ПРАДМОВА

Курс тэорыі функцый рэчаіснай зменнай адыгрывае важную ролю ў сістэме матэматычнай падрыхтоўкі настаўнікаў матэматыкі.

Ён прызначаны, па-першае, узброіць будучых настаўнікаў матэматыкі строгімі абгрунтаваннямі вывучанага імі курса матэматычнага аналізу і, па-другое, паведаміць шэраг звестак, якія датычацца сучасных выяўленняў аб такіх важных для выкладання і вывучэння матэматыкі паняццях, якімі з'яўляюцца мноства, лік, функцыя, ліміт, крывая, інтэграл.

Поруч з гэтым дадзены курс дазволіць пазнаёміць студэнтаў з шэрагам новых для іх паняццяў, вывучэнне якіх неабходна для будучай працы ў якасці настаўніка матэматыкі: элементарныя звесткі з тэорыі мностваў; некаторыя асноўныя звесткі аб больш шырокай, чым інтэграл Рымана, канструкцыі інтэграла.

У сувязі з невялікім аб'ёмам вучэбнага часу, вылучанага на вывучэнне курса, вучэбны дапаможнік змяшчае толькі некаторыя элементы тэорыі функцый рэчаіснай зменнай. Аднак у вучэбным дапаможніку разглядаюцца такія асноўныя паняцці, як мера Лебега, вымерная функцыя, інтэграл Лебега, сумавальная функцыя.

1. МАГУТНАСЦЬ МНОСТВА

1.1. Першапачатковыя звесткі пра мноствы

Паняцце мноства з’яўляецца асноўным першасным паняццем матэматыкі.

Мноства складаецца з элементаў. Калі мноства A складаецца з элементаў a, b, c, то гэты факт сімвалічна запісваюць так:

$$A=\{a, b, c\}.$$

Такі запіс выкарыстоўваецца ў выпадку, калі мноства задаецца пералічэннем усіх сваіх элементаў.

Мноства можна задаць таксама і пры дапамозе ўказання агульнай (характарыстычнай) уласцівасці яго элементаў. Тады яно сімвалічна запісваецца так: у фігурных дужках даецца абазначэнне элемента, затым ідзе вертыкальная рыска, пасля яе запісваюць уласцівасць, якой валодаюць элементы дадзенага мноства і толькі яны.

ПРЫКЛАД 1. Няхай A — мноства рэчаісных лікаў x, для якіх выконваецца няроўнасць $x^2-1<0$. Гэты факт можна запісаць так: $A=\{x \mid x^2-1<0\}$.

Калі x з’яўляецца элементам мноства A, то пішуць, што $x\in A$. Калі x не з’яўляецца элементам мноства A, то ўжываюць запіс $x\notin A$ або $x\,\overline{\in}\,A$.

ПРЫКЛАД 2. Няхай $A=\{1, 2, 3, 9\}$. Тады $2\in A$, $-1\notin A$.

Калі мноства не змяшчае ніводнага элемента, то яго называюць пустым мноствам і абазначаюць $\varnothing$.

ПРЫКЛАД 3. Мноства ўсіх рэчаісных рашэнняў раўнанняў $x^2+5=0$ з’яўляецца пустым.

АЗНАЧЭННЕ 1. Няхай A і B — два мноствы. Калі кожны элемент мноства A належыць мноству B, то гавораць, што A ёсць частка або падмноства мноства B і пішуць $A\subset B$.

ПРЫКЛАД 4. $A=\{1, 5, 7\}$, $B=\{1, 8, 5, 9, 7, 3\}$. $A\subset B$.

АЗНАЧЭННЕ 2. Няхай A і B — два мноствы. Мноствы A і B называюцца роўнымі, калі $A\subset B$ і $B\subset A$, г. зн., што кожны элемент мноства A з’яўляецца элементам мноства B і наадварот, кожны элемент мноства B з’яўляецца элементам мноства A. Пры гэтым запісваюць $A=B$.

ПРЫКЛАД 5. Няхай A — мноства рашэнняў раўнання $x^2-4=0$, B — мноства рашэнняў раўнання $|x|=2$. Зразумела, што $A=B$.

АЗНАЧЭННЕ 3. Няхай A і B — два мноствы. Мноства, якое складаецца з усіх элементаў, якія належаць аднаму з мностваў A або B, называецца аб’яднаннем мностваў A, B і абазначаецца $A\cup B$.

Азначэнне 3 можна запісаць так:

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\vee x\in B\}.$$

ПРЫКЛАД 6. $A=\{1, 6, 8\}$, $B=\{1, 3, 6, 5, 9\}$. $A\cup B=\{1, 3, 5, 6, 8, 9\}$.

АЗНАЧЭННЕ 4. Няхай A і B — два мноствы. Мноства, якое складаецца з усіх элементаў, якія належаць адначасова мноству A і мноству B, называецца перасячэннем мностваў A, B і абазначаецца $A\cap B$.

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \wedge x\in B\}.$$

ПРЫКЛАД 7. $A=\{1, 6, 8\}$, $B=\{1, 3, 6, 5, 9\}$. $A\cap B=\{1, 6\}$.

Аналагічна вызначаюцца і абазначаюцца аб’яднанне і перасячэнне любога ліку мностваў.

АЗНАЧЭННЕ 5. Калі $A\cap B=\varnothing$, то гавораць, што мноствы A і B не перасякаюцца.

Адзначым, што аб’яднанне і перасячэнне мностваў валодаюць наступнымі ўласцівасцямі:

1. $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$ (камутатыўнасць);
2. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (асацыятыўнасць);
3. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$, $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ (дыстрыбутыўнасць).

Заўважым таксама наступнае:

1) калі $B\subset A$, то $A\cup B=A$, $A\cap B=B$;
2) $A\cup A=A$, $A\cap A=A$.

АЗНАЧЭННЕ 6. Няхай A і B — два мноствы. Мноства, якое складаецца з усіх тых элементаў мноства A, якія не належаць мноству B, называецца рознасцю мностваў A, B і абазначаецца $A\backslash B$.

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}.$$

У гэтым азначэнні не мяркуецца, што $B\subset A$.

ПРЫКЛАД 8. $A=\{1, 3, 5, 8\}$, $B=\{1, 7, 5, 9\}$. $A\backslash B=\{3, 8\}$.

АЗНАЧЭННЕ 7. Калі мноства B з’яўляецца часткай мноства A, то рознасць $A\backslash B$ называецца дадаткам мноства B да мноства A і абазначаецца C_AB або CB.

Дадатак мноства валодае наступнымі ўласцівасцямі:

1) $C(CB)=B$;
2) $C\bigcup\limits_{\alpha} B_\alpha=\bigcap\limits_{\alpha} CB_\alpha$;
3) $C\bigcap\limits_{\alpha} B_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha} CB_\alpha$.

Формулы 2) і 3) называюцца формуламі дваістасці.

1.2. Адпаведнасці паміж мноствамі

АЗНАЧЭННЕ 1. Няхай x, y — якія-небудзь элементы. Мноства $\{\{x, y\}, y\}$ называецца парай (упарадкаванай парай) элементаў x і y і абазначаецца сімвалам (x, y).

Такім чынам,

$$(x, y)=\{\{x, y\}, y\}.$$

Элемент x называецца першай кампанентай (каардынатай) пары (x, y), элемент y — другой кампанентай (каардынатай).

Лёгка заўважыць, што $(x, y)=(x', y') \Leftrightarrow x=x' \wedge y=y'$.

ЗАЎВАГА 1. Не трэба змешваць паняцці мноства $\{x, y\}$ і пары (x, y).

ПРЫКЛАД 1. $\{1, 2\}=\{2, 1\}$, $(1, 2)\neq(2, 1)$. $\{1, 1\}\neq(1, 1)$, бо $\{1, 1\}=\{1\}$, $(1, 1)=\{\{1\}, 1\}$.

АЗНАЧЭННЕ 2. Пара $((x, y), z)$ называецца тройкай (упрадкаванай тройкай) элементаў x, y, z і абазначаецца (x, y, z).

Аналагічна можна вызначыць чацвёрку, пяцёрку і г.д. элементаў.

АЗНАЧЭННЕ 3. Няхай X, Y — якія-небудзь два мноствы. Здабыткам мностваў X і Y называецца мноства (абазначаецца X×Y) ўсіх пар (x, y), дзе $x\in$X, $y\in$Y.

Такім чынам, X×Y=$\{(x, y) \mid x\in X \wedge y\in Y\}$.

ЗАЎВАГА 2. Ужываюцца таксама і наступныя тэрміны: «прамы здабытак», «дэкартавы здабытак».

ПРЫКЛАД 2. X=$\{1, 2, 3\}$, Y=$\{a, b, c, d\}$. X×Y=$\{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}$.

АЗНАЧЭННЕ 4. Любое падмноства f здабытку X×Y называецца адпаведнасцю паміж мноствамі X і Y.

ПРЫКЛАД 3. X=$\{1, 2, 3\}$, Y=$\{a, b, c, d\}$. $f=\{(2, a), (3, b), (3, c)\}$ — адпаведнасць паміж мноствамі X і Y.

АЗНАЧЭННЕ 5. Няхай f — адпаведнасць паміж мноствамі X і Y. Калі $(x, y)\in f$, то гавораць, што пры адпаведнасці f элементу x адпавядае элемент y. Пры гэтым y называецца элементам, які адпавядае элементу x. Элемент y называецца таксама вобразам элемента x, а элементам x — праобразам элемента y.

Мноства ўсіх першых кампанентаў пар, якія належаць адпаведнасці f, называецца абсягам вызначэння гэтай адпаведнасці і абазначаецца $D(f)$.

Мноства ўсіх другіх кампанентаў такіх пар называецца абсягам значэнняў адпаведнасці f і абазначаецца $E(f)$.

ПРЫКЛАД 4. Няхай f — адпаведнасць, разгледжаная ў прыкладзе 3. Тады $D(f)=\{2, 3\}$, $E(f)=\{a, b, c\}$.

ЗАЎВАГА 3. Адпаведнасць f паміж мноствамі X і Y можна наглядна паказаць з дапамогай чарцяжа. Элементы мностваў X і Y адлюстроўваюць пунктамі плоскасці. Для кожнай пары (x, y), якая належыць адпаведнасці f, робяць наступныя пабудаванні: ад пункта, які адлюстроўвае элемент x праводзяць стрэлку да пункта, які адлюстроўвае адпаведны яму элемент y. Атрыманы чарцеж называецца графам адпаведнасці f.

ЗАЎВАГА 4. Няхай X, Y — некаторыя мноствы рэчаісных лікаў, а f — адпаведнасць паміж гэтымі мноствамі. У прамавугольнай дэкартавай сістэме каардынат пабудуем усе пункты, каардынатамі якіх з'яўляюцца пары лікаў, якія належаць мноству f. Атрыманае мноства пунктаў называецца графікам адпаведнасці f.

АЗНАЧЭННЕ 6. Адпаведнасць паміж мноствамі X і Y, пры якім кожнаму элементу $x \in X$ адпавядае адзін і толькі адзін элемент $y \in Y$, называецца функцыяй ці аператарам, або адлюстраваннем мноства X у мноства Y.

Поруч з сімвалам f такую адпаведнасць абазначаюць

$$f\colon X \to Y \text{ або } X \xrightarrow{f} Y.$$

Абсягам вызначэння такой адпаведнасці з'яўляецца мноства

$$X\colon D(f)=X.$$

Яно называецца абсягам вызначэння функцыі f.

Абсяг значэнняў такой адпаведнасці называецца абсягам значэнняў функцыі f.

Элемент $x \in X$ называецца аргументам або незалежнай зменнай. Адпаведны яму элемент y абазначаецца праз $f(x)$ і называецца значэннем функцыі f у пункце x.

АЗНАЧЭННЕ 7. Калі абсягам вызначэння і абсягам значэнняў функцыі з'яўляюцца некаторыя мноствы рэчаісных лікаў, то такая функцыя называецца рэчаіснай функцыяй адной рэчаіснай зменнай.

АЗНАЧЭННЕ 8. Няхай f — адпаведнасць паміж мноствамі X і Y. Гэта адпаведнасць называецца адлюстраваннем мноства X на мноства Y, калі:

1) кожнаму элементу $x \in X$ адпавядае адзін і толькі адзін элемент $y \in Y$;
2) кожны элемент $y \in Y$ адпавядае некатораму элементу $x \in X$.

ЗАЎВАГА 5. Адлюстраванне X на мноства Y з'яўляецца прыватным выпадкам адлюстравання X у Y.

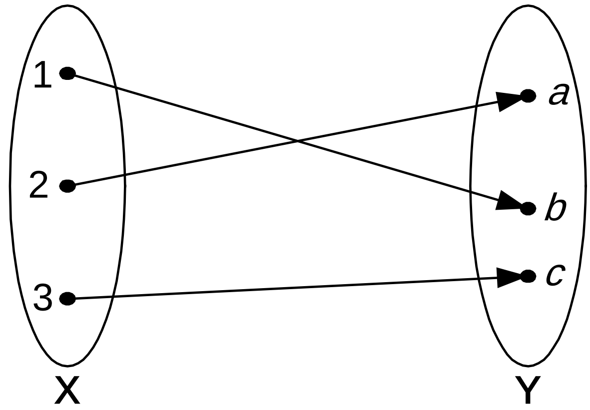
АЗНАЧЭННЕ 9. Адлюстраванне f паміж мноствамі X і Y называецца ўзаемна адназначным, калі

1) кожнаму элементу $x \in X$ адпавядае адзін і толькі адзін элемент $y \in Y$;
2) кожны элемент $y \in Y$ адпавядае аднаму і толькі аднаму элементу $x \in X$.

ЗАЎВАГА 6. Узаемна адназначная адпаведнасць паміж X і Y называецца таксама ўзаемна адназначным адлюстраваннем мноства X на мноства Y.

АЗНАЧЭННЕ 10. Калі існуе ўзаемна адназначная адпаведнасць паміж мноствамі X і Y, то гавораць таксама, што паміж мноствамі X і Y можна ўстанавіць узаемна адназначную адпаведнасць. У гэтым выпадку гавораць таксама, што мноствы X і Y эквівалентныя ці, што яны маюць аднолькавую магутнасць. Пры гэтым запісваюць $X \sim Y$.

ПРЫКЛАД 5. X={1, 2, 3}. Y={a, b, c}. X ~ Y, бо паміж гэтымі мноствамі можна ўстанаваць узаемна адназначную адпаведнасць, напрыклад, наступным чынам:



Эквівалентныя мноствы валодаюць наступнымі ўласцівасцямі:

1) X~X (рэфлексіўнасць);
2) калі X~Y, то Y~X (сіметрычнасць);
3) калі X~Y і Y~Z, то X~Z (транзітыўнасць).

1.3. Злічоныя мноствы

АЗНАЧЭННЕ 1. Няхай N={1, 2, 3, ...} — мноства натуральных лікаў. Мноства A называецца злічоным, калі яно эквівалентнае мноству натуральных лікаў. Пры гэтым гавораць таксама, што мноства A мае магутнасць a.

Гэтае азначэнне можна сфармуляваць наступным чынам:

АЗНАЧЭННЕ 1′. Мноства A называецца злічоным, калі можна ўстанавіць узаемна адназначную адпаведнасць паміж мноствамі A і N.

АЗНАЧЭННЕ 1″. Мноства A называецца злічоным, калі яго элементы можна пранумараваць пры дапамозе ўсіх натуральных лікаў.

У сувязі з адзначаным вышэй элементы злічонага мноства A прынята запісваць з адпаведнымі ім натуральнымі лікамі (нумарамі), г.зн. наступным чынам:

$$A=\{a_1, a_2\ a_3, ...\}.$$

ПРЫКЛАД. Мноствы A={2, 4, 6, ..., 2n, ...}, B={1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2, ...}, C=$\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\}$ з'яўляюцца злічонымі.

Вывучым цяпер уласцівасці злічоных мностваў.

ТЭАРЭМА 1. З усякага бясконцага мноства можна вылучыць злічонае падмноства.

ДОКАЗ. Няхай X — адвольнае бясконцае мноства. Возьмем любы яго элемент і абазначым a_1. Акрамя a_1 у мностве X маецца бясконцае мноства элементаў. Возьмем любы з іх і абазначым a_2. Затым возьмем яшчэ які-небудзь элемент, адрозны ад a_1 і a_2, і абазначым праз a_3. Працягваючы гэты працэс неабмежавана, мы вылучым з мноства X злічонае падмноства A={a_1, a_2, a_3, ...}.

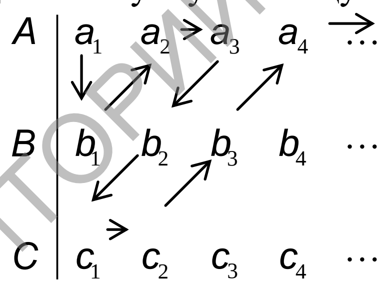
ТЭАРЭМА 2. Любое бясконцае падмноства злічонага мноства з’яўляецца злічоным.

ДОКАЗ. Няхай A — якое-небудзь злічонае мноства, а B — яго бясконцае падмноства. Паколькі мноства A з'яўляецца злічоным, то яго можна запісаць A={a_1, a_2, a_3, ...}. Будзем перабіраць цяпер усе элементы мноства A у парадку нарастання іх нумароў. Пры гэтым час ад часу мы будзем сустракаць элементы мноства B і кожны элемент мноства B мы сустрэнем раней ці пазней (бо B⊂A). Кожнаму элементу мноства B паставім у адпаведнасць нумар сустрэчы з ім. Такім чынам, мы пранумаруем усе элементы мноства B. З прычыны бясконцасці B мы скарыстаем усе натуральныя лікі. Гэта значыць, што B — злічонае (гл. азначэнне 1″).

ВЫНІК. Калі са злічонага мноства A выкінуць канечнае падмноства M, то мноства A\M, якое застанецца, будзе злічоным.

ТЭАРЭМА 3. Аб’яднанне канечнага ліку злічоных мностваў з’яўляецца злічоным мноствам.

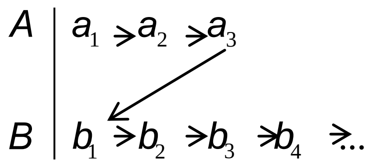
ДОКАЗ. Неабмяжоўваючы агульнасці доказу, разгледзім тры злічоныя мноствы A, B, C. Няхай S=A∪B∪C. Дакажам, што S — злічонае мноства. З элементаў мностваў A, B, C складзем наступную табліцу:



Пранумаруем элементы дадзенай табліцы ў напрамку стрэлак. Калі мноствы A, B, C змяшчаюць агульныя элементы, то нумаруем іх толькі тады, калі яны сустракаюцца ўпершыню, а затым прапускаем. Такім чынам, мы пранумаруем усе элементы мноства S, значыць, мноства S — злічонае.

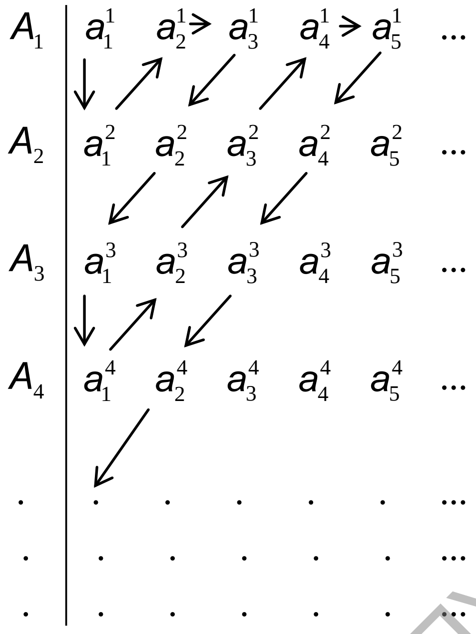
ТЭАРЭМА 4. Аб’яднанне канечнага мноства і мноства злічонага ёсць мноства злічонае.

ДОКАЗ. A — канечнае мноства, B — злічонае мноства.



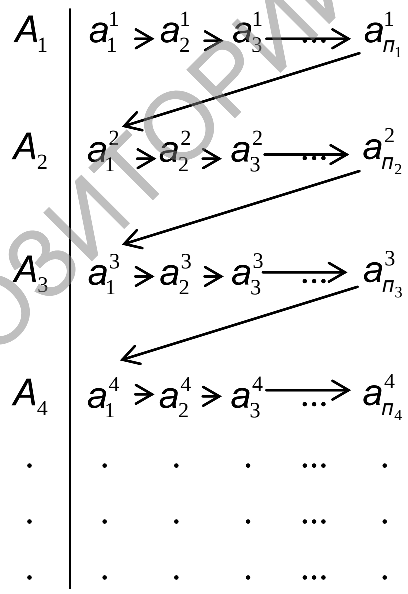
ТЭАРЭМА 5. Аб’яднанне злічонага мноства злічоных мностваў, ёсць злічонае.

ДОКАЗ.



ТЭАРЭМА 6. Аб'яднанне злічонага мноства канечных мностваў, якія парамі не перасякаюцца, ёсць злічонае мноства.

ДОКАЗ.



ТЭАРЭМА 7. Мноства Q усіх рацыянальных лікаў з'яўляецца злічоным.

ДОКАЗ. Спачатку дакажам, што злічоным з'яўляецца мноства Q_+, г.зн. мноства ўсіх дадатных рацыянальных лікаў. Разгледзім мноства ўсіх дробаў выгляду $\frac{p}{q}$, дзе p=1, 2, 3, ..., q=1, 2, 3, ... Гэтае мноства з'яўляецца аб'яднаннем злічонага мноства наступных злічоных мностваў:

$$\left\{\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \dots\right\},$$

$$\left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\ \dots\right\},$$

$$\left\{\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{3},\ \dots\right\},$$

. . . .

. . . .

. . . .

Таму па тэарэме 5 мноства ўсіх дробаў разгледжанага выгляду $\dfrac{p}{q}$ з'яўляецца злічоным, г.зн. злічоным з'яўляецца Q_+. Разгледзім цяпер мноства Q_- (мноства ўсіх адмоўных рацыянальных лікаў). Яно таксама з'яўляецца злічоным, бо эквівалентнае мноству Q_+. Калі цяпер улічыць, што

$$Q=Q_+\cup Q_-\cup\{0\},$$

і скарыстаць тэарэмы 3 і 4, то атрымаем, што мноства Q будзе злічоным.

ВЫНІК. Мноства ўсіх рацыянальных лікаў, якія належаць любому адрэзку, з'яўляецца злічоным.

Праўдзівасць гэтага сцвярджэння вынікае з тэарэмаў 7 і 2.

ТЭАРЭМА 8. Калі мноства А складаецца з элементаў $a_{x_1,\, x_2,\, \dots\, x_n}$, якія адрозніваюцца n значкамі x_1, x_2, ... x_n, кожны з якіх незалежна адзін ад другога прымае злічонае мноства значэнняў, то мноства А з'яўляецца злічоным.

ДОКАЗ. Яго ажыццяўляем метадам матэматычнай індукцыі. Тэарэма мае месца, пры n=1, г. зн., калі маецца адзін значок.

Дапусцім, што тэарэма праўдзівая пры $n=m$, і докажам, што яна праўдзівая пры $n=m+1$.

$$A=\{a_{x_1,\, x_2,\, \dots\, x_m,\ x_{m+1}}\}.$$

Паколькі згодна з умовай тэарэмы значок x_{m+1} прымае злічонае мноства значэнняў, то гэтыя значэнні можна перанумараваць:

$$x_{m+1}^1,\ x_{m+1}^2,\ \dots,\ x_{m+1}^k,\ \dots .$$

Няхай $A_k=\{a_{x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_m,\ x_{m+1}^k,}\}$, дзе x_{m+1}^k — фіксаваны. Гэтае мноства складаецца з элементаў, якія адрозніваюцца толькі m значкамі, кожны з якіх прымае злічонае мноства значэнняў. Таму, згодна з дапушчэннем, мноства A_k — злічонае.

Паколькі $A=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то мноства А з'яўляецца злічоным як аб'яднанне злічонага мноства злічоных мностваў.

