал для 5–6 классов желательно рассматривать в начале обучения, чтобы затем была возможность использования их прикладного потенциала в течение всего учебного года. Такой подход создает базу для разнообразия учебных практических заданий, формирующих необходимые учебные навыки и умения по основным содержательным разделам курса математики 5–6 классов, например, по такому важному разделу, как арифметические действия над обыкновенными и смешанными дробями, на материале которого впоследствии будет базироваться преобразование рациональных выражений в алгебре.

В 7–9 классах и на III ступени обучения абстрактный характер алгебраического материала требует для формирования прочных навыков преобразований, умения решать уравнения и неравенства, длительного времени и значительных усилий учащихся. Алгебра ценна как своеобразный иностранный язык, который (будучи хорошо освоенным в практике решения, в том числе и типовых упражнений) поможет в дальнейшем при изучении учебных предметов естественнонаучного цикла, а также в создании математических моделей прикладных ситуаций. Для алгебраического материала в большинстве случаев реализация требования показывать примеры его применения в жизни возможна лишь после выработки соответствующих учебных умений и навыков.

Именно на III ступени обучения в естественнонаучных предметах можно продемонстрировать межпредметные связи и прикладную значимость курса алгебры. Однако, в учебных программах по математике 10 класса (как для общеобразовательного, так и для профильного обучения), упоминание о необходимости решения задач прикладного характера можно найти только в разделе «Организация образовательного процесса» [3, с. 75]. Заметим, что у подавляющего большинства учителей математики обычно возникают проблемы с определением тематики и прикладной сферы практико-ориентированных заданий. Ответы на все эти и другие вопросы учителя будут искать, прежде всего, в учебных и учебно-методических пособиях по предмету. Поэтому содержание и структура учебно-методического комплекса (УМК) по математике (алгебре, геометрии), используемого в учебном процессе, и каждого в отдельности учебного пособия, включенного в УМК, должно отвечать требованиям практико-ориентированного обучения. УМК должен обеспечивать основные виды учебно-познавательной деятельности, включая применение теоретических знаний и изученных методов при решении прикладных задач и при выполнении заданий творческого характера. Оценить соответствие УМК требованиям практико-ориентированного обучения можно с помощью следующих показателей [4]:

— полнота отражения содержания обучения, предусмотренного учебной программой;

— полнота отражения требований программы к результатам учебной деятельности учащихся;

— достаточность заданий для формирования представлений об области применения изучаемого теоретического материала;

— обеспеченность условий для формирования навыков моделирования и интерпретации с помощью математических средств наглядности (графические изображения, рисунки и чертежи, схемы, таблицы, уравнения, формулы и т.п.);

— достаточность прикладных задач для демонстрации приложений изучаемого материала с использованием в сюжетах известной и понятной школьникам познавательной информации, разнообразие и равновесие сюжетов и ситуаций в условиях прикладных задач;

— отражение внутрипредметных и межпредметных связей между понятиями, теоретическими фактами, закономерностями;

— наличие нестандартных и интересных по форме выполнения учебных заданий, использование занимательных и познавательных сюжетов, например, направленных на формирование представлений о здоровом образе жизни, о бережном отношении к материальным и энергетическим ресурсам и т. п.

Литература

1. *Учебные программы по учебным предметам для учреждений общего среднего образования с русским языком обучения и воспитания. I класс.* Мн.: НИО, 2015.

2. *Учебные программы по учебным предметам для учреждений общего среднего образования с русским языком обучения и воспитания. V класс.* Мн.: НИО, 2015.

3. *Учебные программы по учебным предметам для учреждений общего среднего образования с русским языком обучения и воспитания. X класс.* Мн.: НИО, 2015.

4. Войтова Ю. К., Кузнецова Е. П. *О проблеме разработки частнопредметных критериев и показателей оценки качества учебно-методических комплексов по математике* // Матэматыка: праблемы выкладання. 2008. № 5. С. 18–27.

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДИКИ ИЗУЧЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СТУДЕНТАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ БГУ

М.А. Глецевич, О.А. Кононова, Н.К. Филиппова, А.П. Шилин

Белорусский государственный университет, Физический факультет, Минск, Беларусь
gletsev@bsu.by

Профессор Ю. С. Богданов был заведующим кафедрой высшей математики и математической физики физического факультета БГУ в 1968–1973 гг., его методические подходы к изучению высшей математики актуальны и востребованы по настоящее время, а его учебные пособия (в том числе, написанные с соавторами) являются одними из основных в учебном процессе.

Сохраняет постоянную актуальность вопрос совершенствования методики преподавания дифференциальных уравнений. В последние годы это связано, в том числе, с невысоким уровнем школьной математической подготовки многих студентов, а также уменьшением количества учебных часов из-за перехода на четырехлетнее обучение по большинству специальностей.

Преподавателями кафедры высшей математики и математической физики БГУ постоянно разрабатываются новые и совершенствуются прежние учебно-методические материалы для успешного изучения дифференциальных уравнений. В докладе об этих разработках будет сказано подробнее, частично они нашли свое отражение в публикациях [1–10].

Литература

1. Кононова О. А. [и др.] *Линейные системы дифференциальных уравнений: учебно-методическое пособие.* Мн.: БГУ, 2012. № 002614122012, Деп. в БГУ 14.12.2012.

2. Кононова О. А. [и др.] *Нормальные системы дифференциальных уравнений: учебно-методические пособие.* Мн.: БГУ, 2012. № 002614122012. Деп. в БГУ 14.12.2012.

3. Кононова О. А. [и др.] *Уравнения с частными производными первого порядка: учебно-методические пособие.* Мн.: БГУ, 2012. № 002714122012. Деп. в БГУ 14.12.2012.

4. Шилин А. П. *Метод неопределенных коэффициентов для линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянным коэффициентом: учебно-методическое пособие.* Мн.: БГУ, 2013. №001729052013. Деп. в БГУ 29.05.2013.

5. Кононова О. А., Филиппова Н. К., Шилин А. П. *Линейные интегральные уравнения: учебно-методическое пособие.* Мн.: БГУ, 2014. № 004029052014. Деп. в БГУ 29.05.2013.

6. Кононова О. А., Ильинкова Н. И., Филиппова Н. К. *Метод Коши для линейного неоднородного уравнения: учебно-методическое пособие.* Мн.: БГУ, 2015. № 002808062015. Деп. в БГУ 08.06.2015.

7. Кононова О. А., Ильинкова Н. И., Филиппова Н. К. *Метод Лагранжа для линейного неоднородного уравнения: учебно-методическое пособие.* Мн.: БГУ, 2015. № 002708062015. Деп. в БГУ 08.06.2015.

8. Шилин А. П., Глецевич М. А. *Задания к контрольным мероприятиям по курсу дифференциальных уравнений для студентов физических специальностей: учебно-методическое пособие.* Мн.: БГУ, 2015. № 003623062015. Деп. в БГУ 23.06.2015.

9. Шилин А. П. *Дифференциальные уравнения. Задачи и примеры.* 2-е изд. М.: Изд-во URSS, 2015. (в печати)

10. Глецевич М. А. [и др.] *Высшая математика. Сборник задач: учебное пособие. В 3 ч. Ч. 3. Дифференциальные уравнения. Функция комплексной переменной. Функциональный анализ*; под ред. Абрашиной-Жадаевой Н. Г., В. Н. Русака. Мн.: БГУ, 2015. (в печати)