ВЫНІК 1. Мноства ўсіх пунктаў (x, y) плоскасці, у якіх абедзве каардынаты з'яўляюцца рацыянальнымі лікамі, будзе злічоным.

У агульным выпадку мноства ўсіх пунктаў n-мернай эўклідавай прасторы з рацыянальнымі каардынатамі будзе злічоным.

ВЫНІК 2. Мноства ўсіх мнагаскладаў $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ з рацыянальнымі каэфіцыентамі з'яўляецца злічоным.

ДОКАЗ. Мноства ўсіх мнагаскладаў $P_n(x)$ можна разглядаць як мноства элементаў, якія адрозніваюцца $n+1$ значкамі a_0, a_1, ..., a_n, кожны з якіх, будучы рацыянальным лікам, прымае злічонае мноства значэнняў. Поводле тэарэмы 8 такое мноства будзе злічоным. Калі аб'яднаць мноства ўсіх мнагаскладаў з рацыянальнымі каэфіцыентамі нулявой ступені, першай, другой і г.д., мы атрымаем мноства ўсіх мнагаскладаў з рацыянальнымі каэфіцыентамі, якое паводле тэарэмы 5 будзе злічоным.

АЗНАЧЭННЕ 2. Лік ξ называецца алгебраічным, калі ён з'яўляецца коранем якога-небудзь мнагаскладу з цэлымі каэфіцыентамі, у адваротным выпадку ён называецца трансцэндэнтным.

ТЭАРЭМА 9. Мноства ўсіх алгебраічных лікаў з'яўляецца злічоным.

ДОКАЗ. Перш за ўсё адзначым, што мноства ўсіх мнагаскладаў з цэлымі каэфіцыентамі будзе злічоным. Гэта атрымліваецца з выніку 2 тэарэмы 8 і тэарэмы 2. Паколькі кожны мнагасклад мае канечнае мноства каранёў, таму мноства ўсіх алгебраічных лікаў з'яўляецца аб'яднаннем злічонага мноства канечных мностваў. Калі скарыстаць тэарэму 6 і ўлічыць той факт, што ўсе алгебраічныя лікі ўтвараюць бясконцае мноства, то паводле тэарэмы 2 мы атрымаем, што яно будзе злічоным.

ТЭАРЭМА 10. Аб'яднанне бясконцага мноства M і канечнага або злічоным мноства A будзе эквівалентным дадзенаму мноству M, г.зн. $M \cup A \sim M$.

ДОКАЗ. Будзем лічыць, што мноствы A і M не перасякаюцца, што не будзе абмяжоўваць агульнасці доказу.

На падставе тэарэмы 1 вылучым з бясконцага мноства M якое-небудзь злічонае падмноства D. Мноства, якое засталося, абазначым праз P. Тады будзем лічыць $M=P \cup D$. Адсюль вынікае, што

$$M \cup A = P \cup (D \cup A).$$

Паколькі $P \sim P$, $D \sim (D \cup A)$ і мноства P і $D \cup A$ не перасякаюцца, то

$$P \cup D \sim P \cup (D \cup A),$$

$$\text{г. зн. } M \sim M \cup A,$$

$$\text{г. зн. } M \cup A \sim M.$$

ТЭАРЭМА 11. Калі бясконцае мноства S з'яўляецца незлічоным , а A — яго канечнае або злічонае падмноства, то $S \backslash A \sim S$.

ДОКАЗ. Заўважым, што мноства $M=S \backslash A$ не можа быць канечным, бо ў адваротным выпадку мноства S было б канечным або злічоным як аб'яднанне мноства $S \backslash A$ і канечнага або злічонага мноства A.

Паколькі мноства M — бясконцае, а A — канечнае або злічонае, то з папярэдняй тэарэмы будзем мець:

$$M \cup A \sim M,$$

г.зн. $(S \backslash A) \cup A \sim S \backslash A$.

Адсюль вынікае, што S~S\A, г. зн. S\A~S.

1.4. Мноства магутнасцяў кантынуума

У папярэднім параграфе мы вывучалі злічоныя мноствы. Мноства, якое не з'яўляецца злічоным, называецца незлічоным. Узнікае пытанне: ці існуюць *бясконцыя незлічоныя мноствы*?

ТЭАРЭМА 1. Мноства ўсіх рэчаісных лікаў x, якія задавальняюць няроўнасці $\mathbf{0 \le x \le 1}$***, з'яўляецца незлічоным, г.зн. адрэзак*** **[0, 1]** ***будзе незлічоным мноствам.***

ДОКАЗ. Мяркуем адваротнае, што адрэзак $u=[0,\ 1]$ ёсць злічонае мноства. Тады гэта азначае (азначэнне 1″ параграфа 1.3.), што ўсе яго пункты можна пранумараваць пры дапамозе натуральных лікаў: $n=\{x_1, x_2, x_3, ...\}$.

Падзелім адрэзак $u=[0,\ 1]$ на тры роўныя адрэзкі $\left[0,\ \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3},\ 1\right]$. Заўважым, што пункт x_1 не можа адначасова належыць усім тром адрэзкам. Возьмем той адрэзак, які не змяшчае пункта x_1, і абазначым яго праз u_1. Падзелім адрэзак u_1 на тры роўныя адрэзкі і возьмем той, які не змяшчае пункта x_2. Гэты адрэзак абазначым праз u_2.

Калі працягваць гэты працэс, то атрымаем сцяжную паслядоўнасць адрэзкаў

$$u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ... , \tag{1}$$

якія валодаюць той уласцівасцю, што $x_n \notin u_n$ $(n=1, 2, 3, ...)$.

Вядома, што існуе такі пункт ξ, які належыць усім адрэзкам сцяжнай паслядоўнасці (1):

$$\xi \in u_n \ (n=1, 2, 3, ...). \tag{2}$$

Паколькі $\xi \in [0,\ 1]$, а мы меркавалі, што ўсе пункты гэтага адрэзка пранумараваныя, то пункт ξ будзе роўным x_n пры некаторым n: $\xi = x_n$ пры некаторым n.

Але тады згодна з пабудаваннямі ξ не належыць u_n пры гэтым n: $\xi \notin u_n$ пры гэтым n.

Аднак гэта супярэчыць (2), г. зн. таму што ξ належыць усім адрэзкам паслядоўнасці (1). Атрыманая супярэчнасць і даказвае тэарэму.

АЗНАЧЭННЕ 1. Калі мноства А эквівалентнае адрэзку [0, 1], то гавораць, што мноства А мае магутнасць кантынуума або магутнасць c.

ТЭАРЭМА 2. Кожны з прамежкаў $\mathbf{[a, b], (a, b), (a, b], [a, b)}$ ***мае магутнасць c.***

ДОКАЗ. Мяркуем $A=[a, b]$, $u=[0, 1]$.

Формула $y=a+(b-a)x$ устанаўлівае ўзаемна адназначную адпаведнасць паміж мноствамі А і u $(A=\{y\},\ u=\{x\})$.

Таму $A \sim u$, значыць, мноства А мае магутнасць c.

Дакажам, што прамежак (a, b) мае магутнасць c.

З адрэзка $[a, b]$ выкінем два пункты a і b. Атрымаем інтэрвал (a, b). Згодна з тэарэмай 11 папярэдняга параграфа маем, што $(a, b)\sim[a, b]$. Паколькі $[a, b]\sim[0, 1]$, то $(a, b)\sim[0, 1]$, г. зн. інтервал (a, b) мае магутнасць c.

Аналагічным чынам даказваюцца астатнія сцвярджэнні.

ТЭАРЭМА 3. Мноства R усіх рэчаісных лікаў мае магутнасць с.

ДОКАЗ. Дастаткова паказаць, што мноства R будзе эквівалентным якому-небудзь канечнаму інтэрвалу.

Заўважым, што формула $y=\mathrm{tg}x$ устанаўлівае ўзаемна адназначную адпаведнасць паміж інтервaламі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ і мноствам R. Таму $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\sim$R. Такім чынам, R$\sim\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, але паколькі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\sim[0, 1]$, то R$\sim[0, 1]$. Гэта і сведчыць аб тым, што мноства R усіх рэчаісных лікаў мае магутнасць c.

ТЭАРЭМА 4. Мноства J усіх ірацыянальных лікаў мае магутнасць с.

ДОКАЗ. Няхай R — мноства ўсіх рэчаісных лікаў, Q — мноства ўсіх рацыянальных лікаў. Паколькі мноства R з'яўляецца бясконцым незлічоным мноствам, а Q — яго злічонае падмноства, то згодна з тэарэмай 11 § 1.3 , будзем мець, што R\Q~R, г.зн. J~R. Адсюль, улічваючы тое, што R~[0, 1], атрымліваем J~[0, 1]. Гэта і сведчыць аб тым, што мноства J усіх ірацыянальных лікаў мае магутнасць c.

ТЭАРЭМА 5. Мноства Т усіх трансцэндэнтных лікаў мае магутнасць с, г.зн. гэтае мноства не з'яўляецца пустым, г.зн. трансцэндэнтныя лікі існуюць.

ДОКАЗ. Няхай R — мноства ўсіх рэчаісных лікаў, A — мноства алгебраічных лікаў, T — мноства трансцэндэнтных лікаў.

Будзем разважаць так, як і пры доказе тэарэмы 4. Маем:

R\A~R,

г.зн. T~R, паколькі R~[0, 1], то T~[0, 1].

Сфармулюем без доказу яшчэ дзве тэарэмы.

ТЭАРЭМА 6. Аб'яднанне канечнага ці злічонага мноства мностваў магутнасцяў с мае магутнасць с.

ТЭАРЭМА 7. Калі мноства А складаецца з элементаў $a_{x_1, x_2, \dots x_n}$, якія адрозніваюцца n значкамі x_1, x_2, ... x_n, кожны з якіх незалежна адзін ад другога прымае мноства значэнняў магутнасці с, то дадзенае мноства А=\{$a_{x_1, x_2, \dots x_n}$\} мае магутнасць с.

ВЫНІК. Мноства ўсіх пунктаў эўклідавай n-мернай прасторы мае магутнасць c.

1.5. Паняцце магутнасці мноства. Параўнанне магутнасцяў

У папярэдніх параграфах мы вызначылі сэнс наступных выразаў: «два мноствы маюць аднолькавую магутнасць»; «мноства мае магутнасць *a*»; «мноства мае магутнасць *c*». Аднак само паняцце магутнасці мноства не было вызначана. У дадзеным параграфе зробім гэта.

Прааналізуем, як вызначаўся выраз, што мноства мае магутнасць *a*. Мы разглядалі разнастайныя мноствы, якія эквівалентныя мноству натуральных лікаў, а, значыць, эквівалентныя паміж сабой. Дамовіліся казаць, што кожнае такое мноства мае магутнасць *a*.

Будзем рабіць такім чынам. Няхай дадзена мноства А. Поруч з мноствам А будзем разглядаць сукупнасць мностваў, эквівалентных мноству А. Усе гэтыя мноствы будуць эквівалентнымі паміж сабой. Такую сукупнасць мностваў будзем называць класам эквівалентных паміж сабой мностваў.

АЗНАЧЭННЕ 1. Кожнаму класу эквівалентных паміж сабой мностваў паставім у адпаведнасць некаторы сімвал, які будзем называць кардынальным лікам або магутнасцю любога мноства з разглядаемага класа.

Пры гэтым, калі магутнасць мноства А ёсць *a*, то будзем пісаць $\overline{\overline{A}}=a$.

ЗАЎВАГА. Калі два мноствы з’яўляюцца эквівалентнымі, то згодна з азначэннем 1 яны маюць аднолькавую магутнасць.

Разгледзім клас мностваў, якія эквівалентныя мноству натуральных лікаў N. Гэтаму класу паставім у адпаведнасць сімвал *a*. Тады згодна з азначэннем 1 кожнае мноства, эквівалентнае мноству N, мае магутнасць *a*. Такім чынам, азначэнне 1 узгадняецца са сфармуляваным раней азначэннем выразу «Мноства мае магутнасць *a*».

Разгледзім клас мностваў, якія эквівалентныя адрэзку [0, 1]. Гэтаму класу паставім у адпаведнасць сімвал *c*. Тады згодна з азначэннем 1 кожнае мноства, эквівалентнае адрэзку [0, 1], мае магутнасць *c*. Такім чынам, азначэнне 1 узгадняецца са сфармуляваным раней азначэннем выразу «Мноства мае магутнасць *c*».

Разгледзім клас мностваў, эквівалентных мноству $\{1, 2, 3, ..., n\}$, г.зн. эквівалентных адрэзку натуральнага шэрагу. Гэтаму класу паставім у адпаведнасць сімвал n. Згодна азначэнню 1 магутнасць кажнага з мностваў разглядаемага класа роўная n. Замест гэтах слоў ужываюць таксама наступныя: «Лік элементаў кожнага з мностваў разглядаемага класа роўны n».

Такім чынам, паняцце ліку элементаў канечнага мноства з’яўляецца прыватным выпадкам больш агульнага паняцця магутнасці мноства.

Пяройдзем цяпер да пытання параўнанне магутнасцяў.

Калі два мноствы А і В з’яўляюцца эквівалентнымі, то згодна з азначэннем 1 яны маюць аднолькавую магутнасць. Гэты факт сімвалічна запісваюць так:

$$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}.$$

АЗНАЧЭННЕ 2. Калі мноства А з'яўляецца эквівалентным некаторай частцы мноства В, але ў мностве А няма часткі эквівалентнай мноству В, то гавораць, што магутнасць мноства А меншая магутнасці мноства В і запісваюць

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \text{ або } \overline{\overline{B}} > \overline{\overline{A}}.$$

ПРЫКЛАД 1. Няхай А={a, b, c}, В={m, n, p, q}. Маем, што $\overline{\overline{A}}$=3, $\overline{\overline{B}}$=4. Разгледзім мноства В*={m, n, p}, якое з'яўляецца часткай мноства В. Паколькі А~В*, але ў А няма часткі, эквівалентнай В, то магутнасць мноства А меншая магутнасці В, г.зн. $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, г.зн. 3<4.

Аналагічна паказваецца, што $n<a$, $n<c$, г.зн. магутнасць любога канечнага мноства меншая магутнасці злічонага мноства, а таксама магутнасці кантынуума.

ПРЫКЛАД 2. Няхай N={1, 2, 3, ...}, u=[0, 1]. Маем, што $\overline{\overline{N}} = a$, $\overline{\overline{u}} = c$. Дакажам, што $a<c$.

Разгледзім мноства $u^*=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$, якое з'яўляецца часткай мноства u. Відавочна, што N~u*. Дакажам, што ў N адсутнічае частка, эквівалентная u.

Возьмем адвольную частку N* мноства N. Калі N* — канечнае мноства, то зразумела, што яно не будзе эквівалентным мноству u, бо u — бясконцае мноства. Калі ж N* — бясконцае мноства, то яно будзе злічоным (гл. § 1.3, т.2). Такое мноства не будзе эквівалентным мноству u. Такім чынам, мы даказалі, што мноства N будзе эквівалентным некаторай частцы мноства u, але ў мностве N адсутнічае частка, эквівалентная мноству u. Таму на падставе азначэння 2 маем:

$$\overline{\overline{N}} < \overline{\overline{u}}, \text{ г. зн. } a<c.$$

Узнікае пытанне: «Ці існуе магутнасць μ, прамежкавая паміж a і c, г.зн. $a<\mu<c$?».

Гэтае пытанне, якое называецца праблемай кантынууму, доўгі час не было развязаным.

У 1938 г. аўстрыйскі матэматык Гёдэль паказаў, што, калі зыходзіць з некаторай аксіяматыкі, то меркаванне аб адмоўным рашэнні гэтай праблемы не супярэчыць дадзенай аксіяматыцы.

У 1964—1969 гг. амерыканскі матэматык Коэн паказаў, што дадатнае рашэнне таксама не супярэчыць гэтай аксіяматыцы.

Інтарэс выклікае наступная тэарэма.

ТЭАРЭМА 1. Няхай А і В — любые два мноствы. Магутнасці гэтых мностваў задавальняюць адной з наступных суадносін:

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}},$$
$$\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}},$$

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}.$$

ДОКАЗ. Для любых двух мностваў А і В лагічна магчымы наступныя выпадкі:

1) мноства А будзе эквівалентным некаторай частцы мноства В, але ў А няма часткі, эквівалентнай В;
2) мноства В будзе эквівалентным некаторай частцы мноства А, але ў В няма часткі, эквівалентнай А;
3) мноства А будзе эквівалентным некаторай частцы мноства В, і В будзе эквівалентным некаторай часцы А;
4) у мностве А няма часткі, эквівалентнай мноству В, і ў В няма часткі, эквівалентнай А.

Можна даказаць што ў выпадку 3) мноствы А і В эквівалентныя, г. зн. А~В, а выпадак 4) немагчымы.

Такім чынам, для любых мностваў А і В магчыма выпадкі 1), 2), 3), прычым гэтыя выпадкі з'яўляюцца несумяшчальнымі. Таму, скарыстаўшы азначэнне 2 і 1, атрымаем, што мноствы задавальняюць адной з наступных суадносін:

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}},$$
$$\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}},$$
$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}.$$

Некалькі вышэй мы даказалі, што $a<c$. Узнікае пытанне: ці можна пабудаваць мноства магутнасці, якая большая c?

ПРЫКЛАД 3. Няхай М={a, b, c}, Т={∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}.

Маем: $\overline{\overline{M}} = 3$, $\overline{\overline{T}} = 2^3$, $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{T}}$.

ТЭАРЭМА 2. Няхай М — якое-небудзь не пустое мноства, Т — мноства ўсіх яго падмностваў. Тады $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{T}}$**.**

ДОКАЗ. Згодна з тэарэмай 1 мноствы М і Т задавальняюць адной з наступных адносін:

$$\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{T}},$$
$$\overline{\overline{M}} > \overline{\overline{T}},$$
$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{T}}.$$

Заўважым, што ў Т ёсць частка, эквівалентная М. Такой часткай з'яўляецца мноства, якое складзена з аднаэлементных падмностваў мноства М. Таму не можа быць, што $\overline{\overline{M}} > \overline{\overline{T}}$.

Засталіся дзве магчымасці: $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{T}}$, $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{T}}$. Дакажам, што першая не можа быць. Тады застанецца 2 магчымасці, і тэарэма будзе даказанай. Такім чынам, засталося даказаць, што не можа быць, што $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{T}}$, г. зн. М~Т.

Мяркуем адваротнае. Няхай М~Т, г. зн. існуе паміж мноствамі М і Т узаемна адназначная адпаведнасць, г. зн. існуе такая адпаведнасць f, пры якой кожнаму элементу $a \in$М адпавядае адзін і толькі адзін элемент $A \in$Т, і кожны элемент $A \in$Т адпавядае аднаму і толькі аднаму элементу $a \in$М. Нагадаем, што элементы A мноства Т з'яўляюцца падмноствамі мноства М.

Зрабіўшы такое дапушчэнне, мы легка прыйдзем да супярэчнасці. Абазначым праз Х мноства элементаў з мноства М, якія не ўваходзяць у тыя мноствы, якія ім адпавядаюць пры адпаведнасці f. Больш падрабязна: калі пры адпаведнасці f элементу a апавядае падмноства А і $a \in$А, то a мы не ўключаем у Х: $a \notin$Х. Калі пры адпаведнасці f элементу a адпавядае А і $a \notin$А, то a мы ўключаем у Х. Зразумела, што Х — падмноства мноства М, г. зн. з'яўляецца элементам мноства М.

Пры адпаведнасці f элемент $X \in$Т адпавядае некатораму элементу $x \in$Х. Лагічна магчымы два выпадкі: 1) $x \in$Х; 2) $x \notin$Х. Пакажам, што ў кожным з гэтых выпадкаў мы прыходзім да супярэчнасці.

Няхай $x \in$Х. Паколькі элементу $x \in$М адпавядае $X \in$Т, то $x \notin$Х (згодна з канструкцыяй мноства Х). Атрымалі супярэчнасць.

Няхай $x \notin$Х. Паколькі пры адпаведнасці f элементу x адпавядае $X \in$Т, то $x \in$Х (згодна з канструкцыяй мноства Х). Атрымалі супярэчнасць.

Такім чынам, тэарэму даказалі цалкам.

ВЫНІК. Не існуе найбольшай магутнасці. Узнікае пытанне: «Ці існуе бясконцае мноства найменьшай магутнасці?».

ТЭАРЭМА 3. Магутнасць злічонага мноства з'яўляецца найменшай з магутнасцяў усіх бясконцых мностваў.

ДОКАЗ. Няхай А — злічонае мноства, a — яго магутнасць, В — адвольнае бясконцае мноства, b — яго магутнасць.

Згодна з тэарэмай 1 магутнасці мностваў А і В задавальняюць адной з наступных трох суадносін:

$$a<b,\ a=b,\ a<b.$$

Вядома (§ 1.3, т. 1), што з любога бясконцага мноства можна вылучыць злічонае падмноства. Значыць, у В ёсць частка, якая будзе эквівалентнай мноству А, таму згодна з азначэннем 2 не можа быць, *што* $a>b$. Такім чынам, $a \leq b$. Гэтым мы даказалі тэарэму.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦЫЯНАЛЬНАГА АНАЛІЗУ

2.1. Метрычная прастора

АЗНАЧЭННЕ 1. Няхай X — некаторае мноства, ρ — адлюстраванне мноства X×X у мноства рэчаісных лікаў R, якое задавальняе наступным умовам:

1. $\rho(x, y)\geq 0$, прычым $\rho(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$;
2. $\rho(x, y)=\rho(y, x)$;
3. $\rho(x, z)\leq\rho(x, y)+\rho(y, z)$.

Мноства X з функцыяй ρ, г. зн. пара (X, ρ) называецца метрычнай прасторай. Элементы мноства X называюцца пунктамі метрычнай прасторы. Функцыя ρ называецца адлегласцю або метрыкай.

Метрычная прастора абазначаецца таксама адной літарай, напрыклад, M: M=(X, ρ). Падчас метрычную прастору абазначаюць літарай X, г. зн. той літарай, што і само мноства X.

Метрычная прастора будзе зададзенай, калі мы зададзім мноства X і функцыю ρ з уласцівасцямі 1, 2, 3.

Няхай дадзена мноства X. Калі якім-небудзь спосабам мы зададзім функцыю ρ з уласцівасцямі 1, 2, 3, то будзем казаць, што ў мностве X зададзена метрыка, або, што яно метрызавана.

ЗАЎВАГА. Калі мноства з адлегласцю ρ з'яўляецца метрычнай прасторай, то і мноства $X_1\subset X$ з адлегласцю ρ таксама з'яўляецца метрычнай прасторай. Яно называецца падпрасторай дадзенай метрычнай прасторай (X, ρ).

ПРЫКЛАД 1. Мноства разнастайных упарадкаваных сукупнасцяў з m рэчаісных лікаў $x=(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$ з адлегласцю, якая вызначаецца формулай

$$\rho(x,\ y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(\xi_k-\eta_k)^2}\,,$$

з'яўляецца метрычнай прасторай. Яе называюць m-мернай эўклідавай прасторай і абазначаюць E^m.

ПРЫКЛАД 2. Мноства разнастайных упарадкаваных сукупнасцяў з m рэчаісных лікаў $x=(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$ з адлегласцю, якая вызначаецца формулай

$$\rho(x,\ y)=\sum_{k=1}^{m}|\,\xi_k-\eta_k\,|,$$

з'яўляецца метрычнай прасторай.

З прыкладаў 1 і 2 мы бачым, што адно і тое ж мноства можна метрызаваць па-рознаму. Пры гэтым атрымліваем розныя метрычныя прасторы.

ПРЫКЛАД 3. Мноства разнастайных абмежаваных лікавых паслядоўнасцяў $x=x_1, x_2, ..., x_n, ...$ з адлегласцю, якая вызначаецца формулай

$$\rho(x,\ y)=\sup_n|\,x_n-y_n\,|$$

з'яўляецца метрычнай прасторай.

ПРЫКЛАД 4. Мноства разнастайных непарыўных на адрэзку [0, 1] функцый з адлегласцю

$$\rho(x,\ y) = \max_{0\le t\le 1} |x(t) - y(t)|,$$

з'яўляецца метрычнай прасторай. Гэтая метрычная прастора абазначаецца так: $C_{[0,\,1]}$.

2.2. Адкрытыя і замкнутыя мноствы метрычнай прасторы

Няхай зададзена метрычная прастора X, г. зн. пара (X, ρ), дзе ρ — функцыя з уласцівасцямі 1, 2, 3.

АЗНАЧЭННЕ 1. Мноства ўсіх пунктаў x метрычнай прасторы X, для якіх выконваецца няроўнасць $\rho(x, x_0)<\varepsilon$ называецца адкрытым шарам з цэнтрам у пункце x_0 і радыусам ε. Гэтае мноства называюць таксама ε-наваколлем пункта x_0.

АЗНАЧЭННЕ 2. Наваколлем пункта x_0 называецца любы адкрыты шар, які змяшчае x_0.

АЗНАЧЭННЕ 3. Пункт x_0 называецца ўнутранным пунктам мноства $E\subset X$, калі існуе такое наваколле гэтага пункта, якое цалкам змяшчаецца ў E.

АЗНАЧЭННЕ 4. Мноства $E\subset X$ называецца адкрытым, калі кожны пункт мноства E з'яўляецца ўнутраным пунктам гэтага мноства.

ПРЫКЛАД 1. На лікавай прамой інтэрвал (a, b) з'яўляецца адкрытым мноствам.

АЗНАЧЭННЕ 5. Пункт $x_0\in X$ называецца лімітавым пунктам мноства $E\subset X$, калі любое наваколле гэтага пункта змяшчае адзін пункт мноства E, адрозны ад x_0.

ЗАЎВАГА 1. Лімітавы пункт мноства E можа належыць, так і не належыць мноству E.

ПРЫКЛАД 2. На лікавай прамой разгледзім мноствы $\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\right\}$ і $\left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\right\}$. Лімітавым пунктам кожнага з гэтых мностваў з'яўляецца пункт 0. Першаму мноству гэты пункт не належыць, а другому належыць.

АЗНАЧЭННЕ 6. Пункт $x_0\in E$ называецца ізаляваным пунктам мноства $E\subset X$, калі ў гэтага пункта існуе наваколле, якое не змяшчае ніякіх іншых пунктаў мноства E, акрамя самаго пункта x_0.

ПРЫКЛАД 3. На лікавай прамой разгледзім мноства $\{0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1\}$. Кожны пункт гэтага мноства з'яўляецца ізаляванным.

ЗАЎВАГА 2. Кожны пункт мноства $E\subset X$ з'яўляецца ці лімітавым, ці ізаляваным.

АЗНАЧЭННЕ 7. Мноства $E\subset X$ называецца замкнутым, калі яно змяшчае ўсе свае лімітавыя пункты.

ПРЫКЛАД 4. На лікавай прамой разгледзім мноствы $\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, ...\}$ і $[a, b]$. Кожнае з гэтых мностваў з'яўляецца замкнутым.

ЗАЎВАГА 3. Існуюць мноствы, якія з'яўляюцца адначасова і замкнутымі, і адкрытымі, але ёсць і такія мноствы, якія не з'яўляюцца замкнутымі і не з'яўляюцца адкрытымі.

ПРЫКЛАД 5. Няхай X — лікавая прамая і E — лікавая прамая. Мноства E з'яўляецца як адкрытым, так і замкнутым.

ПРЫКЛАД 6. На лікавай прамой разгледзім мноства $\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, ...\}$. Гэтае мноства не з'яўляецца адкрытым і не з'яўляецца замкнутым.

Вывучым цяпер некаторыя ўласцівасці адкрытых і замкнутых мностваў.

ТЭАРЭМА 1. Аб'яднанне любой сукупнасці адкрытых мностваў і перасячэнне канечнай сукупнасці адкрытых мностваў з'яўляюцца адкрытымі мноствамі.

ДОКАЗ.

1. Няхай дадзена аб'яднанне любой сукупнасці адкрытых мностваў і x_0 — адвольны пункт гэтага аб'яднання. Згодна з азначэннем аб'яднання гэты пункт належыць хаця б аднаму з разглядаемых мностваў. Паколькі гэтае мноства з'яўляецца адкрытым, то яму належыць некаторае наваколле пункта x_0. Гэтае наваколле згодна з азначэннем аб'яднання належыць і аб'яднанню разглядаемых мностваў. Значыць, x_0 — унутраны пункт аб'яднання.

Такім чынам, мы даказалі, што кожны пункт x_0 аб'яднання адкрытых мностваў з'яўляецца ўнутраным пунктам гэтага аб'яднання. Таму разглядаемае аб'яднанне з'яўляецца адкрытым мноствам.

2. Няхай $G_1, G_2, ... , G_n$ — канечная сукупнасць адкрытых мностваў,

$$G = \bigcap_{k=1}^{n} G_k .$$

Няхай x_0 — адвольны пункт мноства G. Згодна з азначэннем перасячэння мностваў будзем мець, што $x_0 \in G_k$ (k=1, 2, ..., n).

Паколькі G_k — адкрытае мноства, $x_0 \in G_k$, то існуе такое наваколле пункта x_0 радыуса r_k, якое цалкам змяшчаецца ў G_k (k=1, 2, …, n).

Разгледзім адкрыты шар з цэнтрам у пункце x_0 і радыусам $r=\min(r_1, r_2, …, r_n)$. Зразумела, што гэты шар змяшчаецца ў кожным з мностваў $G_1, G_2, ... , G_n$ і таму змяшчаецца ў мностве G.

Такім чынам, мы даказалі, што для кожнага пункта $x_0 \in G$ існуе такое наваколле гэтага пункта, якое цалкам змяшчаецца ў G. Гэта сведчыць аб тым, што кожны пункт мноства G з'яўляецца ўнутраным, г. зн. G — адкрытае мноства.

ЗАЎВАГА 4. Перасячэнне бясконцай сукупнасці адкрытых мностваў можа быць адкрытым мноствам, а можа і не быць адкрытым мноствам.

ПРЫКЛАД 7. На лікавай прамой разгледзім мноства $G_k=(-\frac{1}{k},\ \frac{1}{k})$ (k=1, 2, ..., n). Кожнае з гэтых мностваў з'яўляецца адкрытым. Аднак іх перасячэнне $G=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k=\{0\}$ не з'яўляецца адкрытым.

ТЭАРЭМА 2. Калі мноства G з'яўляецца адкрытым, то яго дадатак CG да метрычнай прасторы ёсць замкнутае мноства.

ДОКАЗ. Мноства G — адкрытае, таму для кожнага пункта $x_0 \in G$ існуе наваколле, якое цалкам належыць G. Гэтае наваколле не змяшчае пунктаў мноства CG. Значыць, x_0 не з'яўляецца лімітаваным пунктам мноства CG.

Такім чынам, мы даказалі, што кожны пункт $x_0 \in G$ не з'яўляецца лімітавым пунктам мноства CG, таму мноства CG змяшчае ўсе свае лімітавыя пункты, г.зн з'яўляецца замкнутым.

ТЭАРЭМА 3. Калі мноства F з'яўляецца замкнутым, то яго дадатак CF да метрычнай прасторы будзе адкрытым мноствам.

ДОКАЗ. Няхай $x_0 \in CF$, таму $x_0 \notin F$. Паколькі мноства F змяшчае ўсе свае лімітавыя пункты (яно з'яўляецца замкнутым), то x_0 — не з'яўляецца лімітавым пунктам мноства F. Значыць, існуе такое наваколле G (x_0) пункта x_0, якое не змяшчае ніводнага пункта мноства F, адрознага ад x_0.

Паколькі $x_0 \notin F$, то ў G(x_0) не змяшчаецца ніводнага пункта мноства F, таму G(x_0) змяшчаецца ў CF.

Такім чынам, мы даказалі, што для любога пункта $x_0 \in CF$ існуе такое наваколле G(x_0) гэтага пункта, якое цалкам змяшчаецца ў CF. Гэта сведчыць, што кожны пункт мноства CF з'яўляецца ўнутранным пунктам гэтага мноства, г. зн. CF — адкрытае падмноства.

ВЫНІК. Пустое мноства і ўся метрычная прастота з'яўляюцца як замкнутымі, так і адкрытымі мноствамі.

ДОКАЗ. Відавочна, што пустое мноства і мноства X з'яўляюцца замкнутымі. Паколькі кожнае з іх з'яўляецца дадаткам другога да метрычнай прасторы, то згодна з тэарэмай 3 кожнае з іх з'яўляецца адкрытым мноствам.

ТЭАРЭМА 4. Аб'яднанне любой канечнай сукупнасці замкнутых мностваў і перасячэнне любой сукупнасці замкнутых мностваў з'яўляюцца замкнутымі мноствамі.

ДОКАЗ. 1. Пры доказе будзем карыстацца наступнымі ўласцівасцямі:

$$C(CF)=F;$$
$$C\bigcup_{\alpha}F_{\alpha}=\bigcap_{\alpha}CF_{\alpha};$$

$$C\bigcap_{\alpha} F_\alpha = \bigcup_{\alpha} CF_\alpha .$$

Няхай F_α (α=1, 2, …, n) — замкнутыя мноствы. Тады CF_α згодна з тэарэмай 3 будуць адкрытымі мноствамі, таму мноства $\bigcap_{\alpha=1}^{n} CF_\alpha$ — адкрытае (гл. тэарэму 1).

Паколькі $\bigcap_{\alpha=1}^{n} CF_\alpha = C\bigcap_{\alpha=1}^{n} F_\alpha$, то $C\bigcap_{\alpha=1}^{n} F_\alpha$ — адкрытае мноства. Адсюль, скарыстаўшы тэарэму 2, атрымліваем, што $C(C\bigcup_{\alpha=1}^{n} F_\alpha) = \bigcup_{\alpha=1}^{n} F_\alpha$ будзе замкнутым мноствам.

2. Няхай дадзена любая сукупнасць замкнутых мностваў F_α. Тады згодна з тэарэмай 3 мноствы CF_α будуць адкрытымі. Скарыстаўшы тэарэму 1, атрымліваем, што $\bigcup_{\alpha} CF_\alpha$ — адкрытае мноства. Паколькі $\bigcup_{\alpha} CF_\alpha = C\bigcup_{\alpha} F_\alpha$, то $C\bigcup_{\alpha} F_\alpha$ ёсць адкрытае мноства. Адсюль, на падставе тэарэма 2, будзем мець, што мноства $C(C\bigcap_{\alpha} F_\alpha) = \bigcap_{\alpha} F_\alpha$ будзе замкнутым.

ЗАЎВАГА 5. Аб'яднанне бясконцай сукупнасці замкнтых мностваў можа і не быць замкнутым мноствам.

ПРЫКЛАД 8. На лікавай прамой разгледзім мноствы $F_\alpha=[\frac{1}{\alpha}, \; 2]$, α=1, 2, 3, …. Гэтыя мноствы з'яўляюцца замкнутымі. Аднак $\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} F_\alpha = [0, 2]$ не з'яўляецца замкнутым.

2.3. Поўныя метрычныя прасторы

Няхай дадзена метрычная прастора X, г. зн. пара (X, ρ), дзе ρ — адлегласць.

Раней было ўведзена паняцце фундаментальнай паслядоўнасці пунктаў прасторы E_1. Гэта паняцце можна абагульніць на выпадак адвольнай метрачный прасторы.

АЗНАЧЭННЕ 1. Паслядоўнасць (x_n) пунктаў метрычнай прасторы называецца фундаментальной, калі для любога дадатнага ліку ε існуе такі нумар N, што для ўсіх нумароў m і n, большых N, выконваецца няроўнасць $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$, г. зн.

$$\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n, m>N \Rightarrow \rho(x_n, x_m)<\varepsilon.$$

Раней было ўведзена паняцце збежнай паслядоўнасці пунктаў метрычнай прасторы.

АЗНАЧЭННЕ 2. Пункт $a\in$X называецца лімітам паслядоўнасці (x_n) пунктаў метрычнай прасторы X, калі $\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n>N \Rightarrow \rho(x_n, a)<\varepsilon$.

Калі пункт a з'яўляецца лімітам паслядоўнасці (x_n), то гэты факт сімвалічна запісваюць так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Пры гэтым гавораць, што паслядоўнасць (x_n) збягаецца да a. Калі паслядоўнасць (x_n) мае ліміт, то яна называецца збежнай.

Узнікае пытанне: як звязаны паміж сабой паняцці фундаментальнай і збежнай паслядоўнасцяў пунктаў метрычнай прасторы?

У выпадку метрычнай прасторы E_1 гэтае пытанне ўжо развязана. Была даказана наступная тэарэма: для таго, каб паслядоўнасць (x_n) пунктаў прасторы E_1 была збежнай, неабходна і дастаткова, каб яна была фундаментальнай.

Узнікае пытанне: ці будзе так у выпадку адвольнай метрычнай прасторы?

ТЭАРЭМА 1. Кожная збежная паслядоўнасць (x_n) пунктаў метрычай прасторы X з'яўляецца фундаментальнай.

ДОКАЗ. Згодна з умовай тэарэмы паслядоўнасць (x_n) збягаецца да некаторага пункта $a \in$ X. Таму маем:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>N \Rightarrow \rho(x_n, a)<\varepsilon/2.$$

Адсюль з няроўнасці трохвугольніка вынікае, што $\forall n,\ m>N$ выконваецца няроўнасць

$$\rho(x_n, x_m)\le\rho(x_n, a)+\rho(a, x_m)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Такім чынам, мы даказалі, што

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n,\ m>N \Rightarrow \rho(x_n, x_m)<\varepsilon,$$

гэта і сведчыць аб тым, што дадзеная паслядоўнасць (x_n) з'яўляецца фундаментальнай.

Адзначым, што сцвярджэнне, якое з'яўляецца адваротным тэарэме 1, не мае месца, бо існуюць такія метрычныя прасторы, у якіх маюцца фундаментальныя паслядоўнасці, якія не збягаюцца.

ПРЫКЛАД 1. Разгледзім мноства разнастайных рацыянальных лікаў з адлегласцю, якая вызначаецца формулай $\rho(x, y)=|x-y|$.

Гэта метрычная прастора. Яна з'яўляецца падпрасторай прасторы E_1.

Разгледзім паслядоўнасць $\left(x_n = \dfrac{1}{n}\right)$ пунктаў гэтай прасторы. Гэтая паслядоўнасць з'яўляецца фундаментальнай і збягаецца да 0.

Разгледзім яшчэ адну паслядоўнасць $\left(x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$ пунктаў гэтай прасторы. Гэтая паслядоўнасць з'яўляецца фундаментальнай, аднак у разглядаемай прасторы яна не з'яўляецца збежнай, бо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ — ірацыянальны лік.

ПРЫКЛАД 2. Разгледзім мноства разнастайных мнагаскладаў з адлегласцю, якая вызначаецца роўнасцю $\rho(x, y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|$.

Гэта метрычная прастора (яна з'яўляецца падпрасторай прасторы $C_{[0,\ 1]}$), якую будзем абазначаць праз X.

Адзначым, што збежнасць паслядоўнасці $(x_n(t))$ азначае паўнамерную збежнасць на адрэзку [0, 1] паслядоўнасці мнагаскладаў $(x_n(t))$.

Разгледзім якую-небудзь паслядоўнасць $(x_n(t))$ раўнамерна збежную на адрэзку [0, 1] да функцыі $\sin t$, напрыклад, паслядоўнасць мнагаскладаў Тэйлара.

Функцыя $\sin t$ не з'яўляецца элементам прасторы X, бо не з'яўляецца мнагаскладам.

Відавочна, што паслядоўнасць $(x_n(t))$ з'яўляецца фундаментальнай, аднак яна не збягаецца ў разглядаемай прасторы X.

З прыкладаў 1 і 2 вынікае, што не кожная метрычная прастора валодае той уласцівасцю, што кожная фундаментальная паслядоўнасць збягаецца.

АЗНАЧЭННЕ 3. Калі ў метрычнай прасторы X любая фундаментальная паслядоўнасць збягаецца, то гэта прастора называецца поўнай.

Прасторы, якія былі разгледжаны ў прыкладах 1 і 2 не з'яўляецца поўнымі.

Існуюць поўныя метрычныя прасторы.

ПРЫКЛАД 3. Дакажам, што m-мерная эўклідава прастора E_m з'яўляецца поўнай. Пры доказе будзем карыстацца паўнатой прасторы E_1.

Разгледзім адвольную фундаментальную паслядоўнасць пунктаў прасторы E_m:

$$x^{(p)}=\left(\xi_1^{(p)},\ \xi_2^{(p)},\ \ldots,\ \xi_m^{(p)}\right),\ \text{дзе } p=1, 2, 3, \ldots .$$

Паколькі разглядаемая паслядоўнасць з'яўляецца фундаментальнай, то

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall p,\ q>N \Rightarrow \rho\left(x^{(p)},\ q^{(p)}\right)=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\xi_k^{(p)}-\xi_k^{(q)}\right)^2}<\varepsilon .$$

Адсюль вынікае, што $\forall p,\ q>N$ будзем мець:

$$\left|\xi_1^{(p)}-\xi_1^{(q)}\right|<\varepsilon,\quad \left|\xi_2^{(p)}-\xi_2^{(q)}\right|<\varepsilon,\ \ldots,\quad \left|\xi_m^{(p)}-\xi_m^{(q)}\right|<\varepsilon .$$

З апошніх няроўнасцяў робім высновы, што фундаментальнымі будуць наступныя лікавыя паслядоўнасці: $\left(\xi_1^{(p)}\right),\ \left(\xi_2^{(p)}\right),\ \ldots,\ \left(\xi_m^{(p)}\right)$.

Адсюль і з паўнаты прасторы E_1 вынікае, што кожная з пабудаваных паслядоўнасцяў збягаецца.

Няхай

$$\begin{aligned}&\lim_{p\to\infty}\xi_1^{(p)}=a_1,\\ &\lim_{p\to\infty}\xi_2^{(p)}=a_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\lim_{p\to\infty}\xi_m^{(p)}=a_m .\end{aligned}\qquad(1)$$

Разгледзім пункт $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Гэты пункт a належыць E_m.

З роўнасцяў (1) вынікае, што паслядоўнасць ($x^{(p)}$) пунктаў прасторы E_m збягаецца да пункта a:

$$\lim_{p\to\infty} x^{(p)} = a.$$

Такім чынам, мы даказалі, што ў прасторы E_m кожная фундаментальная паслядоўнасць збягаецца. Гэта сведчыць аб тым, што E_m — поўная метрычная прастора.

ПРЫКЛАД 4. Разгледзім прастору $C_{[0,\ 1]}$. Гэта мноства ўсіх функцый, непарыўных на адрэзку [0, 1], з адлегласцю $\rho(x, y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)–y(t)|$.

Дакажам, што гэтая прастора з'яўляецца поўнай.

Няхай ($x_n(t)$) — адвольная фундаментальная паслядоўнасць элементаў прасторы $C_{[0, 1]}$. Згодна з азначэннем фундаментальнай паслядоўнасці маем:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall m,\ n>N \Rightarrow \rho(x_n, x_m)=\max_{0\le t\le 1}|x_n(t)–y_m(t)|<\varepsilon.$$

Адсюль вынікае, што

$$|x_n(t)–y_m(t)|<\varepsilon \qquad (2)$$

для $\forall t\in[0, 1]$. Атрымліваем, што для кожнага $t\in[0, 1]$ лікавая паслядоўнасць ($x_n(t)$) з'яўляецца фундаментальнай, таму яна збягаецца, бо прастора E_1 — поўная.

Няхай $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$.

Разгледзім функцыю $x(t)$, якая зададзена на адрэзку [0, 1] запісанай вышэй роўнасцю. Дакажам, што функцыя $x(t)$ непарыўная на адрэзку [0, 1], г. зн. з'яўляецца элементам прасторы $C_{[0, 1]}$.

З гэтай мэтай у няроўнасці (2) пяройдзем да ліміту пры $m\to\infty$. Атрымаем:

$$|x_n(t)–x(t)|\le\varepsilon,\ \forall t\in[0, 1],\ \forall n>N.$$

Такім чынам, мы даказазалі, што

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>N,\ \forall t\in[0, 1] \Rightarrow |x_n(t)–x(t)|\le\varepsilon. \qquad (3)$$

Гэта сведчыць аб тым, што функцыйная паслядоўнасць ($x_n(t)$) раўнамерна збягаецца да функцыі $x(t)$ на адрэзку [0, 1]. Паколькі ўсе элементы разглядаемай функцыйнай паслядоўнасці з'яўляюцца непарыўнымі функцыямі, то лімітавая функцыя $x(t)$ таксама будзе непарыўнай на адрэзку [0, 1], г. зн. $x(t)\in C_{[0, 1]}$.

Дакажам цяпер, што паслядоўнасць ($x_n(t)$) элементаў прасторы $C_{[0, 1]}$ збягаецца да элемента $x(t)$ па метрыцы гэтай прасторы. З гэтай мэтай скарыстаем сцвярджэнне (3). Скарыстаўшы яго, атрымаем:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n>N, \Rightarrow \rho(x_n, x)=\max_{0\le t\le 1}|x_n(t)–x(t)|\le\varepsilon.$$

Гэта і сведчыць аб тым, што паслядоўнасць ($x_n(t)$) элементаў прасторы $C_{[0,\ 1]}$ збягаецца да элемента $x(t)$ гэтай прасторы. Такім чынам, мы даказалі, што ў прасторы $C_{[0,\ 1]}$ любая фундаментальная паслядоўнасць збягаецца, г. зн. $C_{[0,\ 1]}$ — поўная метрычная прастора.

ТЭАРЭМА 2. Няхай мноства X з адлегласцю ρ — поўная метрычная прастора. Калі X_1 з'яўляецца замкнутым падмноствам дадзенай прасторы, то X_1 з адлегласцю ρ будзе поўнай метрычнай прасторай.

ДОКАЗ. Спачатку адзначым, што X_1 з'яўляецца метрычнай прасторай. Дакажам, што гэтая метрычная прастора з'яўляецца поўнай. Разгледзім адвольную фундаментальную паслядоўнасць (x_n) пунктаў прасторы X_1. Паколькі $X_1 \subset X$, то (x_n) з'яўляецца таксама фундаментальнай паслядоўнасцю пунктаў прасторы X. Прастора X з'яўляецца поўнай, таму існуе такі пункт $a \in X$, што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Лёгка заўважыць, што $a \in X_1$. Сапраўды, калі a супадае з якім-небудзь элементам паслядоўнасці (x_n), то $a \in X_1$. Калі a не супадае з якім-небудзь элементам паслядоўнасці (x_n), то з азначэння ліміту паслядоўнасці вынікае, што a будзе лімітавым пунктам мноства X_1. Паколькі X_1 — замкнутае мноства, то будзем мець, што $a \in X_1$.

Такім чынам, мы даказалі, што для любой фундаментальнай паслядоўнасці (x_n) пунктаў прасторы X_1 існуе такі пункт $a \in X_1$, што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Гэта і сведчыць аб паўнаце прасторы X_1.

ПРЫКЛАД 5. Адрэзак $[a, b]$ з'яўляецца замкнутым падмноствам поўнай метрычнай прасторы E_1. Таму адрэзак $[a, b]$ з адлегласцю $\rho(x, y)=|x-y|$ будзе поўнай метрычнай прасторай.

2.4. Прынцып сціскальных адлюстраванняў

У параграфе 1.2. было ўведзена паняцце адлюстравання мноства X у мноства Y. Гэтае адлюстраванне называюць таксама функцыяй або аператарам.

Калі зададзена адлюстраванне A мноства X у мноства Y, то гавораць таксама, што на мностве X зададзены аператар A са значэннямі ў мностве Y.

У тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў мы вывучалі тэарэму аб існаванні і адзінасці рашэння дыферэнцыяльнага раўнання. Мы пазнаёміліся з доказам гэтай тэарэмы метадам паслядоўных набліжэнняў. Гэты доказ паслужыў прататыпам наступнай тэарэмы.

ТЭАРЭМА Банаха (прынцып сціскальных адлюстраванняў). Няхай у поўнай метрычнай прасторы X зададзены аператар A са значэннямі ў гэтай жа прасторы X. Няхай існуе такі лік $0<\alpha<1$, што для любых двух пунктаў $x', x'' \in X$ выконваецца няроўнасць

$$\rho(A(x'), A(x'')) \le \alpha\rho(x', x''). \quad (1)$$

Тады ў прасторы X існуе адзін і толькі адзін пункт $\bar{x}$, такі, што $A(\bar{x})=\bar{x}$.

Пункт $\bar{x}$ называецца нерухомым пунктам.

Адлюстраванне A прасторы X у сябе называецца сціскальным, калі існуе такі пункт $0<\alpha<1$, што $\forall x', x'' \in X$ выконваецца няроўнасць (1). Адсюль і паходзіць назва «прынцып сціскальных адлюстраванняў».

Падчас тэарэму Банаха фармулююць наступным чынам: сціскальнае адлюстраванне A поўнай метрычнай прасторы ў сябе мае адзін і толькі адзін нерухомы пункт.

ДОКАЗ. Разгледзім адвольны пункт $x_0 \in X$.

Мяркуем:

$$x_1=\mathrm{A}(x_0),$$
$$x_2=\mathrm{A}(x_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n=\mathrm{A}(x_{n-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Дакажам, што ў прасторы X паслядоўнасць (x_n) збягаецца да некаторага пункта. Дакажам таксама, што гэты пункт і з'яўляецца тым пунктам, аб існаванні якога сцвярджае тэарэма.

Спачатку дакажам, што паслядоўнасць (x_n) з'яўляецца фундаментальнай. Заўважым, што

$$\rho(x_1, x_2)=\rho(\mathrm{A}(x_0), \mathrm{A}(x_1))\leq\alpha\rho(x_0, x_1)=\alpha\rho(x_0, \mathrm{A}(x_0)).$$

Такім чынам, $\rho(x_1, x_2)\leq\alpha\rho(x_0, \mathrm{A}(x_0))$.

Маем: $\rho(x_2, x_3)=\rho(\mathrm{A}(x_1), \mathrm{A}(x_2))\leq\alpha\rho(x_1, x_2)\leq\alpha^2\rho(x_0, \mathrm{A}(x_0))$.

Такім чынам, $\rho(x_2, x_3)\leq\alpha^2\rho(x_0, \mathrm{A}(x_0))$.

Заўважаем закон: $\rho(x_k, x_{k+1})\leq\alpha^k\rho(x_0, \mathrm{A}(x_0))$.

У праўдзівасці яго для любога натуральнага ліку k можна пераканацца метадам матэматычнай індукцыі.

Возьмем цяпер два адвольныя натуральныя лікі m і n. Няхай для пэўнасці $m>n$. Скарыстаўшы няроўнасць трохвугольніка і атрыманыя вышэй няроўнасці, будзем мець:

$$\rho(x_n, x_m)\leq\rho(x_n, x_{n+1})+\rho(x_{n+1}, x_m)\leq\rho(x_n, x_{n+1})+\rho(x_{n+1}, x_{n+2})+\ldots+\rho(x_{m-1}, x_m)\leq$$
$$\leq(\alpha^n+\alpha^{n+1}+\ldots+\alpha^{m-1})\rho(x_0, \mathrm{A}(x_0))=\frac{\alpha^n-\alpha^m}{1-\alpha}\rho(x_0, \mathrm{A}(x_0))\leq\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, \mathrm{A}(x_0)).$$

Такім чынам, мы даказалі праўдзівасць няроўнасці

$$\rho(x_n, x_m)\leq\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, \mathrm{A}(x_0)). \qquad (2)$$

Паколькі $\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, \mathrm{A}(x_0))\to 0$ пры $n\to\infty$ (бо $0<\alpha<1$), то скарыстаўшы азначэнне ліміту паслядоўнасці, атрымаем:

$$\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n>N \Rightarrow \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, \mathrm{A}(x_0))<\varepsilon,$$

таму на падставе (2) $\forall m>n>N$, будзем мець, што $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$.

Такім чынам, мы даказалі, што паслядоўнасць (x_n) з'яўляецца фундаментальнай.

Па ўмове тэарэмы метрычная прастора X з'яўляецца поўнай, таму разглядаемая паслядоўнасць (x_n) збягаецца, г. зн. у прасторы X існуе такі пункт $\bar{x}$, што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\bar{x}$, г. зн.

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ \bar{x})=0. \qquad (3)$$

Цяпер пакажам, што пункт $\bar{x}$ з'яўляецца нерухомым пунктам апeратара А, г. зн. што $A(\bar{x})=\bar{x}$.

Заўважым, што

$$\rho(\bar{x}, A(\bar{x}))\le\rho(\bar{x}, x_n)+\rho(x_n, A(\bar{x}))=\rho(\bar{x}, x_n)+\rho(A(x_{n-1}, A(\bar{x}))\le\rho(\bar{x}, x_n)+\alpha\rho(x_{n-1}, \bar{x}).$$

Такім чынам, $0\le\rho(\bar{x}, A(\bar{x}))\le\rho(\bar{x}, x_n)+\alpha\rho(x_{n-1}, \bar{x})$.

У гэтай няроўнасці пяройдзем да ліміту пры $n\to\infty$ і, скарыстаўшы (3), атрымаем: $0\le\rho(\bar{x}, A(\bar{x}))\le 0 \Rightarrow \rho(\bar{x}, A(\bar{x}))=0 \Rightarrow A(\bar{x})=\bar{x}$.

Існаванне нерухомага пункта аператара А даказалі. Дакажам адзінасць нерухомага пункта аператара А. Мяркуем адваротнае. Няхай існуюць два пункты

$$\bar{x}, \bar{y}\in X \text{ што } A(\bar{x})=\bar{x},\ A(\bar{y})=\bar{y}.$$

Тады $\rho(\bar{x}, \bar{y})=\rho(A(\bar{x}), A(\bar{y}))\le\alpha\rho(\bar{x}, \bar{y})$, г. зн.

$$\rho(\bar{x}, \bar{y})\le\alpha\rho(\bar{x}, \bar{y}).$$

Адсюль вынікае, што $\alpha\ge 1$, але гэта супярэчыць таму, што па ўмове $0\le\alpha\le 1$.

ЗАЎВАГА 1. Калі ў няроўнасці (2) перайсці да ліміту пры $m\to\infty$, то атрымаем:

$$\rho(x_n, \bar{x})\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, A(x_0)). \qquad (4)$$

Мы атрымалі ацэнку хібнасці, якая атрымліваецца пры замене $\bar{x}$ на x_n.

Адзначым таксама, што пабудову паслядоўнасці x_0, $x_1=A(x_0)$, $x_2=A(x_1)$, …, збежнай да нерухомага пункта $\bar{x}$, можна ажыццяўляць зыходзячы з любога элемента $x_0\in X$.

ПРЫКЛАД. Дадзена раўнанне

$$f(x)=x, \qquad (5)$$

дзе f — функцыя, зададзеная на адрэзку $[a, b]$, значэнні якой таксама належаць адрэзку $[a, b]$.

Будзем таксама меркаваць, што гэтая функцыя з'яўляецца дыферэнцавальнай на адрэзку $[a, b]$, і што $|f'(x)|\le\alpha<1 \quad \forall x\in[a, b]$.

Дакажам, што пры гэтых умовах раўнанне (5) мае рашэнне і толькі адно.

Спачатку адзначым, што адрэзак $[a, b]$ з адлегласцю $\rho(x, y)=|x-y|$ з'яўляецца поўнай метрычнай прасторай. Гэта было абгрунтавана ў канцы папярэдняга параграфа.

Далей заўважым, што дадзеная функцыя з'яўляецца адлюстраваннем адрэзка $[a, b]$ у сябе.

Гэта адлюстраванне з'яўляецца сціскальным, бо па формуле Лагранжа будзем мець:
$|f(x')-f(x'')|=|f'(\xi)||x'-x''|\le\alpha|x'-x''|,\ \forall x', x''\in[a, b]$,
г. зн. $\rho(f(x'), f(x''))\le\alpha\rho(x', x''),\ \forall x', x''\in[a, b]$, дзе $0<\alpha<1$.

Такім чынам, усе патрабаванні тэарэмы Банаха выкананы. Згодна з гэтай тэарэмай на адрэзку $[a, b]$ існуе адзін і толькі адзін пункт $\bar{x}$, што $f(\bar{x})=\bar{x}$.

Гэтым даказана, што раўнанне (5) мае рашэнне і толькі адно.

Гэтае рашэнне з’яўляецца лімітам наступнай паслядоўнасці:

$$x_0,\ x_1=f(x_0),\ x_2=f(x_1),\ \ldots,\ x_n=f(x_{n-1}),\ \ldots,$$

дзе x_0 — адвольны пункт адрэзка $[a, b]$. Кожны элемент x_n гэтай паслядоўнасці можна ўзяць у якасці набліжанага значэння раўнання (5). Атрыманая пры гэтым хібнасць вылічаецца па формуле (4): $\left|x_n - \bar{x}\right| \le \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\left|x_0 - f(x_0)\right|$.

ЗАЎВАГА 2. Пры дапамозе прынцыпу сціскальных адлюстраванняў можна даказаць тэарэму пра існаванне і адзінасць рашэння дыферэнцыяльнага раўнання.

3. БУДОВА ЛІНЕЙНЫХ МНОСТВАЎ. МЕРА ЛЕБЕГА

3.1. Будова лінейных адкрытых і замкнутых мностваў

У дадзеным і наступным параграфах мы будзем вывучаць лінейныя мноствы, г. зн. мноствы пунктаў эўклідавай прамой. Паколькі эўклідавая прамая з’яўляецца метрычнай прасторай, то ўсе тэарэмы, даказаныя ў параграфе 2.2 будуць праўдзівымі і для лінейных адкрытых і замкнутых мностваў. Аднак лінейныя адкрытыя і замкнутыя мноствы валодаюць шэрагам спецыфічных уласцівасцяў. Некаторыя з іх будуць вывучаны ў дадзеным параграфе.

I. Папярэдне нагадаем азначэнне верхняй мяжы лікавага мноства і вывучым некаторыя ўласцівасці.

АЗНАЧЭННЕ 1. Ніжняй мяжой мноства Е называецца найбольшы з лікаў, якія абмяжоўваюць гэтае мноства знізу.

Гэтае азначэнне можна сфармуляваць і наступным чынам: лік A называецца ніжняй мяжой мноства Е, калі ён задавальняе наступным дзвюм умовам:

1) для любога $x\in$E выконваецца няроўнасць $x\geq A$;
2) для любога дадатнага ліку ε існуе такі $x_0\in$E, што $x_0<A+\varepsilon$.

Сімвалічны запіс ніжняй мяжы мноства Е: $A=\inf$E.

АЗНАЧЭННЕ 2. Верхняй мяжой мноства Е называецца найменшы з лікаў, якія абмяжоўваюць гэтае мноства зверху.

Гэтае азначэнне можна сфармуляваць і наступным чынам: лік B называецца верхняй мяжой мноства Е, калі ён задавальняе наступным дзвюм умовам:

1) $x\leq B$, $\forall x\in$E;
2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in$E $\Rightarrow x_0>B-\varepsilon$.

Сімвалічны запіс верхняй мяжы мноства Е: $B=\sup$E.

ПРЫКЛАД 1. $\inf(a, b)=a$, $\sup(a, b)=b$.

ПРЫКЛАД 2. $\sup\{1, 2, 3\}=3$, $\inf\{1, 2, 3\}=1$.

Аксіёма пра верхнюю мяжу сведчыць аб наступным: калі мноства абмежавана зверху, то яно мае верхнюю мяжу.

Пры доказе гэтай аксіёмы лёгка даказаць наступную тэарэму: калі мноства абмежавана знізу, то яно мае ніжнюю мяжу.

З разгледжаных вышэй прыкладаў бачым, што верхняя (ніжняя) мяжа як належыць, так і не належыць дадзенаму мноству.

ТЭАРЭМА 1. Калі верхняя мяжа мноства Е існуе, але не належыць мноству Е, то яна з’яўляецца лімітавым пунктам гэтага мноства.

ДОКАЗ. Згодна з умовай тэарэмы мноства Е мае верхнюю мяжу. Абазначым яе праз $B=\sup$E. Трэба даказаць, што B з’яўляецца лімітавым пунктам мноства Е.

Возьмем адвольны лік $\varepsilon>0$ і разгледзім ε-наваколле пункта B, г. зн. інтэрвал $(B-\varepsilon, B+\varepsilon)$. Паколькі B з’яўляецца верхняй мяжой мноства Е, то згодна з азначэннем верхняй мяжы існуе ў мностве Е такі пункт x_0, для якога выконваецца няроўнасць

$$B-\varepsilon<x_0\leq B.$$

Па ўмове $B\notin E$, таму маем, што $B-\varepsilon<x_0<B$. З гэтай няроўнасці робім высновы, што $x_0\in(B-\varepsilon, B+\varepsilon)$ і $x_0\notin B$.

Такім чынам, мы даказалі, што любое ε-наваколле пункта B змяшчае прынамсі адзін пункт $x_0\in E$, адрозны ад B, г. зн. B — лімітавы пункт.

Адзначым, што аналагічная тэарэма мае месца і для ніжняй мяжы.

ЗАЎВАГА 1. Калі верхняя мяжа мноства E належыць E, то яна можа быць як лімітавам, так і ізаляваным пунктам гэтага мноства.

ПРЫКЛАД 3. $\sup\left\{2,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3},\ 1\frac{3}{4},\ ...\right\}=2$. 2 — лімітавы пункт дадзенага мноства.

ПРЫКЛАД 4. $\sup\{1, 2, 3\}=3$. 3 — ізаляваны пункт дадзенага мноства.

ТЭАРЭМА 2. Калі мноства E з'яўляецца абмежаваным зверху (знізу) і замкнутым, то яно змяшчае сваю верхнюю (ніжнюю) мяжу.

ДОКАЗ. Паколькі E абмежаванае зверху, то яно мае верхнюю мяжу B. Дакажам, што $B\in E$. Мяркуем адваротнае, што $B\notin E$. Тады паводле тэарэмы 1 маем, што B з'яўляецца лімітавым пунктам мноства E. Па ўмове мноства E з'яўляецца замкнутым, таму $B\in E$. Мы прыйшлі да супярэчнасці.

АЗНАЧЭННЕ 3. Няхай E — абмежаванае мноства, $A=\inf E$, $B=\sup E$. Адрэзак $[A, B]$ называецца найменшым адрэзкам, які змяшчае дадзенае мноства.

Адзначым, што калі мноства E з'яўляецца замкнутым, то канцы гэтага адрэзка належаць дадзенаму мноству.

ПРЫКЛАД 5. Адрэзак $[0, 1]$ — найменшы адрэзак, які змяшчае мноства $\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ ...\right\}$.

ПРЫКЛАД 6. Разгледзім мноства $\{1, 2, 3\}$. Адрэзак $[1, 3]$ — найменшы адрэзак, які змяшчае дадзенае мноства.

II. Будова лінейных адкрытых мностваў

АЗНАЧЭННЕ 4. Няхай G — адкрытае мноства. Калі інтэрвал (a, b) змяшчаецца ў G, але яго канцы гэтаму мноству не належаць, то гэты інтэрвал называецца складовым інтэрвалам мноства G.

ПРЫКЛАД 7. $G=(1, 3)\cup(5, 7)$ — адкрытае мноства. $(1, 3)$, $(5, 7)$ — складовыя інтэрвалы гэтага мноства.

Пяройдзем да вывучэння будовы лінейных мностваў. Папярэдне дакажам наступную тэарэму.

ТЭАРЭМА 3. Калі G ёсць непустое абмежаванае адкрытае мноства, то кожны яго пункт належыць некатораму складоваму інтэрвалу.

ДОКАЗ. Разгледзім адвольны пункт $x_0\in G$. Дакажам існаванне такога складовага інтэрвала мноства G, які змяшчае пункт x_0.

Разгледзім дапаможнае мноства $F=[x_0, +\infty)\cap CG$. Гэта мноства пунктаў, якія размяшчаюцца правей пункта x_0 і не належаць G. Мноства F абмежавана знізу пунктам x_0, таму мае ніжнюю мяжу, якую абазначым праз μ. З азначэння ніжняй мяжы вынікае, што

$$x_0 \le \mu. \tag{1}$$

Дакажам, што

$$x_0 < \mu. \tag{2}$$

Паколькі $[x_0, +\infty)$ — замкнутае мноства, CG — замкнутае мноства як дадатак да адкрытага, то мноства $F=[x_0, +\infty)\cap CG$ з'яўляецца замкнутым мноствам як перасячэнне двух замкнутых мностваў. Таму паводле тэарэмы 2 маем, што $\mu \in F$. Паколькі $x0 \notin F$ ($x_0 \in G \Rightarrow x_0 \notin CG \Rightarrow x_0 \notin [x_0, +\infty)\cap CG$), то $x_0 \ne \mu$. Адсюль і з няроўнасці (1) вынікае, што $x_0 < \mu$.

Дакажам, што

$$\mu \notin G. \tag{3}$$

Сапраўды, паколькі $\mu \in F$, то $\mu \in CG$, адкуль і вынікае, што $\mu \notin G$.

Дакажам, што

$$[x_0, \mu) \subset G. \tag{4}$$

Мяркуем адваротнае. Тады павінны знайціся такі пункт y, што $y \in [x_0, \mu)$ і $y \notin G$. Адсюль вынікае, што $y \in F$ і $y < \mu$. Аднак гэта з'яўляецца немагчымым, бо μ — ніжняя мяжа мноства F. Значыць, сцвярджэнне (4) мы даказалі.

Такім чынам, мы даказалі існаванне такога пункта μ, што

1) $x_0 < \mu$,
2) $\mu \notin G$,
3) $[x_0, \mu) \subset G$.

Аналагічным чынам даказваецца існаванне такога пункта λ, што

1) $x_0 > \lambda$,
2) $\lambda \notin G$,
3) $(\lambda, x_0] \subset G$.

Разгледзім інтэрвал (λ, μ). Гэты інтэрвал з'яўляецца, відавочна, складовым інтэрвалам мноства G і змяшчае пункт x_0. Тэарэму 3 даказалі.

Разам з гэтым мы даказалі існаванне складовых інтэрвалаў у кожнага непустога абмежаванага адкрытага мноства.

ТЭАРЭМА 4. Калі (λ, μ) і (σ, τ) — два складовыя інтэрвалы аднаго і таго ж адкрытага мноства G, то яны ці супадаюць, ці не перасякаюцца.

ДОКАЗ. Лагічна магчымы два выпадкі:

1) ці не перасякаюцца;
2) ці перасякаюцца, г. зн. маюць агульны пункт x:

$$\lambda < x < \mu, \ \sigma < x < \tau.$$

Дакажам, што ў другім выпадку складовыя інтэрвалы супадаюць, г. зн. $\sigma=\lambda$, $\mu=\tau$.

Мяркуем, што $\tau < \mu$. Тады $\tau \in (\lambda, \mu)$, адкуль вынікае, што $\tau \in G$. Аднак гэта з'яўляецца немагчымым, бо τ — канцавы пункт складовага інтэрвала мноства G. Такім чынам, мы даказалі немагчымасць няроўнасці $\tau < \mu$.

Аналагічна даказваецца немагчымасць няроўнасці $\tau > \mu$. Застаецца толькі $\tau = \mu$.

Аналагічным чынам даказваецца, што $\sigma = \lambda$.

ВЫНІК. Мноства розных складовых інтэрвалаў непустога абмежаванага адкрытага мноства G з'яўляецца канечным або злічоным.

ДОКАЗ. Кожнаму з такіх інтэрвалаў паставім у адпаведнасць які-небудзь рацыянальны пункт, які належыць гэтаму інтэрвалу. Атрымаем узаемна адназначную адпаведнасць паміж мноствам усіх разглядаемых інтэрвалаў і часткай мноства рацыянальных лікаў. Паколькі частка мноства рацыянальных лікаў з'яўляецца канечным або злічоным, то разглядаемае мноства інтэрвалаў будзе канечным або злічоным.

З тэарэмы 3 і выніку тэарэмы 4 атрымліваем тэарэму пра структуру лінейнага адкрытага мноства.

ТЭАРЭМА 5. Кожнае непустое абмежаванае адкрытае мноства G з'яўляецца аб'яднаннем канечнай або злічонай сукупнасці інтэрвалаў, якія парамі не перасякаюцца, і канцы якіх не належаць мноству G.

Інакш кажучы, кожнае непустое абмежаванае адкрытае мноства G ёсць аб'яднанне канечнай або злічонай сукупнасці ўсялякіх розных складовых інтэрвалаў гэтага мноства.

ДОКАЗ. Няхай A — аб'яднанне ўсіх розных складовых інтэрвалаў мноства G. Гэтае мноства згодна з вынікам тэарэмы 4 будзе канечным або злічоным. Дакажам, што G=A.

Няхай $x_0 \in$G, адсюль на падставе тэарэмы 3 вынікае, што x_0 належыць якому-небудзь складоваму інтэрвалу мноства G. Значыць, $x_0 \in$A. Такім чынам, G$\subset$A.

Няхай $x_0 \in$A. Тады атрымліваем, што x_0 належыць якому-небудзь інтэрвалу мноства G. Значыць, $x_0 \in$G. Такім чынам, A$\subset$G. Паколькі G$\subset$A і A$\subset$G, то A=G.

ЗАЎВАГА 2. Мае месца і адваротнае тэарэме 5 сцвярджэнне: любое мноства, якое з'яўляецца аб'яднаннем інтэрвалаў, будзе адкрытым.

III. Будова замкнутых лінейных мностваў

ТЭАРЭМА 6. Калі S=[A, B] — найменшы адрэзак, які змяшчае замкнутае мноства F, то мноства C_SF=S\F будзе адкрытым.

ДОКАЗ. Дакажам праўдзівасць роўнасці

$$C_SF=(A, B)\cap CF, \tag{5}$$

дзе CF — дадатак мноства F да эўклідавай прамой. Адсюль будзе вынікаць, што мноства C_SF з'яўляецца адкрытым (як перасячэнне адкрытых мностваў).

Няхай $x_0 \in C_S$F. Адсюль вынікае, што $x_0 \in [A, B]$ і $x_0 \notin$F. Паколькі $x_0 \notin$F, то $x_0 \neq A$, $x_0 \neq B$ (тэарэма 2).

Маем $x_0 \in [A, B]$ і $x_0 \neq A$, $x_0 \neq B$, значыць $x_0 \in (A, B)$. Паколькі $x_0 \notin$F, то $x_0 \in$CF.

Такім чынам, $x_0 \in$CF і $x_0 \in (A, B)$. Адсюль вынікае, што $x_0 \in (A, B)\cap$CF.

Гэтым мы даказалі, што C_SF$\subset(A, B)\cap$CF.

Адваротнае ўключэнне $(A, B)\cap$CF$\subset C_S$F з'яўляецца відавочным.

Такім чынам, роўнасць (5) даказалі, а разам з гэтым даказалі і тэарэму 6.

Цяпер мы можам высветліць структуру непустога абмежаванага замкнутага мноства F. Паколькі $F=S\setminus C_S F$, то з тэарэм 5 і 6 вынікае праўдзівасць наступнай тэарэмы.

ТЭАРЭМА 7. Кожнае непустое абмежаванае замкнутае мноства F з'яўляецца ці адрэзкам, ці атрымана з некаторага адрэзка выкідваннем з гэтага адрэзка канечнай або злічонай сукупнасці інтэрвалаў, якія парамі не перасякаюцца, і канцы якіх належаць дадзенаму мноству.

ПРЫКЛАД 8. $\left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots\right\}=[0,\ 1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n}\right).$

АЗНАЧЭННЕ 5. Складовыя інтэрвалы мноства $C_S F$ называюцца дадатковымі інтэрваламі мноства F.

ЗАЎВАГА 3. Мае месца сцвярджэнне, адваротнае тэарэме 7: любое мноства, атрыманае з адрэзка выкідваннем некаторай сукупнасці інтэрвалаў, будзе замкнутым.

У праўдзівасці гэтага сцвярджэння лёгка пераканацца, калі скарыстаць наступную відавочную роўнасць:

$$[a,\ b]\setminus G=[a,\ b]\cap CG,$$

дзе G — адкрытае мноства, якое змяшчаецца ў $[a,\ b]$, CG — дадатак мноства G да эўклідавай прамой.

3.2. Дасканалыя мноствы

Працягнем вывучэнне лінейных мностваў.

І. Азначэнне дасканалага мноства і яго будова

АЗНАЧЭННЕ 1. Мноства P называецца дасканалым, калі яно змяшчае ўсе свае лімітавыя пункты, і кожны пункт гэтага мноства з'яўляецца лімітавым.

Інакш кажучы, мноства P называецца дасканалым, калі яно з'яўляецца замкнутым і не змяшчае ізаляваных пунктаў.

ПРЫКЛАД. Адрэзак $[a,\ b]$ з'яўляецца дасканалым мноствам. Інтэрвал $(a,\ b)$ і мноства $\left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots\right\}$ не з'яўляюцца дасканалымі мноствамі.

Вывучым зараз структуру дасканалага мноства. Паколькі гэтае мноства з'яўляецца замкнутым, то для яго мае месца тэарэма 7 папярэдняга параграфа. Аднак яго дадатковыя інтэрвалы валодаюць яшчэ некаторымі новымі ўласцівасцямі. Разгледзім гэтыя ўласцівасці.

ЛЕМА 1. Няхай G — непустое абмежаванае адкрытае мноства, а (a, b) — інтэрвал, які змяшчаецца ў G. Тады сярод складовых інтэрвалаў мноства G існуе такі, які змяшчае ў сябе інтэрвал (a, b).

ДОКАЗ. Няхай x_0 — адвольны пункт інтэрвала $(a,\ b)$. Зразумела, што $x_0\in G$. Таму гэты пункт належыць некатораму складоваму інтэрвалу (гл. тэарэму 3 параграфа 3.1). Абазначым гэты складовы інтэрвал праз $(\lambda,\ \mu)$. Дакажам, што $\mu\geq b$.

Мяркуем працілеглае, няхай $\mu<b$. Тады будзем мець, што $\mu\in(a,\ b)$, г. зн. $\mu\in G$. Аднак гэта немагчыма, бо μ з'яўляецца канцавым пунктам складовага інтэрвала, а такі канцавы пункт не належыць G. Такім чынам, мы даказалі, што $\mu\geq b$.

Аналагічна даказваецца, што $\lambda \leq a$. Гэтым даказана, што складовы інтэрвал (λ, μ) змяшчае дадзены інтэрвал.

ЛЕМА 2. Няхай F — непустое абмежаванае замкнутае мноства, S=[A, B] — найменшы адрэзак, які змяшчае F. Тады маюць месца наступныя сцвярджэнні.

1. Калі пункт x_0 з'яўляецца агульным канцом двух дадатковых інтэрвалаў мноства F, то x_0 з'яўляецца ізаляваным пунктам мноства F.

2. Калі пункт x_0 з'яўляецца канцом адрэзка S і адначасова з'яўляецца канцом аднаго з дадатковых інтэрвалаў мноства F, то x_0 — ізаляваны пункт мноства F.

3. Усе іншыя пункты мноства F не з'яўляюцца ізаляванымі пунктамі гэтага мноства.

ДОКАЗ. Праўдзівасць сцвярджэнняў 1 і 2 відавочная. Дакажам праўдзівасць сцвярджэння 3.

Сцвярджэнне 3 будзе даказаным, калі мы дакажам, што кожны ізаляваны пункт мноства F з'яўляецца пунктам, які апісаны ці ў сцвярджэнні 1, ці ў сцвярджэнні 2.

Няхай x_0 — ізаляваны пункт мноства F, прычым такі, што $A<x_0<B$. Дакажам, што гэты пункт з'яўляецца пунктам, які апісаны ў сцвярджэнні 1.

Згодна з азначэннем ізаляванага пункта існуе інтэрвал (α, β), які змяшчае пункт x_0, і ў якім няма пунктаў мноства F. Зразумела, што $(\alpha, \beta)\subset[A, B]$. Тады інтэрвал (x_0, β) зусім не змяшчае пунктаў мноства F, таму $(x_0, \beta)\subset C_S F$.

Паводле лемы 1 існуе такі дадатковы інтэрвал (λ, μ) мноства F, які змяшчае ў сябе інтэрвал (x_0, β).

Дакажам, што $\lambda=x_0$. Няроўнасць $\lambda<x_0$ з'яўляецца немагчымай, бо ў адваротным выпадку мы б мелі, што $x_0\notin F$. Няроўнасць $\lambda>x_0$ таксама з'яўляецца немагчымай, бо гэта супярэчыць таму, што $(x_0, \beta)\subset(\lambda, \mu)$. Такім чынам, застаецца $\lambda=x_0$, г. зн. x_0 з'яўляецца канцом аднаго з дадатковых інтэрвалаў мноства F. Аналагічна даказваецца, што x_0 з'яўляецца правым канцом аданага з дадатковых інтэрвалаў мноства F. Мы даказалі, што ў разглядаемым выпадку пункт x_0 з'яўляецца пунктам, які апісаны ў сцвярджэнні 1.

Няхай x_0 — ізаляваны пункт мноства F, прычым такі, што $x_0=A$ або $x_0=B$. Тады аналагічным чынам можна даказаць, што x_0 з'яўляецца пунктам, які апісаны ў сцвярджэнні 2.

ТЭАРЭМА. Любое непустое абмежаванае дасканалае мноства P ёсць ці адрэзак, ці атрымліваецца з некаторага адрэзка выкідваннем канечнай або злічонай сукупнасці інтэрвалаў, якія парамі не перасякаюцца і не маюць агульных пунктаў ні адзін з другім, ні з зыходным адрэзкам.

Любое мноства, якое атрымана гэтым спосабам, з'яўляецца дасканалым.

ДОКАЗ. Першая частка тэарэмы вынікае з тэарэмы 7 параграфа 3.1 і даказанай вышэй лемы 2.

Другая частка вынікае з заўвагі 3 параграфа 3.1 і лемы 2.

II. Кантаравы мноствы G_0, P_0

Разгледзім адрэзак [0, 1]. Падзелім яго на тры роўныя часткі пунктамі $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. Выключым сярэдні інтэрвал $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$. Кожны з застаўшыхся адрэзкаў $\left[0;\ \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3};\ 1\right]$ таксама падзелім на тры роўныя часткі пунктамі $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$ і $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$ і выключым сярэднія інтэрвалы $\left(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right)$. Далей падзелім на тры роўныя часткі адрэзкі, якія засталіся, і выключым сярэднія інтэрвалы.

Калі гэты працэс працягваць неабмежавана, то ў выніку з адрэзка [0, 1] выключым некаторае адкрытае мноства G_0, якое з'яўляецца аб'яднаннем злічонага мноства інтэрвалаў:

$$G_0 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right) \cup \ldots .$$

Мноства, якое застанецца, абазначым праз P_0. Мноствы G_0 і P_0 называюцца кантаравымі мноствамі. Вывучым іх уласцівасці.

Калі скарыстаць даказаную ў гэтым параграфе тэарэму, то атрымаем, што P_0 з'яўляецца дасканалым мноствам. Адзначым, што $P_0 \neq \varnothing$, бо яму належаць канцы выкідваемых інтэрвалаў і пункты 0, 1, г. зн. належаць пункты

$$0, 1, \frac{1}{3}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{1}{9}, \ \frac{2}{9}, \ \frac{7}{9}, \ \frac{8}{9}, \ \ldots .$$

Аднак P_0 не вычэрпваецца гэтымі пунктамі, якіх злічонае мноства. Можна даказаць, што P_0 мае магутнасць кантынуума.

Такім чынам, P_0 мае магутнасць c, г. зн. змяшчае столькі пунктаў, колькі і ўвесь адрэзак [0, 1].

З гэтым фактам цікава супаставіць наступнае: сума даўжынь выкідваемых інтэрвалаў роўная 1. Сапраўды, маем:

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 4 \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Адзначым яшчэ наступны факт: мноства P_0 не змяшчае ніводнага інтэрвала.

3.3. Мера абмежаванага адкрытага мноства

У дадзеным і наступным параграфах мы ўвядзём паняцце меры абмежаванага адкрытага мноства.

АЗНАЧЭННЕ 1. Мерай інтэрвала (a, b) называецца яго даўжыня, г. зн. лік $b–a$.

Абазначэнне: $m(a, b)=b–a$.

Відавочна, што $m(a, b)>0$.

ЛЕМА 1. Калі ў інтэрвале Δ змяшчаецца канечнае мноства інтэрвалаў $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, якія парамі не перасякаюцца, то

$$\sum_{k=1}^{n} m\delta_k \le m\Delta. \quad (1)$$

ДОКАЗ. Няхай $\Delta=(a, b)$, $\delta_k=(a_k, b_k)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Будзем лічыць, што інтэрвалы δ_k пранумараваны ў парадку нарастання іх левых канцоў, г. зн.

$$a_1<a_2<\ldots<a_n.$$

Тады $b_k\le a_{k+1}$ $(k=1, 2, \ldots, n–1)$.

Скарыстаем наступную ўласцівасць даўжыні прамежку:

$$m\Delta = \sum_{k=1}^{n} m\delta_k + Q, \quad (2)$$

дзе Q — сума даўжынь застаўшыхся адрэзкаў:

$$Q=(a_1–a)+(a_2–b_1)+\ldots+(b–b_n).$$

Паколькі $Q\ge 0$ (бо $b_k\le a_{k+1}$), то з роўнасці (2) атрымліваем няроўнасць (1).

ВЫНІК. Калі інтэрвал Δ змяшчае злічонае мноства інтэрвалаў δ_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$, якія парамі не перасякаюцца, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\delta_k \le m\Delta. \quad (3)$$

ДОКАЗ. Згодна з лемай 1 паслядоўнасць частковых сум разглядаемага дадатнага шэрагу $\sum_{k=1}^{\infty} m\delta_k$ абмежавана зверху, таму шэраг з'яўляецца збежным. Калі перайсці ў няроўнасці (1) да ліміту пры $n\to\infty$, то атрымаем няроўнасць (3).

АЗНАЧЭННЕ 2. Мерай mG непустога абмежаванага адкрытага мноства G называецца сума мер усіх яго складовых інтэрвалаў δ_k:

$$m\text{G}=\sum_{k} m\delta_k .$$

Пад $\sum_{k} m\delta_k$ мы разумеем $\sum_{k=1}^{n} m\delta_k$ або $\sum_{k=1}^{\infty} m\delta_k$. Калі G$\ne\varnothing$, то па азначэнні лічым, што mG=0.

Адзначым прасцейшыя ўласцівасці меры адкрытага мноства:

1) $m\text{G}\ge 0$;
2) $m\text{G}<+\infty$;

3) калі Δ — інтэрвал, які змяшчае адкрытае мноства G, то $mG \le m\Delta$.

У якасці прыкладу разгледзім кантаравае мноства G_0 і знойдзем яго меру. Маем:

$$mG_0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \ldots = 1.$$

ТЭАРЭМА 1. Няхай G_1, G_2 — два абмежаваныя адкрытыя мноствы. Калі $G_1 \subset G_2$, то $mG_1 \le mG_2$.

ДОКАЗ. Няхай δ_i (i=1, 2, …), Δ_k (k=1, 2, …) — складовыя інтэрвалы мностваў G_1 і G_2 адпаведна. Кожны з інтэрвалаў δ_i змяшчаецца ў адным і толькі адным інтэрвале Δ_k (параграф 3.2, лема 1).

Абазначым праз A_k мноства тых інтэрвалаў δ_i, якія змяшчаюцца ў інтэрвале Δ_k. Тады будзем мець:

$$mG_1 = \sum_i m\delta_i = \sum_k \left(\sum_{\delta_i \in A_k} m\delta_i \right).$$

Паводле леме 1 або выніку з яе будзем мець:

$$\sum_{\delta_i \in A_k} m\delta_i \le m\Delta_k.$$

Адсюль вынікае, што

$$mG_1 \le \sum_k m\Delta_k,$$

г. зн. $mG_1 \le mG_2$.

ВЫНІК. Мера адкрытага абмежаванага мноства G ёсць ніжняя мяжа мер разнастайных адкрытых абмежаваных мностваў, якія змяшчаюць G.

ДОКАЗ. $G \subset G_2 \Rightarrow mG \le mG_2 \Rightarrow mG = \inf\{mG_2\}$.

ТЭАРЭМА 2. Калі адкрытае абмежаванае мноства G з'яўляецца аб'яднаннем канечнай або злічонай сукупнасці адкрытых мностваў, якія парамі не перасякаюцца:

$$\boldsymbol{G} = \bigcup_k \mathbf{G}_k, \qquad (4)$$

то $mG = \sum_k \mathbf{mG}_k$.

Гэтая ўласцівасць меры называецца поўнай адытыўнасцю.

ДОКАЗ. Няхай δ_i^k (i=1, 2, …) — складовыя інтэрвалы мноства G_k. Пакажам, што кожны з іх з'яўляецца складовым інтэрвалам мноства G. Паколькі $\delta_i^k \subset G_k$, то $\delta_i^k \subset G$. Застаецца даказаць, што канцы інтэрвала δ_i^k не належаць G.

Мяркуем адваротнае. Няхай, напрыклад, левы канец (абазначым яго праз μ) інтэрвала δ_i^k належыць G. Тады ён належыць якому-небудзь мноству $G_{k'}$ аб'яднання (4). Відавочна, што $k' \ne k$. Значыць, пункт μ належыць аднаму са складовых інтэрвалаў мноства $G_{k'}$: $\mu \in \delta_{i'}^{k'}$.

Адсюль мы робім высновы, што інтэрвалы δ_i^k і $\delta_{i'}^{k'}$ перасякаюцца. Таму мноствы G_k і $G_{k'}$ таксама перасякаюцца. Аднак гэта супярэчыць ўмове тэарэмы.

Такім чынам, мы даказалі, што кожны складовы інтэрвал δ_i^k мноства G_k з'яўляецца таксама складовым інтэрвалам мноства G. Інакш кажучы, мноства інтэрвалаў

$$\delta_i^k \ (i=1, 2, \ldots; k=1, 2, \ldots) \qquad (5)$$

ёсць мноства складовых інтэрвалаў мноства G. Адзначым, што ўсе гэтыя інтэрвалы розныя, а таксама што іншых складовых інтэрвалаў у мноства G няма (бо кожны пункт мноства G належыць некатораму δ_i^k). Таму мноства (5) ёсць мноства ўсіх складовых інтэрвалаў мноства G.

Цяпер мы можам скарыстаць азначэнне меры адкрытага мноства. Згодна з гэтым азначэннем маем: $m\mathrm{G} = \sum_{i,\,k} m\delta_i^k = \sum_k \left(\sum_i m\delta_i^k \right) = \sum_k m\mathrm{G}_k$.

Такім чынам, $m\mathrm{G}=\sum_k m\mathrm{G}_k$.

ТЭАРЭМА 3. Калі адкрытае абмежаванае мноства G з'яўляецца аб'яднаннем канечнай або злічонай сукупнасці адкрытых мностваў:

$$\boldsymbol{G}=\bigcup_k \mathbf{G}_k,$$

то $\boldsymbol{mG} \le \sum_k \mathbf{mG}_k$.

Гэтую тэарэму прымем без доказу.

3.4. Мера абмежаванага замкнутага мноства

Няхай F — некаторае непустое абмежаванае замкнутае мноства; $S=[A, B]$ — найменшы адрэзак, які змяшчае гэтае мноства.

Вядома, што мноства $C_S F$ з'яўляецца адкрытым (глядзі тэарэму 6 параграфа 3.1). У папярэднім параграфы было ўведзена паняцце меры такога мноства. Увядзем зараз паняцце меры замкнутага мноства F. Гэта можна зрабіць наступным чынам.

АЗНАЧЭННЕ 1. Мерай mF непустога абмежаванага замкнутага мноства F называецца лік $mF=B-A-mC_S F$.

ПРЫКЛАД 1. $F=[a, b]$, $S=[a, b]$, $C_S F=\varnothing$. $mF=b-a$.

ПРЫКЛАД 2. $F=[a_1, b_1]\cup[a_2, b_2]\cup\ldots\cup[a_n, b_n]$. Будзем лічыць, што адрэзкі пранумараваны ў парадку нарастання левых канцоў. Тады $b_k \le a_{k+1}$, $k=1, \ldots, n-1$. Адсюль вынікае, што $S=[a_1, b_n]$, $C_S F=(b_1, a_2)\cup(b_2, a_3)\cup\ldots\cup(b_{n-1}, a_k)$. Таму

$$mC_S F=(a_2-b_1)+(a_3-b_2)+\ldots+(a_n-b_{n-1}).$$

Адсюль вынікае, што

$$mF=(b_n-a_1)-mC_S F=b_n-a_1-(a_2-b_1)-(a_3-b_2)-\ldots-(a_n-b_{n-1})=(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\ldots+(b_n-a_n).$$

Такім чынам, мера аб'яднання канечнай сукупнасці адрэзкаў, якія парамі не перасякаюцца, роўная суме даўжынь (мер) гэтых адрэзкаў.

ПРЫКЛАД 3. Няхай $F=P_0$ — кантаравае дасканалае мноства. Тады

$$S=[0, 1],\ C_S F=G_0.$$

Паводле азначэння меры замкнутага мноства маем, што $mP_0=1-mG_0=1-1=0$.

Такім чынам, $mP_0=0$, г. зн. кантаравае дасканалае мноства P_0 мае меру 0, а магутнасць c.

Пяройдзем да вывучэння ўласцівасцяў меры замкнутага мноства.

ТЭАРЭМА 1. Мера абмежаванага замкнутага мноства F з'яўляецца неадмоўнай:

$$mF\geq 0.$$

ДОКАЗ. Заўважым, што $C_S F\subset(A, B)$. Адсюль на падставе тэарэмы 1 параграфа 3.3 будзем мець:

$$mC_S F\leq m(A, B),$$

г. зн. $mC_S F\leq B-A$.

Адсюль і вынікае, што $mF=B-A-mC_S F\geq 0$.

ЛЕМА. Няхай F — абмежаванае замкнутае мноства, якое змяшчаецца ў інтэрвале Δ. Тады

$$mF=m\Delta-mC_\Delta F.$$

ДОКАЗ. Заўважым, што мноства $C_\Delta F$ адкрытае ($C_\Delta F=\Delta\backslash F=\Delta\cap CF$).

Няхай $\Delta=(a, b)$, $S=[A, B]$ — найменшы адрэзак, які змяшчае F. Тады

$$C_\Delta F=C_S F\cup C_\Delta S.$$

Мноства $C_S F$ і $C_\Delta F$ з'яўляюцца адкрытымі і парамі не перасякаюцца. Таму па ўласцівасці адытыўнасці меры будзем мець:

$$mC_\Delta F=mC_S F+mC_\Delta S=mC_S F+(A-a)+(b-B).$$

Адсюль вынікае:

$$mC_\Delta F=(A-a)+(b-B)+mC_S F=(b-a)-(B-A)+mC_S F.$$

З апошняй роўнасці атрымліваем, што

$$B-A-mC_S F=b-a-mC_\Delta F,$$

г. зн. $mF=m\Delta-mC_\Delta F$.

ТЭАРЭМА 2. Няхай F_1 і F_2 — два абмежаваныя замкнутыя мноствы. Калі $F_1\subset F_2$, то

$$mF_1\leq mF_2.$$

ДОКАЗ. Няхай Δ — інтэрвал, які змяшчае F_2. Тады відавочна, што

$$C_\Delta F_1\supset C_\Delta F_2 \text{ (бо } F_1\subset F_2).$$

Адсюль, скарыстаўшы тэарэму 1 параграфа 3.3, атрымліваем, што

$$mC_\Delta F_1\geq mC_\Delta F_2.$$

Апошнюю няроўнасць памножым на –1 і дададзім да абедзвюх частак атрыманай няроўнасці $m\Delta$. Будзем мець:

$$m\Delta-mC_\Delta F_1\leq m\Delta-mC_\Delta F_2.$$

Адсюль на падставе лемы атрымаем, што $mF_1\leq mF_2$.

ВЫНІК. Мера абмежаванага замкнутага мноства F ёсць верхняя мяжа мер разнастайных замкнутых мностваў, якія змяшчаюцца ў F.

ТЭАРЭМА 3. Няхай F — замкнутае мноства, а G — адкрытае абмежаванае мноства. Калі $F \subset G$, то $mF \leq mG$.

ДОКАЗ. Няхай Δ — інтэрвал, які змяшчае G. Лёгка заўважыць, што $\Delta = G \cup C_\Delta F$. Адсюль вынікае:

$m\Delta \leq m$G$+mC_\Delta$F (глядзі тэарэму 3 параграфа 3.3),

г. зн. $m\Delta - mC_\Delta F \leq m$G.

Калі скарыстаць лему, то з апошняй няроўнасці вынікае, што

$$mF \leq mG.$$

ТЭАРЭМА 4. Мера адкрытага абмежаванага мноства G ёсць верхняя мяжа мер разнастайных замкнутых мностваў, якія змяшчаюцца ў G:

$$\boldsymbol{mG} = \sup_{F \subset G}\{\mathbf{mF}\}.$$

ДОКАЗ. Будзем карыстацца азначэннем верхняй мяжы.

1. З тэарэмы 3 вынікае, што mG абмяжоўвае мноства $\{m$F$\}$ зверху.

2. Дакажам, што для любога дадатнага ліку ε існуе такое замкнутае мноства $F_0 \subset G$, для якога выконваецца няроўнасць

$$mF_0 > mG - \varepsilon.$$

Тады тэарэма будзе даказанай.

Дакажам сцвярджэнне 2. Няхай складовыя інтэрвалы мноства G ёсць $(\lambda_k,\ \mu_k)$ (k=1, 2, …). Згодна з азначэннем меры адкрытага мноства маем:

$$mG = \sum_k (\mu_k - \lambda_k).$$

Возьмем адвольны лік $\varepsilon > 0$. Знойдзем такі нумар n, каб

$$\sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \lambda_k) > mG - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Такі нумар n мы можам знайсці, калі скарыстаем азначэнне сумы шэрагу $\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k)$ і ўлічым, што гэтая сума роўная mG ($\lim_{n\to\infty} S_n = m$G. Тады $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n > N$ $\Rightarrow$ $|S_n - mG| < \frac{\varepsilon}{2}$, г. зн. $-\frac{\varepsilon}{2} < S_n - mG < \frac{\varepsilon}{2}$. Адсюль вынікае, што $S_n = \sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \lambda_k) > mG - \frac{\varepsilon}{2}$).

Затым для кожнага k (k=1, 2, …, n) знойдзем такі адрэзак $[\alpha_k,\ \beta_k]$, каб

$$[\alpha_k,\ \beta_k] \subset (\lambda_k,\ \mu_k) \text{ і } m[\alpha_k,\ \beta_k] > m(\lambda_k,\ \mu_k) - \frac{\varepsilon}{2n}. \tag{2}$$

Мяркуем

$$F_0 = \bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k,\ \beta_k].$$

Зразумела, што мноства F_0 з'яўляецца замкнутым і $F_0 \subset G$. Скарыстаўшы (1) і (2) атрымліваем:

$$mF_0 = \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) > \sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \lambda_k) - \frac{\varepsilon}{2} > mG - \varepsilon.$$

Такім чынам, для любога ліку $\varepsilon>0$ мы пабудавалі такое замкнутае мноства $F_0 \subset G$, што $mF_0 > mG - \varepsilon$.

Сцвярджэнне 2 даказалі, а разам з ім даказалі і тэарэму.

ТЭАРЭМА 5. Мера замкнутага абмежаванага мноства F ёсць ніжняя мяжа мер разнастайных адкрытых абмежаваных мностваў, якія змяшчаюць мноства F: $mF = \inf\limits_{F \supset G} \{\mathbf{mG}\}$.

ДОКАЗ. Будзем карыстацца азначэннем ніжняй мяжы, г. зн. лік A абмяжоўвае дадзенае мноства E знізу, калі:

1) $\forall x \in E \Rightarrow x \geq A$;
2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in E \Rightarrow x_0 < A + \varepsilon$.

Разгледзім разнастайныя адкрытыя абмежаваныя мноствы G, якія змяшчаюць F.

1. З тэарэмы 3 вынікае, што лік mF абмяжоўвае мноства $\{mG\}$ знізу:

$$F \subset G \Rightarrow mF \leq mG.$$

2. Дакажам, што для любога $\varepsilon>0$ існуе абмежаванае адкрытае мноства $G_0 \supset F$, што

$$mG_0 < mF + \varepsilon.$$

Тады тэарэма будзе даказанай. Такім чынам, дакажам сцвярджэнне 2.

З гэтай мэтай возьмем інтэрвал Δ, які змяшчае F і адкрытае мноства $C_\Delta F$ (гэтае мноства адкрытае, бо $C_\Delta F = \Delta \cap CF$). Якім ні быў бы лік $\varepsilon>0$, мы можам згодна з тэарэмай 4 знайсці такое замкнутае мноства $F_0 \subset C_\Delta F$, што

$$mF_0 > mC_\Delta F - \varepsilon. \qquad (3)$$

Мяркуем: $G_0 = C_\Delta F_0$. Лёгка ўбачыць, што G_0 ёсць адкрытае мноства і $G_0 \supset F$ ($F_0 \subset C_\Delta F \Rightarrow C_\Delta F_0 \supset C_\Delta C_\Delta F$, г. зн. $G_0 \supset F$).

Акрамя гэтага, маем, што

$$mG_0 = m\Delta - mF_0 < m\Delta - mC_\Delta F + \varepsilon = mF + \varepsilon,$$

г. зн. $mG_0 < mF + \varepsilon$.

Такім чынам, для любога дадатнага ліку ε мы пабудавалі такое адкрытае абмежаванае мноства $G_0 \supset F$, што

$$mG_0 < mF + \varepsilon.$$

Сцвярджэнне 2 мы даказалі, а разам з ім даказалі і тэарэму.

ТЭАРЭМА 6. Няхай абмежаванае замкнутае мноства F ёсць аб'яднанне канечнай сукупнасці замкнутых мностваў, якія парамі не перасякаюцца:

$$F = \bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k,$$

тады $mF = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{mF}_k$.

3.5. Вонкавыя і ўнутраныя меры абмежаванага мноства

АЗНАЧЭННЕ 1. Вонкавай мерай m^*E абмежаванага мноства E называецца ніжняя мяжа мер разнастайных адкрытых абмежаваных мностваў, якія змяшчаюць мноства E.

Такім чынам, $m^*E = \inf_{G \supset E} \{mG\}$. Адзначым, што для кожнага абмежаванага мноства E існуе вонкавая мера, прычым $0 \le m^*E < +\infty$.

АЗНАЧЭННЕ 2. Унутранай мерай m_*E абмежаванага мноства E называецца верхняя мяжа мер разнастайных замкнутых мностваў, якія змяшчаюцца ў мностве E.

$$m_*E = \sup_{F \subset E} \{mF\}.$$

Адзначым, што для кожнага абмежаванага мноства існуе ўнутраная мера, прычым

$$0 \le m_*E < +\infty.$$

ТЭАРЭМА 1. Калі G ёсць адкрытае абмежаванае мноства, то

$$m^*G = m_*G = mG.$$

Гэтая тэарэма атрымліваецца з выніку тэарэмы 1 параграфа 3.3 і тэарэмы 4 параграфа 3.4.

ТЭАРЭМА 2. Калі F — замкнутае абмежаванае мноства, то

$$m^*F = m_*F = mF.$$

Гэтая тэарэма атрымліваецца з выніку тэарэмы 2 і тэарэмы 5 параграфа 3.4.

ТЭАРЭМА 3. Для кожнага абмежаванага мноства E мае месца няроўнасць

$$m_*E \le m^*E.$$

ДОКАЗ. Няхай G — абмежаванае адкрытае мноства, якое змяшчае E: $E \subset G$. Якім ні было б замкнутае падмноства F мноства E будзем мець: $F \subset G$.

Адсюль, паводле тэарэмы 3 параграфа 3.4 вынікае, што $mF \le mG$, адкуль атрымліваем, што

$$m_*E \le mG.$$

Апошняя няроўнасць мае месца для любога адкрытага мноства G, якое змяшчае мноства E. Адсюль вынікае, што

$$m_*E \le m^*E.$$

ТЭАРЭМА 4. Няхай A і B — абмежаваныя мноствы. Калі $A \subset B$, то

$$m_*A \le m_*B,$$

$$m^*A \le m^*B.$$

ДОКАЗ. Няхай S — мноства мер разнастайных замкнутых мностваў, якія змяшчаюцца ў мностве A, а T — мноства мер разнастайных замкнутых мностваў, якія змяшчаюцца ў мностве B. Тады

$$m_*A = \sup S,$$

$$m_*B = \sup T.$$

Няхай F — замкнутае падмноства мноства A, тады яно будзе і падмноствам мноства B. Тады маем, што

$$S \subset T.$$

Адсюль вынікае, што

$$\sup S \le \sup T,$$

г. зн. $m_* A \le m_* B$.

Аналагічна даказваецца, што

$$m^* A \le m^* B.$$

ТЭАРЭМА 5. Няхай E — абмежаванае мноства, Δ — які-небудзь інтэрвал, які змяшчае гэтае мноства. Тады

$$m^* E + m_* C_\Delta E = m\Delta.$$

ДОКАЗ. Разгледзім мноства $C_\Delta E$. Згодна з азначэннем 2 маем:

$$m_* C_\Delta E = \sup_{F \subset C_\Delta E} \{mF\}.$$

Паводле азначэння верхняй мяжы лікавага мноства для любога ліку $\varepsilon > 0$ існуе такое замкнутае мноства

$$F \subset C_\Delta E, \tag{1}$$

што

$$mF > m_* C_\Delta E - \varepsilon. \tag{2}$$

Разгледзім мноства $G = C_\Delta F$. Яно з'яўляецца адкрытым, акрамя гэтага на падставе (1) $E \subset G$ ($C_\Delta F \supset C_\Delta (C_\Delta E) \Rightarrow G \supset E$).

Адсюль, скарыстаўшы азначэнне 1, лему параграфа 3.4 і няроўнасць (2), будзем мець:

$$m^* E \le mG = m\Delta - mF < m\Delta - m_* C_\Delta E + \varepsilon,$$

г. зн. $m^* E + m_* C_\Delta E < m\Delta + \varepsilon$.

З апошняй няроўнасці, паколькі дадатны лік ε з'яўляецца адвольным, вынікае:

$$m^* E + m_* C_\Delta E \le m\Delta. \tag{3}$$

Можна даказаць таксама праўдзівасць працілеглай няроўнасці:

$$m^* E + m_* C_\Delta E \ge m\Delta. \tag{4}$$

З няроўнасці (3) і (4) вынікае, што

$$m^* E + m_* C_\Delta E = m\Delta. \tag{5}$$

ВЫНІК. $m^* C_\Delta E - m_* C_\Delta E = m^* E - m_* E$.

ДОКАЗ. Згодна з тэарэмай 5 маем:

$$m^* E + m_* C_\Delta E = m\Delta.$$

Калі змяніць у гэтым мностве ролі мностваў E і $C_\Delta E$, то атрымаем:

$$m^* C_\Delta E + m_* E = m\Delta.$$

Адсюль і з роўнасці (5) вынікае наступная роўнасць:

$$m^* C_\Delta E - m_* C_\Delta E = m^* E - m_* E.$$

3.6. Вымерныя мноствы

Няхай E — абмежаванае адвольнае мноства. У папярэднім параграфе мы даказалі, што

$$m_*E \le m^*E.$$

АЗНАЧЭННЕ. Абмежаванае мноства E называецца вымерным, калі

$$m_*E = m^*E.$$

Пры гэтым агульнае значэнне ўнутранай і вонкавай мер мноства E называецца мерай дадзенага мноства і абазначаецца праз mE.

Такім чынам,

$$mE = m_*E = m^*E.$$

Гэты метад вызначэння меры належыць французскаму матэматыку Лебегу. У сувязі з гэтым вымерныя мноствы называюць таксама мноствамі, вымернымі па Лебегу.

ТЭАРЭМА 1. Адкрытае абмежаванае мноства з'яўляецца вымерным. Яго мера супадае з мерай, вызначанай у параграфе 3.3.

Гэтая тэарэма вынікае з тэарэмы 1 параграфа 3.5.

ТЭАРЭМА 2. Замкнутае абмежаванае мноства з'яўляецца вымерным. Яго мера супадае з мерай, вызначанай у параграфе 3.4.

Гэтая тэарэма вынікае з тэарэмы 2 параграфа 3.5.

ТЭАРЭМА 3. Няхай E — абмежаванае мноства, якое змяшчаецца ў інтэрвале Δ. Тады мноствы E і $C_\Delta E$ будуць адначасова вымернымі або не.

У праўдзівасці тэарэмы 3 лёгка пераканацца пры дапамозе выніку з тэарэмы 5 папярэдняга параграфа.

Сфармулюем без доказу дзве наступныя тэарэмы.

ТЭАРЭМА 4. Калі абмежаванае мноства E з'яўляецца аб'яднаннем канечнай або злічонай сукупнасці вымерных мностваў $E = \bigcup_k E_k$, якія парамі не перасякаюцца, то мноства E з'яўляецца вымерным, і

$$mE = \sum_k mE_k.$$

Гэтая ўласцівасць называецца поўнай адытыўнасцю меры.

ТЭАРЭМА 5. Аб'яднанне канечнай сукупнасці вымерных мностваў ёсць мноства вымерное.

ТЭАРЭМА 6. Перасячэнне канечнай сукупнасці вымерных мностваў ёсць мноства вымернае.

ДОКАЗ. Няхай $E = \bigcap_{k=1}^{n} E_k$, дзе E_k — вымерныя мноствы.

Разгледзім які-небудзь інтэрвал Δ, які змяшчае ўсе мноствы E_k. Заўважым, што

$$C_\Delta E = \bigcup_{k=1}^{n} C_\Delta E_k.$$

Паколькі ўсе мноствы E_k з'яўляюцца вымернымі, на падставе тэарэмы 3 вымернымі будуць і ўсе мноствы $C_\Delta E_k$.

Адсюль і з папярэдняй роўнасці паводле тэарэмы 5 атрымліваем, што вымерным з'яўляецца і мноства $C_\Delta E$. Цяпер, скарыстаўшы тэарэму 3, маем, што мноства E таксама з'яўляецца вымерным.

ТЭАРЭМА 7. Рознасць вымерных мностваў E_1 і E_2 ёсць вымернае мноства. Прычым, калі $E_1 \supset E_2$, то

$$m(E_1 \backslash E_2) = mE_1 - mE_2.$$

ДОКАЗ. Няхай $E = E_1 \backslash E_2$, Δ — інтэрвал, які змяшчае E_1 і E_2. Відавочна, што

$$E = E_1 \cap C_\Delta E_2.$$

Адсюль, калі скарыстаць тэарэму 6, атрымаем, што E — вымернае мноства.

Няхай мноства E_1 змяшчае мноства E_2. Тады $E_1 = E \cup E_2$. Адсюль, скарыстаўшы тэарэму 4, маем:

$$mE_1 = mE + mE_2,$$

г. зн. $mE = mE_1 - mE_2$,
г. зн. $m(E_1 \backslash E_2) = mE_1 - mE_2$.

ТЭАРЭМА 8. Калі абмежаванае мноства E з'яўляецца аб'яднаннем злічонай сукупнасці вымерных мностваў, то E — вымернае мноства.

ДОКАЗ. Згодна з умовай $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, дзе E_k — вымерныя мноствы.

Разгледзім наступныя мноствы:

$A_1 = E_1$,
$A_2 = E_2 \backslash E_1$,
…………………
…………………
…………………
$A_k = E_k \backslash (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{k-1})$,
…………………

Лёгка заўважыць, што $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Паколькі мноствы A_k з'яўляюцца вымернымі (гл. тэарэму 7) і парамі не перасякаюцца, то, скарыстаўшы тэарэму 4, атрымліваем, што E — вымернае мноства.

ЗАЎВАГА. Абмежаванасць мноства E з'яўляецца істотнай умовай.

ПРЫКЛАД 1. Мноствы $E_k = [0,\ k]$ ($k = 1,\ 2,\ \ldots$) з'яўляюцца вымернымі, аднак $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = [0,\ +\infty]$ — невымернае мноства, бо мноства $[0,\ +\infty]$ не з'яўляецца абмежаваным.

ТЭАРЭМА 9. Перасячэнне злічонай сукупнасці вымерных мностваў будзе вымерным мноствам.

ДОКАЗ. Згодна з умовай $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$, дзе E_k — вымерныя мноствы. Відавочна, што E — абмежаванае мноства.

Разгледзім адвольны інтэрвал Δ, які змяшчае мноства E: $\Delta\supset E$. Вядома, што

$$C_\Delta\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}C_\Delta E_k .$$

Такім чынам, справа зводзіцца да выкарыстання тэарэмы 3 і тэарэмы 8.

Разгледзім прыклады некаторых вымерных мностваў.

ПРЫКЛАД 2. Пустое мноства з’яўляецца вымерным. Яго мера роўная 0: $m\varnothing=0$.

Карыстаемся той акалічнасцю, што $\varnothing$ — гэта адкрытае абмежаванае мноства.

ПРЫКЛАД 3. Мноства $E=\{a\}$, якое складаецца з аднаго элемента, з’яўляецца вымерным і яго мера роўная нулю.

Для мноства $E=\{a\}$ можна пабудаваць адкрытае мноства G, якое змяшчае мноства E (інтэрвал $(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n})$), колькі пажадана малой меры. Таму

$$m^*E=\inf_{G\supset E}\{mG\}=0.$$

Паколькі

$$0\le m_*E\le m^*E,$$

то $m_*E=0$.

Такім чынам,

$$m_*E=m^*E=0,$$

а гэта і сведчыць аб тым, што E — вымернае мноства, а $mE=0$.

ПРЫКЛАД 4. Канечнае мноства E з’яўляецца вымерным, а мера яго роўная нулю.

Маем, што $E=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — канечнае мноства. Разгледзім мноствы $E_k=\{x_k\}$, якія парамі не перасякаюцца. Заўважым, што $E=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$. Далей карыстаемся прыкладам 3 і тэарэмай 4.

ПРЫКЛАД 5. Злічонае абмежаванае мноства E з’яўляецца вымерным. Яго мера роўная нулю.

Дадзена, што $E=\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ — злічонае абмежаванае мноства. Разгледзім мноствы $E_k=\{x_k\}$. Яны парамі не перасякаюцца. Заўважым, што $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$. Далей карыстаемся прыкладам 3 і тэарэмай 4.

ПРЫКЛАД 6. Мноства ўсіх рацыянальных пунктаў адрэзка $[a, b]$ з’яўляецца вымерным. Яго мера роўная нулю.

Каб пераканацца ў праўдзівасці гэтага сцвярджэння, дастаткова скарыстаць папярэдні прыклад.

ПРЫКЛАД 7. Мноства E усіх ірацыянальных пунктаў адрэзка $[a, b]$ з’яўляецца вымерным. Яго мера роўная $b-a$.

Разгледзім дадатак мноства E да адрэзка $[a, b]$: $C_{[a, b]}E$.

$C_{[a, b]}E$ — гэта мноства ўсіх рацыянальных пунктаў адрэзка $[a, b]$. Гэтае мноства з'яўляецца вымерным, мера яго роўная нулю.

Далей, улічваючы, што $E=[a, b]\setminus C_{[a, b]}E$, і скарыстаўшы тэарэму 7, атрымліваем, што E — вымернае мноства, а $mE=b-a$.

3.7. Вымерныя функцыі

АЗНАЧЭННЕ 1. Функцыя f, зададзеная на мностве E, называецца вымерной, калі выконваюцца наступныя дзве ўмовы:

1) мноства E — вымернае;
2) для любога ліку A вымерным будзе мноства $E(f(x)>A)$, якое складаецца з тых пунктаў мноства E, для якіх мае месца няроўнасць $f(x)>A$.

Вымерную функцыю называюць таксама функцыяй, вымернай па Лебегу.

Вывучым некаторыя ўласцівасці вымерных функцый, а таксама разгледзім прыклады гэтых функцый.

ТЭАРЭМА 1. Любая функцыя, зададзеная на мностве меры нуль, з'яўляецца вымернай.

Праўдзівасць тэарэмы відавочная.

ВЫНІК. Любая функцыя, зададзеная на канечным або злічоным абмежаваным мностве, з'яўляецца вымернай.

ТЭАРЭМА 2. Калі функцыя f з'яўляецца вымернай на мностве E, то яна будзе вымернай таксама і на любым яго вымерным падмностве H.

ДОКАЗ. Для любога ліку A мае месца роўнасць

$$H(f(x)>A)=H\cap E(f(x)>A),$$

з якой і вынікае праўдзівасць тэарэмы.

ТЭАРЭМА 3. Калі функцыя f(x)=c (c — рэчаісны лік) зададзена на вымерным мностве E, то дадзеная функцыя будзе вымернай.

ДОКАЗ. Няхай $A<c$, тады мноства $E(f(x)>A)=E$ будзе вымерным, што і сведчыць аб вымернасці функцыі.

Калі $A\geq c$, то $E(f(x)>A)=\varnothing$, г. зн. з'яўляецца вымерным, таму функцыя $f(x)=c$ будзе вымернай.

ПРЫКЛАД 1. Разгледзім функцыю Дырыхле:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{калі } x \text{ — рацыянальны пункт адрэзка } [0, 1];\\ 0, & \text{калі } x \text{ — ірацыянальны пункт адрэзка } [0, 1].\end{cases}$$

Гэтая функцыя зададзена на адрэзку [0, 1]. Дакажам, што яна з'яўляецца вымернай.

1. Адрэзак [0, 1] — вымернае мноства.

2. Засталося даказаць, што для любога ліку A мноства $E(f(x)>A)$ будзе вымерным.

Калі $A<0$, то мноства $E(f(x)>A)=[0, 1]$ — вымернае.

Калі $0\leq A<1$, то мноства $E(f(x)>A)$ — гэта мноства рацыянальных пунктаў адрэзка [0, 1]. Яно з'яўляецца вымерным.

Калі $A\geq 1$, то мноства $E(f(x)>A)=\varnothing$ — вымернае.

ТЭАРЭМА 4. Калі функцыя f з'яўляецца вымернай на мностве E, то для любога ліку A вымернымі будуць наступныя мноствы:

$$E(f\geq A),\ E(f=A),\ E(f\leq A),\ E(f<A).$$

ДОКАЗ. Разгледзім мноства E(f≥A). Яго можна запісаць у наступным выглядзе:

$$E(f\geq A)=\bigcap_{k=1}^{\infty} E\left(f > A-\frac{1}{k}\right).$$

Паколькі функцыя $f(x)$ — вымерная, то пры любым k будуць вымернымі мноствы $E\left(f > A-\frac{1}{k}\right)$. Далей карыстаемся тэарэмай пра перасячэнне вымерных мностваў (тэарэма 9 параграфа 3.6). Вымернасць мноства $E(f\geq A)$ даказалі.

Вымернасць астатніх мностваў вынікае з наступных роўнасцяў:

$$E(f=A)=E(f\geq A)\setminus E(f>A),$$
$$E(f\leq A)=E\setminus E(f>A),$$
$$E(f<A)=E(f\leq A)\setminus E(f=A).$$

ЗАЎВАГА. Калі для любога ліку A вымерным будзе прынамсі адно з наступных мностваў:

$$E(f\geq A),\ E(f\leq A),\ E(f<A),$$

то функцыя f будзе вымернай на мностве E.

Будзем карыстацца відавочнай роўнасцю

$$E(f>A)=\bigcup_{k=1}^{\infty} E\left(f \geq A+\frac{1}{k}\right).$$

Калі для любога ліку A вымерным з'яўляецца мноства $E(f\geq A)$, то вымернымі з'яўляюцца таксама мноствы $E\left(f \geq A+\frac{1}{k}\right)$.

Скарыстаўшы тэарэму пра аб'яднане вымерных мностваў (тэарэма 8 параграфа 3.6), атрымліваем, што мноства $E(f>A)$ — вымернае для любога A. Адсюль вынікае, што дадзеная функцыя з'яўляецца вымернай на мностве E.

Аналагічна даказваюцца астатнія сцвярджэнні.

ВЫСНОВЫ. З тэарэмы 4 і заўвагі вынікае, што ў азначэнні вымернай функцыі замест мноства $E(f>A)$ можна разглядаць адно з мностваў:

$$E(f\geq A),\ E(f\leq A),\ E(f<A).$$

ТЭАРЭМА 5. Калі функцыя f непарыўная на замкнутым абмежаваным мностве F, то яна будзе вымернай на гэтым мностве.

ДОКАЗ. Па-першае, заўважым, што мноства F — вымернае (гл. тэарэму 2 параграфа 3.6). Застаецца даказаць, што для любога ліку A вымерным з'яўляецца мноства $F(f\geq A)$. Дакажам, што мноства $F(f\geq A)$ — замкнутае, а таму і вымернае.

Няхай ξ — адвольны лімітавы пункт даследуемага мноства $F(f\geq A)$. Трэба даказаць, што $\xi\in F(f\geq A)$.

Зразумела, што $\xi\in F$, бо $F(f\geq A)\subset F$, і мноства F — замкнутае. Нам неабходна даказаць, што $\xi\in F(f\geq A)$.

Мяркуем адваротнае, што $\xi \notin \mathrm{F}(f \geq A)$, г. зн. $f(\xi)<A$. Паколькі функцыя f непарыўная ў пункце $\xi \in \mathrm{F}$, то для ліку $\varepsilon=A-f(\xi)>0$ знойдзецца такі лік $\delta>0$, што для любых пунктаў $x \in \mathrm{F}$, якія задавальняюць умове $|x-\xi|<\delta$, выконваецца няроўнасць

$$|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon.$$

Апошняя няроўнасць раўназначная няроўнасці

$$f(\xi)-\varepsilon<f(x)<f(\xi)+\varepsilon,$$

г. зн. няроўнасці $f(\xi)-(A-f(\xi))<f(x)<f(\xi)+(A-f(\xi))$.

Адсюль вынікае, што для ўсіх $x \in \mathrm{F}$, якія задавальняюць умове $|x-\xi|<\delta$, выконваецца няроўнасць $f(x)<A$.

Такім чынам, $f(x)<A$ для ўсіх x з мноства F, якія належаць δ-наваколлю пункта ξ. Таму гэта δ-наваколле пункта ξ не змяшчае пунктаў мноства $\mathrm{F}(f \geq A)$. Адсюль вынікае, што пункт ξ не з'яўляецца лімітавым пунктам мноства $\mathrm{F}(f \geq A)$. Атрыманая супярэчнасць і даказвае тэарэму.

ТЭАРЭМА 6. Няхай функцыя f зададзена на абмежаваным мностве E, якое з'яўляецца аб'яднаннем канечнай або злічонай сукупнасці мностваў E_k: $E=\bigcup_k E_k$. Калі функцыя f вымерная на кожным мностве E_k, то яна будзе вымернай і на мностве E.

ДОКАЗ. Спачатку адзначым, што мноства E з'яўляецца вымерным як аб'яднанне канечнай або злічонай сукупнасці вымерных мностваў. Засталося даказаць, што для любога ліку A вымерным з'яўляецца мноства $\mathrm{E}(f>A)$.

Скарыстаем відавочную роўнасць

$$\mathrm{E}(f>A)=\bigcup_k \mathrm{E}_k(f>A).$$

Паколькі вымерным з'яўляецца кожнае з мностваў $\mathrm{E}_k(f>A)$ (бо функцыя f вымерная на кожным мностве E_k), то вымерным будзе і аб'яднанне такіх мностваў, г. зн. мноства $\mathrm{E}(f>A)$.

ТЭАРЭМА 7. Няхай функцыя f, зададзеная на мностве E, з'яўляецца вымернай, а k — рэчаісны лік. Тады вымернымі будуць наступныя функцыі:

1) $f(x)+k$;
2) $kf(x)$;
3) $|f(x)|$;
4) $f^2(x)$;
5) $\dfrac{1}{f(x)}$ (пры $f(x) \neq 0$).

ДОКАЗ. 1. Вымернасць функцыі $f(x)+k$ вынікае з роўнасці

$$\mathrm{E}(f+k>A)=\mathrm{E}(f>A-k).$$

2. Калі $k=0$, то $kf(x)=0$, таму разглядаемая функцыя $kf(x)$ будзе вымернай (гл. тэарэму 3). Калі $k \neq 0$, то вымернасць функцыі $kf(x)$ вынікае з роўнасці

$$\mathrm{E}(kf > A) = \begin{cases} \mathrm{E}\left(f > \dfrac{A}{k}\right), & \text{калі } k > 0, \\ \mathrm{E}\left(f < \dfrac{A}{k}\right), & \text{калі } k < 0. \end{cases}$$

3. Вымернасць функцыі $|f(x)|$ вынікае з роўнасці

$$\mathrm{E}(|f(x)| > A) = \begin{cases} \mathrm{E}(f > A) \cup \mathrm{E}(f < -A), & \text{калі } A \geq 0, \\ \mathrm{E}, & \text{калі } A < 0. \end{cases}$$

4. Вымернасць функцыі $f^2(x)$ вынікае з роўнасці

$$\mathrm{E}(f^2 > A) = \begin{cases} \mathrm{E}(|f| > \sqrt{A}), & \text{калі } A \geq 0, \\ \mathrm{E}, & \text{калі } A < 0. \end{cases}$$

5. Вымернасць функцыі $\dfrac{1}{f(x)}$ (калі $f(x) \neq 0$) прымем без доказу.

ТЭАРЭМА 8. Няхай функцыі f і g, зададзеныя на мностве E, вымерныя. Тады мноства E(f>g) будзе вымерным.

ДОКАЗ. Пранумаруем усе рацыянальныя лікі:

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots .$$

Дакажам наступную роўнасць:

$$\mathrm{E}(f>g) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\mathrm{E}(f > r_n) \cap \mathrm{E}(g < r_n)\right]. \tag{1}$$

Няхай $x \in \mathrm{E}(f>g)$, г. зн. $f(x)>g(x)$. Тады знойдзецца рацыянальны лік r_n, што

$$f(x) > r_n > g(x).$$

Таму пункт x належыць аднаму з мностваў у правай частцы роўнасці (1), а, значыць, належыць правай частцы роўнасці (1).

Няхай x належыць правай частцы роўнасці (1). Тады пры некаторым n будзем мець:

$$f(x) > r_n > g(x),$$

адсюль вынікае, што $f(x)>g(x)$.

З апошняй няроўнасці вынікае, што пункт x належыць левай частцы роўнасці (1). Такім чынам, роўнасць (1) даказалі.

З роўнасці (1) і вымернасці функцый f і g вынікае вымернасць даследуемага мноства $\mathrm{E}(f>g)$.

ТЭАРЭМА 9. Няхай функцыі f і g вымерныя на мностве E. Тады вымернымі будуць і наступныя функцыі:

1) $f(x) - g(x)$;
2) $f(x) + g(x)$;
3) $f(x) \cdot g(x)$;
4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (пры ўмове $g(x) \neq 0$).

ДОКАЗ. 1. Па-першае, заўважым, што мноства E з'яўляецца вымерным. Засталося даказаць, што для любога A вымерным будзе мноства $E(f-g>A)$.

Функцыя g вымерная на мностве E, таму на падставе тэарэмы 7 будзе вымернай і функцыя $g+A$.

Паколькі функцыі $f(x)$ і $g(x)+A$ вымерныя на мностве E, то на падставе тэарэмы 8 атрымліваем, што вымерным будзе мноства $E(f>g+A)$, г. зн. мноства $E(f-g>A)$.

2. Вымернасць функцыі $f(x)+g(x)$ вынікае з роўнасці

$$f(x)+g(x)=f(x)-(-g(x)).$$

Карыстаемся тэарэмай 7, а таксама той акалічнасцю, што рознасць вымерных функцый ёсць функцыя вымерная.

3. Вымернасць здабытку $f(x)\cdot g(x)$ вынікае з роўнасці

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\{(f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2\}.$$

4. Вымернасць функцыі $\frac{f(x)}{g(x)}$ вынікае з роўнасці $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$.

АЗНАЧЭННЕ 2. Няхай некаторая акалічнасць мае месца для ўсіх пунктаў некаторага мноства E, акрамя пунктаў мноства E_0, якое змяшчаецца ў E ($E_0\subset E$) і мае меру нуль ($mE_0=0$). Тады гавораць, што дадзеная акалічнасць мае месца амаль усюды на мностве E або амаль для ўсіх пунктаў мноства E.

АЗНАЧЭННЕ 3. Дзве функцыі f і g, зададзеныя на мностве E, называюцца эквівалентнымі на гэтым мностве, калі $f(x)=g(x)$ амаль усюды на мностве E.

Пры гэтым запісваюць: $f\sim g$.

ПРЫКЛАД 2. Разгледзім функцыю Дырыхле

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{калі } x \text{ — рацыянальны пункт адрэзка } [0,\ 1];\\ 0, & \text{калі } x \text{ — ірацыянальны пункт адрэзка } [0,\ 1].\end{cases}$$

$f(x)\sim 0$.

ТЭАРЭМА 10. Калі функцыі f і g эквівалентныя на мностве E, і адна з іх вымерная на гэтым мностве, то і другая функцыя вымерная на дадзеным мностве.

ДОКАЗ. Згодна з умовай $f\sim g$ на мностве E. Няхай функцыя f вымерная на E. Дакажам, што вымернай на мностве E будзе і функцыя g.

Разгледзім мноствы $E_1=E(f(x)\neq g(x))$ і $E_2=E\setminus E_1$. Паколькі мноства E_1 з'яўляецца вымерным, бо $mE_1=0$, то мноства E_2 таксама будзе вымерным, як рознасць вымерных мностваў.

Калі скарыстаць тэарэму 2, то атрымаем, што функцыя f вымерная на мностве E_2. Аднак на мностве E_2 $f(x)=g(x)$, таму і функцыя g будзе вымернай на мностве E_2.

Паколькі функцыя g вымерная на мностве E_2, а таксама на мностве E_1 (бо $mE_1=0$, гл. тэарэму 1), то яна будзе таксама вымернай і на мностве $E=E_2\cup E_1$ (гл. тэарэму 6).

АЗНАЧЭННЕ 4. Функцыя f, зададзеная на адрэзку $[a, b]$, называецца прыступкавай, калі адрэзак $[a, b]$ можна разбіць пунктамі

$$a=c_0<c_1<\ldots<c_n=b$$

на канечны лік частак, унутры якіх, г. зн. на інтэрвалах (c_0, c_1), (c_1, c_2), …, (c_{n-1}, c_n), дадзеная функцыя з'яўляецца сталай.

ТЭАРЭМА 11. Прыступкавая функцыя з'яўляецца вымернай.

ДОКАЗ. На кожным з прамежкаў $[c_0, c_1)$, $[c_1, c_2)$, …, $[c_{n-1}, c_n)$ дадзеная функцыя эквівалентная канстанце, таму яна будзе вымернай. Адсюль на падставе тэарэмы 6 вынікае, што функцыя будзе вымернай і на аб'яднанні гэтых прамежкаў, г. зн. на аэрэзку $[a, b]$.

Сфармулюем без доказу дзве тэарэмы.

ТЭАРЭМА 12. Няхай на мностве E зададзена паслядоўнасць вымерных функцый $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, … , а таксама некаторая функцыя $F(x)$. Калі амаль усюды на мностве E выконваецца роўнасць $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=F(x)$, то функцыя $F(x)$ будзе вымернай на мностве E.

ТЭАРЭМА 13 (тэарэма Лузіна). Няхай функцыя $f(x)$ зададзеная і вымерная на адрэзку $[a, b]$. Тады для любога дадатнага ліку ε існуе такая непарыўная на адрэзку $[a, b]$ функцыя $g(x)$, што

$$mE(f\neq g)<\varepsilon.$$

Інакш кажучы, вымерную функцыю можна зрабіць непарыўнай на адрэзку $[a, b]$ шляхам яе змянення на мностве колькі пажадана малой меры.

Некаторыя аўтары прымаюць гэтую ўласцівасць за азначэнне вымернай функцыі.

З тэарэмы Лузіна бачым, што вымерныя функцыі па сваёй структуры цесна звязаны з непарыўнымі.

4. ІНТЭГРАЛ ЛЕБЕГА

4.1. Азначэнне інтэграла Лебега

Мы пазнаёміліся з паняццем інтэграла Рымана. Вядома, што інтэгравальнымі па Рыману могуць быць толькі абмежаваныя функцыі. Аднак не любая абмежаваная функцыя будзе інтэгравальнай па Рыману (напрыклад, функцыя Дырыхле).

У дадзеным параграфе мы абагульнім паняцце інтэграла такім чынам, што інтэгравальнай будзе кожная абмежаваная вымерная функцыя.

Няхай на вымерным мностве E зададзена абмежаваная вымерная функцыя $f(x)$. Паколькі функцыя f абмежаваная на мностве E, то існуюць такія лікі A і B, што

$$A<f(x)<B,\ \forall x\in \mathrm{E}.$$

Разбіваем адрэзак $[A, B]$ на n частак пунктамі

$$A=y_0<y_1<\ldots<y_n=B.$$

Разгледзім мноствы

$$l_k=\mathrm{E}(y_k\le f\le y_{k+1}),\qquad k=0, 1, \ldots, n-1.$$

Гэтыя мноствы валодаюць наступнымі ўласцівасцямі:

1) мноствы l_k парамі не перасякаюцца;
2) мноствы l_k з’яўляюцца вымернымі, як перасячэнне вымерных мностваў;
3) $\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} l_k=\mathrm{E}$;
4) $m\mathrm{E}=\sum\limits_{k=0}^{n-1} ml_k$ (гл. тэарэму 4 параграфа 3.6).

Пабудуем наступныя сумы:

$$s=\sum_{k=0}^{n-1} y_k ml_k,$$

$$S=\sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} ml_k.$$

Гэтыя сумы называюцца ніжняй і верхняй (інтэгральнымі) сумамі Лебега. Яны валодаюць шэрагам уласцівасцяў, аналагічных уласцівасцям сум Дарбу.

1^0. Калі да пунктаў y_k дадаць новыя пункты разбіўкі адрэзка $[A, B]$, то ніжняя сума Лебега можа толькі павялічыцца, а верхняя сума Лебега — толькі паменшыцца.

ДОКАЗ. Доказ зводзіцца да разгляду выпадку, калі да пунктаў y_k дадаецца адзін новы пункт $\bar{y}$. Няхай $\bar{y}$ знаходзіцца паміж пунктамі y_i і y_{i+1}:

$$y_i<\bar{y}<y_{i+1}.$$

Няхай s і S — сумы Лебега, якія адпавядаюць «старой» разбіўцы адрэзка $[A, B]$ пунктамі $A=y_0<y_1<\ldots<y_i<y_{i+1}<\ldots<y_n=B$.

Няхай $\bar{s}$ і $\bar{S}$ — сумы Лебега, якія адпавядаюць «новай» разбіўцы адрэзка $[A, B]$ пунктамі $A=y_0<y_1<\ldots<y_i<\bar{y}<y_{i+1}<\ldots<y_n=B$.

Мяркуем:

$$l_i' = \mathrm{E}(y_i \le f \le \bar{y}),$$
$$l_i'' = \mathrm{E}(\bar{y} \le f \le y_{i+1}).$$

Пабудуем ніжнія сумы Лебега, якія адпавядаюць «старой» і «новай» разбіўцы:

$$s=y_0ml_0+\ldots+y_iml_i+y_{i+1}ml_{i+1}+\ldots+y_{n-1}ml_{n-1};$$
$$\bar{s}=y_0ml_0+\ldots+y_iml_i' + \bar{y}ml_i''+y_{i+1}ml_{i+1}+\ldots+y_{n-1}ml_{n-1}.$$

Сумы s і $\bar{s}$ адрозніваюцца толькі падкрэсленымі складнікамі. Усе астатнія складнікі супадаюць.

Здзейснім параўнанне падкрэсленых складнікаў. Паколькі l_i' і l_i'' не перасякаюцца і $l_i = l_i' \cup l_i''$, то згодна з уласцівасцю адытыўнасці меры (тэарэма 4 параграфа 3.6) будзем мець:

$$ml_i=ml_i'+ml_i''.$$

Адсюль, улічваючы няроўнасць $y_i<\bar{y}$, атрымліваем, што

$$y_iml_i\le y_iml_i'+\bar{y}\,ml_i'',$$

адкуль і вынікае, што

$$s\le\bar{s}.$$

Уласцівасць 1^0 для ніжніх сум Лебега даказалі. Аналагічна даказваецца гэтая ўласцівасць і для верхніх сум Лебега.

2^0. Кожная ніжняя сума Лебега не перавышае кожную верхнюю суму Лебега, якая адпавядае нават іншай разбіўцы адрэзка [A, B].

Доказ гэтай уласцівасці грунтуецца на ўласцівасці 1^0 і ажыццяўляецца аналагічным чынам як і для сум Дарбу.

Разгледзім мноства $\{s\}$ разнастайных ніжніх сум Лебега. З уласцівасці 2^0 вынікае, што гэтае мноства абмежавана зверху любой верхняй сумай Лебега. Таму мноства $\{s\}$ мае верхнюю мяжу, якую абазначым праз u: $u=\sup\{s\}$.

З азначэння верхняй мяжы вынікае, што $u\le S$ для любой верхняй сумы Лебега S. Апошняя няроўнасць сведчыць аб тым, што мноства $\{S\}$ разнастайных верхніх сум Лебега абмежавана знізу лікам u. Таму мноства $\{S\}$ мае ніжнюю мяжу, якую абазначым праз v: $v=\inf\{S\}$. З азначэння ніжняй мяжы лікавага мноства вынікае, што

$$u \le v. \tag{1}$$

Дакажам, што $u = v$.

Мяркуем: $\lambda = \max\limits_{0\le k\le n-1}(y_{k+1} - y_k)$.

Для сум Лебега, якія складзены для адной разбіўкі адрэзка, будзем мець:

$$S - s = \sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1} - y_k)ml_k \le \lambda\sum_{k=0}^{n-1}ml_k = \lambda m\mathrm{E}.$$

Такім чынам,

$$S-s\le\lambda m\mathrm{E}. \tag{2}$$

Паколькі $s\le u\le v\le S$, то $0\le v-u\le S-s$.

Адсюль і няроўнасці (2) вынікае, што $0\le v-u\le\lambda m\mathrm{E}$.

Гэтую няроўнасць мы даказалі для любой разбіўкі адрэзка [A, B], г. зн. для любога λ. Адсюль вынікае, што $v-u=0$, г. зн. $v=u$.

Агульнае значэнне велічынь u і v абазначым праз I: $I=u=v$. Дакажам, што

$$I=\lim_{\lambda\to 0} s=\lim_{\lambda\to 0} S.$$

Возьмем адвольны лік $\varepsilon>0$ і знойдзем такі лік $\delta>0$, каб

$$\delta m\text{E} < \varepsilon.$$

Тады пры любой разбіўцы адрэзка $[A, B]$, якая падпарадкоўваецца толькі ўмове $\lambda<\delta$, будзем мець:

$$S-s\le\lambda m\text{E}<\delta m\text{E}<\varepsilon.$$

Паколькі $s\le J\le S$ ($J=\sup\{s\}$, $J=\inf\{S\}$), то маем:

$$|s-J|<\varepsilon,$$

$$|S-J|<\varepsilon.$$

Такім чынам, мы даказалі, што для любога ліку $\varepsilon>0$ існуе такі лік $\delta>0$, што пры любой разбіўцы адрэзка $[A, B]$, якая падпарадкоўваецца толькі адзінай умове $\lambda<\delta$, выконваецца няроўнасці

$$|s-J|<\varepsilon \text{ і } |S-J|<\varepsilon.$$

Гэта і сведчыць аб тым, што

$$I=\lim_{\lambda\to 0} s=\lim_{\lambda\to 0} S. \qquad (3)$$

Мы даказалі, што калі функцыя f абмежаваная і вымерная на мностве Е, то пры $\lambda\to 0$ ніжняя і верхняя сумы Лебега маюць агульны ліміт.

АЗНАЧЭННЕ. Агульны ліміт (3) ніжняй і верхняй сум Лебега называецца інтэгралам Лебега ад функцыі $f(x)$ па мноству Е і абазначаецца сімвалам:

$$(L)\int_{\text{E}} f(x)dx \text{ або } \int_{\text{E}} f(x)dx.$$

Калі $\text{E}=[a, b]$, то інтэграл Лебега абазначаецца таксама так:

$$(L)\int_a^b f(x)dx \text{ або } \int_a^b f(x)dx.$$

Вынік, атрыманы ў дадзеным параграфе, можна сфармуляваць у выглядзе наступнай тэарэмы.

ТЭАРЭМА. Інтэграл Лебега існуе для любой функцыі, якая абмежаваная і вымерная на мностве Е.

Калі існуе інтэграл Лебега ад функцыі $f(x)$ па мноству Е, то гавораць, што дадзеная функцыя з'яўляецца інтэгравальнай па Лебегу на мностве Е. Таму даказаную вышэй тэарэму можна сфармуляваць і гэтак: любая функцыя, абмежаваная і вымерная на мностве Е, інтэгравальная па Лебегу на гэтым мностве.

ЗАЎВАГА 1. Азначэнне інтэграла Лебега звязана з выбарам лікаў A і B. Можна даказаць, што інтэграл Лебега не залежыць ад выбару лікаў A і B.

ЗАЎВАГА 2. Акрамя верхняй і ніжняй сум Лебега можна разглядаць прамежкавыя інтэгральныя сумы $\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} b_k m l_k$, дзе b_k ($k=0, 1, \ldots, n-1$) — адвольныя лікі, якія задавальняюць няроўнасцям $y_k\le b_k\le y_{k+1}$.

Зразумела, што $s\le\sigma\le S$.

Адсюль, скарыстаўшы (3), атрымліваем, што

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = I \ .$$

Такім чынам, інтэграл Лебега можна вызначыць як ліміт сумы σ пры $\lambda\to 0$.

4.2. Асноўныя ўласцівасці інтэграла Лебега

ТЭАРЭМА 1 (тэарэма аб сярэднім). Калі функцыя f(x) з'яўляецца вымернай на мностве E і на гэтым мностве задавальняе ўмове $a \le f(x) \le b$, то

$$a\cdot mE \le \int_E f(x)dx \le b\cdot mE \ . \qquad (1)$$

ДОКАЗ. Няхай n — адвольны натуральны лік. Разгледзім наступныя лікі:

$$A = a - \frac{1}{n},\ \ B = b + \frac{1}{n}.$$

Тады $A<f(x)<B$, $\forall x\in$E.

Разбіваем адрэзак $[A, B]$ на часткі пунктамі $A=y_0<y_1<\ldots<y_n=B$ і будуем ніжнюю суму Лебега

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k m l_k \ .$$

Паколькі $A\le y_k\le B$, то

$$A\sum_{k=0}^{n-1} m l_k \le s \le B\sum_{k=0}^{n-1} m l_k \ ,$$

г. зн. $A\cdot m\text{E}\le s\le B\cdot m\text{E}$.

Калі ў гэтай няроўнасці перайсці да ліміту пры $\lambda\to 0$, то атрымаем:

$$A\cdot m\text{E}\le \int_\text{E} f(x)dx \le B\cdot m\text{E},$$

г. зн. $\left(a-\dfrac{1}{n}\right)m\text{E} \le \displaystyle\int_\text{E} f(x)dx \le \left(b+\dfrac{1}{n}\right)m\text{E}$.

Пяройдзем у апошняй няроўнасці да ліміту пры $n\to 0$. Будзем мець:

$$a\cdot m\text{E}\le \int_\text{E} f(x)dx \le b\cdot m\text{E}.$$

ВЫНІК 1. Калі $f(x)=c$ (c — const) на мностве E, то

$$\int_\text{E} f(x)dx = c\cdot m\text{E}.$$

Гэты вынік атрымліваецца з няроўнасці (1), калі $a = b = c$.

ВЫНІК 2. Калі функцыя $f(x)$ на мностве E вымерная і на гэтым мностве

$$f(x)\ge 0\ (f(x)\le 0),$$

то $\displaystyle\int_\text{E} f(x)dx \ge 0$ ($\displaystyle\int_\text{E} f(x)dx \le 0$).

Гэты вынік атрымліваецца з няроўнасці (1), калі меркаваць, што a=0.

ВЫНІК 3. Калі функцыя $f(x)$ зададзеная і абмежаваная на мностве E, меры нуль (mE=0), то $\displaystyle\int_\text{E} f(x)dx = 0$.

ПРЫКЛАД 1. Абазначым праз Е мноства рацыянальных лікаў адрэзка [0, 1] ($m\mathrm{E}=0$). Разгледзім функцыю, зададзеную на мностве Е формулай $f(x)=1$. Тады

$$\int_{\mathrm{E}} f(x)dx = 0.$$

ПРЫКЛАД 2. $\int\limits_{\{2,\,3,\,5\}} \sin x\,dx = 0,\quad \int\limits_{\{1\}} x^2 dx = 0.$

ТЭАРЭМА 2. Няхай вымернае мноства Е ёсць аб'яднанне канечнай або злічонай сукупнасці мностваў, якія парамі не перасякаюцца:

$$\boldsymbol{E = \bigcup_k E_k}.$$

Няхай на мностве Е зададзена абмежаваная вымерная функцыя f(x). Тады мае месца наступная роўнасць:

$$\int_E \boldsymbol{f(x)dx} = \sum_k \int_{E_k} \boldsymbol{f(x)dx}. \tag{2}$$

Гэтая ўласцівасць называецца поўнай адытыўнасцю інтэграла.

ДОКАЗ. Разгледзім выпадак, калі

$$\mathrm{E}=\mathrm{E}_1\cup\mathrm{E}_2,\ \mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2=\varnothing.$$

Няхай $A<f(x)<B,\ \forall x\in\mathrm{E}$. Разбіваем адрэзак $[A, B]$ пунктамі $A = y_0<y_1<\ldots<y_n = B$ на часткі.

Разгледзім мноствы

$$l_k=\mathrm{E}(y_k\le f\le y_{k+1}),$$
$$l'_k=\mathrm{E}_1(y_k\le f\le y_{k+1}),$$
$$l''_k=\mathrm{E}_2(y_k\le f\le y_{k+1}).$$

Зразумела, што $l'_k \cap l''_k=\varnothing$, $\quad l_k=l'_k \cup l''_k$.

Таму $ml_k=ml'_k+ml''_k$ (гл. тэарэму 4 параграфа 3.6).

Адсюль вынікае, што

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k\cdot ml_k = \sum_{k=0}^{n-1} y_k\cdot ml'_k + \sum_{k=0}^{n-1} y_k\cdot ml''_k.$$

Калі зараз перайсці да ліміту пры $\lambda\to 0$, то атрымаем:

$$\int_{\mathrm{E}} f(x)dx = \int_{\mathrm{E}_1} f(x)dx + \int_{\mathrm{E}_2} f(x)dx.$$

Тэарэмай даказана, што мноства Е ёсць аб'яднанне двух мностваў. Адсюль вынікае праўдзівасць тэарэмы і ў выпадку, калі мноства Е ёсць аб'яднанне любой канечнай сукупнасці мностваў.

Сцвярджэнне ў выпадку, калі мноства Е ёсць аб'яднанне злічонай сукупнасці мностваў, якія парамі не перасякаюцца, прымем без доказу.

ВЫНІК. Няхай $f(x)$ — абмежаваная, вымерная і неадмоўная функцыя на мностве Е. Няхай Е′ — вымернае мноства, якое змяшчаецца ў мностве Е. Тады

$$\int_{\mathrm{E}'} f(x)dx \le \int_{\mathrm{E}} f(x)dx.$$

ДОКАЗ. Мяркуем, што E″=E\E′, тады E=E′∪E″. Скарыстаўшы тэарэму 2, атрымаем:

$$\int_{E} f(x)dx = \int_{E'} f(x)dx + \int_{E''} f(x)dx \,.$$

Паколькі $\int_{E''} f(x)dx \geq 0$ (гл. вынік 2 з тэарэмы 1), то з атрыманай вышэй роўнасці вынікае: $\int_{E} f(x)dx \geq \int_{E'} f(x)dx$.

ТЭАРЭМА 3. Няхай на мностве E зададзены дзве абмежаваныя вымерныя функцыі f(x) і g(x). Калі f(x)~g(x) на мностве E, то $\int_{E} f(x)dx = \int_{E} g(x)dx$.

ДОКАЗ. Мяркуем: $E_1=E(f\neq g)$, $E_2=E(f=g)$. Зразумела, што $E=E_1\cup E_2$.

Паколькі $mE_1=0$ (бо $f(x)$~$g(x)$), то на падставе выніку 3 з тэарэмы 1 атрымліваем:

$$\int_{E_1} f(x)dx = \int_{E_1} g(x)dx = 0 \,. \tag{3}$$

Для любога $x\in E_2$ $f(x)=g(x)$, таму

$$\int_{E_2} f(x)dx = \int_{E_2} g(x)dx \,. \tag{4}$$

Склаўшы роўнасці (3) і (4) і скарыстаўшы ўласцівасць адытыўнасці інтэграла будзем мець:

$$\int_{E} f(x)dx = \int_{E} g(x)dx = 0 \,.$$

ВЫНІК. Калі $f(x)$~0 на мностве E, то $\int_{E} f(x)dx = 0$.

Праўдзівасць гэтага сцвярджэння вынікае з даказанай тэарэмы і выніку 1 з тэарэмы 1.

ПРЫКЛАД 3. Разгледзім функцыю, якая зададзена формулай

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{калі } x \text{ — рацыянальны пункт адрэзка } [0,\ 1]; \\ 0, & \text{калі } x \text{ — ірацыянальны пункт адрэзка } [0,\ 1]. \end{cases}$$

Зразумела, што $f(x)$~0 на адрэзку [0, 1]. Таму паводле даказанага вышэй выніку

$$(L)\int_{0}^{1} f(x)dx = 0 \,.$$

Такім чынам, інтэграл Лебега ад функцыі Дырыхле роўны нулю.

ЗАЎВАГА 1. Мы вызначылі інтэграл Лебега $(L)\int_{E} f(x)dx$ у выпадку, калі абмежаваная вымерная функцыя $f(x)$ зададзена ўсюды на мностве E. Можна вызначыць інтэграл Лебега і ў выпадку, калі абмежаваная вымерная функцыя зададзена амаль усюды на мностве E.

У гэтым выпадку пад інтэгралам $(L)\int\limits_E f(x)dx$ разумеем інтэграл Лебега ад такой функцыі, якая супадае з $f(x)$ у тых пунктах, дзе $f(x)$ зададзена, а ў астатніх пунктах мноства E вызначаецца адвольным чынам, толькі б заставалася абмежаванай.

Згодна з тэарэмай 3 гэты інтэграл не залежыць ад спосабу давызначэння функцыі $f(x)$.

ПРЫКЛАД 4. Разгледзім функцыю

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ калі } 0\le x<\frac{1}{2};\\ 2, \text{ калі } \frac{1}{2}<x\le 1.\end{cases}$$

Гэтая функцыя вызначана амаль усюды на адрэзку [0, 1].

Вылічым інтэграл Лебега $(L)\int\limits_0^1 f(x)dx$. Давызначым функцыю $f(x)$ у пункце $\frac{1}{2}$ адвольным чынам, г. зн. разгледзім, напрыклад, функцыю

$$g(x)=\begin{cases}f(x), \text{калі } x\ne\frac{1}{2};\\ 1, \text{ калі } x=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Тады, згодна зробленай заўвазе, будзем мець:

$$(L)\int\limits_0^1 f(x)dx=(L)\int\limits_0^1 g(x)dx=(L)\int\limits_{[0,\ \frac{1}{2}]} g(x)dx+(L)\int\limits_{(\frac{1}{2},\ 1]} g(x)dx=(L)\int\limits_{[0,\ \frac{1}{2}]} 1dx+(L)\int\limits_{(\frac{1}{2},\ 1]} 2dx=$$

$$=1\cdot m[0,\ \frac{1}{2}]+2\cdot m(\frac{1}{2},\ 1]=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Вернемся яшчэ раз да выніку з тэарэмы 3. Заўважым, што сцвярджэнне, адваротнае гэтаму выніку, не мае месца.

ПРЫКЛАД 5. Разгледзім функцыю

$$f(x)=\begin{cases}-1, \text{ калі } -1\le x<0;\\ 1, \text{ калі } 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Маем:

$$(L)\int\limits_{-1}^1 f(x)dx=(L)\int\limits_{[-1,\ 0)}(-1)dx+(L)\int\limits_{[0,\ 1]} 1dx=(-1)\cdot\text{m}[-1,\ 0)+1\cdot\text{m}[0,\ 1]=-1\cdot 1+1\cdot 1=0.$$

Такім чынам, для разглядаемай функцыі $(L)\int\limits_{-1}^1 f(x)dx=0$. Аднак разглядаемая функцыя не будзе эквівалентнай нулю на адрэзку [–1, 1].

Прыклад 5 сведчыць аб тым, што сцвярджэнне, адваротнае выніку з тэарэмы 3, не мае месца. Аднак мае месца наступнае сцвярджэнне.

ТЭАРЭМА 4. Калі $f(x)\geq 0$ амаль усюды на мностве E і $\int_E f(x)dx=0$, то $f(x)\sim 0$ на мностве E.

ДОКАЗ. Няхай $E_1=E(f>0)$, $E_2=E(f<0)$, $E_3=E(f=0)$. Дакажам, што $m(E_1\cup E_2)=0$. Адсюль будзе вынікаць, што $f(x)\sim 0$ на мностве E.

Паколькі $f(x)\geq 0$ амаль усюды на мностве E, то $mE_2=0$. Калі мы цяпер дакажам, што $mE_1=0$, то, скарыстаўшы тэарэму 4 з параграфа 3.6, атрымаем, што

$$m(E_1\cup E_2)=mE_1+mE_2=0,$$

і тэарэма 4 будзе даказаная. Такім чынам, доказ тэарэмы зводзіцца да доказу роўнасці

$$mE_1=0. \tag{5}$$

Здзейснім доказ гэтай роўнасці.

Паколькі $mE_2=0$, то

$$\int_{E_2} f(x)dx=0. \tag{6}$$

На мностве E_3 $f(x)=0$, таму

$$\int_{E_3} f(x)dx=0. \tag{7}$$

З роўнасцяў (6) і (7) і ўласцівасці адытыўнасці інтэграла вынікае, што

$$\int_{E_1} f(x)dx=\int_{E} f(x)dx.$$

Улічваючы, што па ўмове тэарэмы $\int_E f(x)dx=0$, атрымліваем:

$$\int_{E_1} f(x)dx=0. \tag{8}$$

Заўважым, што

$$E_1=\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n, \tag{9}$$

дзе $H_n=E(f\geq \frac{1}{n})$.

Скарыстаўшы тэарэму 1, атрымаем:

$$\int_{H_n} f(x)dx\geq \frac{1}{n}\cdot mH_n,\ \forall n. \tag{10}$$

Далей, улічваючы вынік з тэарэмы 2, маем:

$$\int_{E_1} f(x)dx\geq \int_{H_n} f(x)dx,\ \forall n. \tag{11}$$

З няроўнасцяў (10) і (11) вынікае, што

$$\int_{E_1} f(x)dx \ge \frac{1}{n} mH_n, \ \forall n.$$

Адсюль і роўнасці (8) атрымліваем, што

$$mH_n=0, \ \forall n.$$

Улічваючы атрыманае і роўнасць (9), будзем мець:

$$mE_1 \le \sum_{n=1}^{\infty} mH_n = 0,$$

адкуль вынікае, што $mE_1=0$.

Можна даказаць таксама наступныя тэарэмы.

ТЭАРЭМА 5. Няхай функцыі f(x), g(x) абмежаваныя і вымерныя на мностве E. Тады

$$\int_E (f(x) \pm g(x))dx = \int_E f(x)dx \pm \int_E g(x)dx,$$

$$\int_E cf(x)dx = c\int_E f(x)dx \ \ (c \text{ — адвольны рэчаісны лік}).$$

ТЭАРЭМА 6. Няхай функцыі f(x) і g(x) абмежаваныя і вымерныя на мностве E. Калі f(x)≤g(x) амаль усюды на мностве E, то

$$\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx.$$

ТЭАРЭМА 7. Няхай функцыя f(x) абмежаваная і вымерная на мностве E. Тады

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f(x)|dx.$$

ТЭАРЭМА 8 (пра лімітавы пераход пад знакам інтэграла). Няхай на вымерным мностве зададзена паслядоўнасць вымерных функцый:

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots,$$

якая збягаецца амаль усюды на мностве E да функцыі f(x). Калі існуе такі лік M, што для ўсіх n і амаль усіх x∈E

$$|f_n(x)| \le M, \qquad (12)$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$***, г. зн. магчыма лімітавы пераход пад знакам інтэграла Лебега.***

ЗАЎВАГА 2. Калі для функцый $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, … выконваецца ўмова (12), то гавораць, што гэтыя функцыі абмежаваныя ва ўсёй сваёй сукупнасці амаль усюды на мностве E.

4.3. Параўнане інтэгралаў Рымана і Лебега

ТЭАРЭМА 1. Калі на адрэзку [a, b] функцыя f(x) інтэгравальная па Рыману, то яна будзе вымернай на адрэзку [a, b], прычым мае месца роўнасць:

$$(L)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx.$$

Гэтую тэарэму падчас фармулююць наступным чынам: калі на адрэзку $[a, b]$ функцыя $f(x)$ інтэгравальная па Рыману, то яна інтэгравальная і па Лебегу, прычым абодва яе інтэгралы роўныя паміж сабой.

ДОКАЗ. Для кожнага натуральнага ліку p будзем дзяліць адрэзак $[a, b]$ на 2^p роўных частак. Атрыманыя пры гэтым частковыя адрэзкі будзем абазначаць праз $[\Delta_k^{(p)}]$, а іх даўжыні — праз $\Delta_k^{(p)}$ (k=1, 2, …, 2^p).

Няхай $M_k^{(p)} = \sup\limits_{x\in[\Delta_k^{(p)}]} f(x)$, $m_k^{(p)} = \inf\limits_{x\in[\Delta_k^{(p)}]} f(x)$.

Паколькі функцыя $f(x)$ абмежаваная на адрэзку $[a, b]$, то гэтыя верхнія і ніжнія межы будуць канечнымі ($f(x)$ — абмежаваная на адрэзку $[a, b]$ функцыя, бо яна інтэгравальная па Рыману на гэтым адрэзку).

Разгледзім наступныя функцыі:

$\varphi_p(x)=M_k^{(p)}$, калі x — унутраны пункт адрэзка $[\Delta_k^{(p)}]$,

$\psi_p(x)=m_k^{(p)}$, калі x — унутраны пункт адрэзка $[\Delta_k^{(p)}]$.

Гэтыя функцыі будуць нявызначанымі толькі на канцах частковых адрэзкаў. Зразумела, што мноства пунктаў, у якіх функцыі $\varphi_p(x)$, $\psi_p(x)$ (p=1, 2, 3, …) з'яўляюцца нявызначанымі, будзе злічоным, таму яно мае меру нуль.

Адзначым наступныя ўласцівасці функцый $\varphi_p(x)$, $\psi_p(x)$:

$$\varphi_p(x)\le f(x)\le \psi_p(x) \tag{1}$$

у тых пунктах, дзе функцыі $\varphi_p(x)$, $\psi_p(x)$ вызначаны;

$$\varphi_p(x)\ge\varphi_{p+1}(x), \tag{2}$$
$$\psi_p(x)\le\psi_{p+1}(x)$$

у тых пунктах, дзе вызначаны функцыі $\varphi_{p+1}(x)$ і $\psi_{p+1}(x)$.

З няроўнасцяў (2) і (1) вынікае, што амаль усюды на адрэзку $[a, b]$ паслядоўнасць $(\varphi_p(x))$ з'яўляецца ненарастальнай і абмежаванай знізу, таму яна мае канечны ліміт. Абазначым яго праз $\varphi(x)$: $\lim\limits_{p\to\infty}\varphi_p(x)=\varphi(x)$.

Аналагічна, амаль усюды на адрэзку $[a, b]$ паслядоўнасць $(\psi_p(x))$ мае канечны ліміт. Абазначым яго праз $\psi(x)$:

$$\lim_{p\to\infty}\psi_p(x)=\psi(x).$$

Акрамя гэтага, з няроўнасці (1) вынікае, што амаль усюды на адрэзку $[a, b]$ будзем мець:

$$\psi(x)\le f(x)\le\varphi(x). \tag{3}$$

Функцыі $\varphi_p(x)$, $\psi_p(x)$ з'яўляюцца прыступкавымі (у тых пунктах, дзе яны нявызначаныя, мы іх можам давызначыць адвольным чынам), таму гэтыя функцыі будуць вымернымі (гл. тэарэму 11 параграфа 3.7).

Акрамя гэтага,

$$(L)\int_a^b \varphi_p(x)dx=\sum_{k=1}^{2^p} M_k^{(p)}\Delta_k^{(p)}, \tag{4}$$

$$(L)\int_a^b \psi_p(x)dx = \sum_{k=1}^{2^p} m_k^{(p)}\Delta_k^{(p)}$$

(гл. прыклад 4 параграфа 4.2).

Сумы, якія стаяць справа ў роўнасцях (4), ёсць сумы Дарбу для функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a, b]$. Паколькі функцыя $f(x)$ інтэгравальная па Рыману на адрэзку $[a, b]$, то пры $p\to\infty$ кожная з такіх сум імкнецца да інтэграла Рымана:

$$(R)\int_a^b f(x)dx\,.$$

Таму, улічваючы (4), будзем мець:

$$\lim_{p\to\infty}(L)\int_a^b \varphi_p(x)dx = \lim_{p\to\infty}(L)\int_a^b \psi_p(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx\,. \tag{5}$$

Функцыя $f(x)$ інтэгравальная па Рыману на адрэзку $[a, b]$, таму яна абмежаваная на гэтым адрэзку. Адсюль і са спосабу вызначэння функцый $\varphi_p(x)$, $\psi_p(x)$ вынікае, што гэтыя функцыі будуць абмежаванымі ва ўсёй сваёй сукупнасці амаль усюды на адрэзку $[a, b]$. Таму па тэарэме пра лімітавы пераход пад знакам інтэграла Лебега будзем мець:

$$\lim_{p\to\infty}(L)\int_a^b \varphi_p(x)dx = (L)\int_a^b \varphi(x)dx\,, \tag{6}$$

$$\lim_{p\to\infty}(L)\int_a^b \psi_p(x)dx = (L)\int_a^b \psi(x)dx\,.$$

З роўнасцяў (6) і (5) вынікае, што

$$(L)\int_a^b (\varphi(x)-\psi(x))dx = 0\,.$$

Паколькі $\varphi(x)-\psi(x)\geq 0$ амаль усюды на адрэзку $[a, b]$ (гл. (3)), то на падставе тэарэмы 4 параграфа 4.2 будзем мець:

$$\varphi(x)-\psi(x)\sim 0,$$

г. зн. $\varphi(x)\sim\psi(x)$.

Адсюль і з (3) робім высновы, што

$$f(x)=\varphi(x)$$

амаль усюды на адрэзку $[a, b]$, г. зн. $f(x)\sim\varphi(x)$.

Улічваючы вымернасць функцыі $\varphi(x)$ і тое, што амаль усюды на адрэзку $[a, b]$ $f(x)\sim\varphi(x)$, атрымліваем вымернасць функцыі $f(x)$ (гл. тэарэму 10 параграфа 3.7), а таксама роўнасць (гл. тэарэму 3 параграфа 4.2)

$$(L)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b \varphi(x)dx\,. \tag{7}$$

З роўнасцяў (7), (6) і (5) вынікае наступная роўнасць:

$$(L)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx\,.$$

ТЭАРЭМА 2. Для таго, каб абмежаваная функцыя f(x), зададзеная на адрэзку [a, b], была інтэгравальнай па Рыману, неабходна і дастаткова, каб мноства ўсіх яе пунктаў разрыву мела роўную нулю меру.

З доказам гэтай тэарэмы можна пазнаёміцца ў падручніках па тэорыі функцый рэчаіснай зменнай

4.4. Сумавальныя функцыі

Мы ўжо знаёмы з паняццем інтэграла Лебега. Яно было ўведзена для абмежаванай вымернай функцыі. Распаўсюдзім цяпер паняцце інтэграла Лебега на выпадак, калі вымерная функцыя можа быць і неабмежаванай.

I. Спачатку будзем разглядаць неадмоўныя функцыі. Няхай функцыя f вымерная і неадмоўная на мностве E.

Для кожнага натуральнага ліку n разгледзім функцыю $[f(x)]_n$, зададзеную наступнай роўнасцю:

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & \text{калі } f(x) \le n; \\ n, & \text{калі } f(x) > n. \end{cases}$$

Такая функцыя называецца зрэзанай функцыяй. Дакажам, што яна вымерная на мностве E.

Лёгка заўважыць, што для любога ліку A мае месца наступная роўнасць:

$$\mathrm{E}([f(x)]_n > A) = \begin{cases} \mathrm{E}(f > A), & \text{калі } A < n; \\ \varnothing, & \text{калі } A \ge n. \end{cases}$$

Паколькі мноствы E(f>A) і ∅ з'яляюцца вымернымі, то з апошняй роўнасці вынікае вымернасць мноства E($[f(x)]_n$>A) для любога A. Гэтым даказана вымернасць функцыі $[f(x)]_n$ на мностве E.

Адзначым таксама, што зрэзаная функцыя з'яўляецца абмежаванай на мностве E. Такім чынам, для любога натуральнага ліку n зрэзаная функцыя $[f(x)]_n$ будзе абмежаванай і вымернай на мностве E.

Адсюль вынікае для любога натуральнага ліку n існаванне інтэграла

$$(L)\int_{\mathrm{E}} [f(x)]_n dx\,.$$

Заўважым, што на мностве E выконваюцца наступныя няроўнасці:

$$[f(x)]_1 \le [f(x)]_2 \le [f(x)]_3 \le \ldots\,,$$

таму (гл. тэарэму 6 параграфа 4.2) маем:

$$\int_{\mathrm{E}} [f(x)]_1 dx \le \int_{\mathrm{E}} [f(x)]_2 dx \le \int_{\mathrm{E}} [f(x)]_3 dx \le \ldots\,.$$

Гэта сведчыць аб тым, што паслядоўнасць інтэгралаў $\left(\int_E [f(x)]_n dx\right)$ з'яўляецца неспадальнай. Таму яна мае канечны або бясконцы ліміт:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E [f(x)]_n dx\,. \qquad (1)$$

АЗНАЧЭННЕ 1. Ліміт (1) называецца інтэгралам Лебега ад функцыі $f(x)$ па мноству E і абазначаецца наступным чынам:

$$(L)\int_E f(x)dx \text{ або } \int_E f(x)dx\,.$$

Калі гэты ліміт канечны, то функцыя f(x) называецца сумавальнай на мностве E.

Такім чынам, мы прыпісваем інтэграл Лебега кожнай вымернай неадмоўнай функцыі, аднак сумавальнай будзем называць тую, у якой канечны інтэграл Лебега.

ЗАЎВАГА 1. Калі f — неадмоўная вымерная і абмежаваная на мностве E функцыя, то пры дастаткова вялікіх n будзем мець:

$$[f(x)]_n = f(x),\ \forall x\in E.$$

Таму для такой функцыі інтэграл, вызначаемы формулай (1), супадае з інтэгралам Лебега, вызначаным у параграфе 4.1 пры дапамозе сум Лебега.

Такім чынам, любая неадмоўная абмежаваная і вымерная функцыя будзе інтэгравальнай.

II. Будзем цяпер разглядаць функцыі любога знака.

Няхай f — вымерная функцыя любога знака на мностве E.

Разгледзім дзве дапаможныя функцыі:

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x), \text{калі } f(x)\ge 0;\\ 0, \text{ калі } f(x)<0\end{cases} \quad \text{і } f_-(x)=\begin{cases} 0, \text{ калі } f(x)\ge 0;\\ -f(x), \text{калі } f(x)<0.\end{cases}$$

Адзначым, што $f_+(x)$, $f_-(x)$ — неадмоўныя вымерныя на мностве E функцыі. Адзначым таксама, што

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x),\ \forall x\in E.$$

Для кожнай дапаможнай функцыі існуе канечны або бясконцы інтэграл Лебега, г. зн. існуюць інтэгралы

$$\int_E f_+(x)dx,\ \int_E f_-(x)dx\,.$$

АЗНАЧЭННЕ 2. Калі кожны з інтэгралаў $\int_E f_+(x)dx$, $\int_E f_-(x)dx$ канечны, то функцыя $f(x)$ называецца сумавальнай на мностве E, а рознасць

$$\int_E f_+(x)dx-\int_E f_-(x)dx$$

называецца інтэгралам Лебега ад функцыі $f(x)$ па мностве E і абазначаецца гэтак:

$$(L)\int_E f(x)dx \text{ або } \int_E f(x)dx\,.$$

Такім чынам,

$$(L)\int_E f(x)dx = \int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx\,.$$

ЗАЎВАГА 2. Калі неадмоўная вымерная функцыя сумавальная ў сэнсе азначэння 1, то яна будзе сумавальнай і ў сэнсе азначэння 2.

Адзначым цяпер без доказу некаторыя ўласцівасці сумавальных функцый.

ТЭАРЭМА 1. Для таго, каб вымерная на мностве E функцыя f(x) была сумавальнай, неабходна і дастаткова, каб сумавальнай была функцыя |f(x)|. Калі гэтая ўмова выканана, то $\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f(x)|dx$.

ТЭАРЭМА 2. Сумавальная на мностве E функцыя будзе сумавальнай і на любым яго вымерным падмностве.

ТЭАРЭМА 3. Калі f(x)~g(x) і функцыя f(x) сумавальная на мностве E, то функцыя g(x) будзе таксама сумавальнай на гэтым мностве, прычым

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx\,.$$

ТЭАРЭМА 4. Няхай мноства E — аб'яднанне канечнага ліку мностваў, якія парамі не перасякаюцца: $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ $(E_k \cap E_{k'} = \varnothing\ \forall k \ne k')$.

Калі функцыя f(x) сумавальная на кожным мностве E_k***, то яна будзе сумавальнай і на мностве E, прычым*** $\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} f(x)dx$.

ТЭАРЭМА 5. Калі функцыя f(x) сумавальная на мностве E, якое з'яўляецца аб'яднаннем злічонага ліку мностваў, якія парамі не перасякаюцца:

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad (E_k \cap E_{k'} = \varnothing\ \forall k \ne k'),$$

то

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)dx\,.$$

ТЭАРЭМА 6. Няхай функцыі f(x) і g(x) з'яўляюцца сумавальнымі на мностве E. Тады на гэтым мностве сумавальнымі з'яўляюцца і функцыі f(x)±g(x), cf(x) (c — адвольны рэчаісны лік), прычым

$$\int_E (f(x) \pm g(x))dx = \int_E f(x)dx \pm \int_E g(x)dx\,,$$

$$\int_E cf(x)dx = c\int_E f(x)dx\,.$$

ЛІТАРАТУРА

1. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. СПб., 1999.
2. Макаров И. П. Дополнительные главы математического анализа. М., 1968.
3. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М., 1973.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
5. Оган Ю. С. Сборник задач по математическому анализу. М., 1981.
6. Фролов Н. А. Теория функций действительного переменного. М., 1961.
7. Соболев В. И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. М., 1968.

ЗМЕСТ