УДК 517.5 (075.8)

ББК 22.16я73

Ш11

Друкуецца па рашэнні рэдакцыйна–выдавецкага савета БДПУ,

рэкамендавана секцыяй фізіка–матэматычных і тэхнічных навук

(пратакол №

Рэцэнзенты:

доктар педагагічных навук, дэкан матэматычнага факультэта БДПУ *У.У. Шлыкаў*;
кандыдат фізіка–матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматыкі МДВРК *А.А. Ермаліцкі*

Шылінец, У. А.

Ш11 Шэрагі Фур'е: дапаможнік / У. А. Шылінец. — Мн.: БДПУ, 2010. — 42 с.

ISBN

У дапаможніку змешчаны тэарэтычны матэрыял і практыкаванні па раздзеле «Шэрагі Фур'е» курса матэматычнага аналізу. Складзены ў адпаведнасці з вучэбнымі праграмамі па матэматычным аналізе для спецыяльнасцей 1–02 05 04–01 Фізіка. Матэматыка, 1–02 05 04–02 Фізіка. Інфарматыка, 1–02 05 04–04 Фізіка. Тэхнічная творчасць.

Адрасуецца студэнтам фізічнага і матэматычнага факультэтаў БДПУ, будзе карысным студэнтам інжынерна-тэхнічных ВНУ, у праграму па вышэйшай матэматыцы якіх уваходзіць раздзел «Шэрагі Фур'е».

УДК 517.5 (075.8)

ББК 22.16я73

ISBN

Прадмова

Прапануемы дапаможнік змяшчае тэарэтычны матэрыял і практыкаванні па раздзеле «Шэрагі Фур'е» і прызначаецца студэнтам фізіка-матэматычных спецыяльнасцей педагагічных ВНУ. Яго змест цалкам адпавядае вучэбным праграмам па матэматычным аналізе для спецыяльнасцей 1-02 05 04-01 «Фізіка. Матэматыка», 1-02 05 04-02 «Фізіка. Інфарматыка», 1-02 05 04-04 «Фізіка. Тэхнічная творчасць».

Трыганаметрычныя шэрагі шырока выкарыстоўваюцца ў разнастайных пытаннях матэматычнай фізікі, у прыватнасці, у электратэхніцы, радыётэхніцы, тэорыі пругкіх ваганняў, метэаралогіі і г.д. Часцей усяго яны ўжываюцца пры вывучэнні перыядычных працэсаў. На практыцы часта даводзіцца раскладаць у шэраг Фур'е функцыі, якія атрымліваюцца ў выніку эксперыменту або назіранняў.

Вялікае і тэарэтычнае значэнне трыганаметрычных шэрагаў. У той час, калі ў ступеневыя шэрагі раскладаюцца нават не ўсе неабмежавана дыферэнцавальныя функцыі, для раскладання ў трыганаметрычны шэраг функцыя не павінна задавальняць настолькі цяжкім умовам. Таму трыганаметрычныя шэрагі з'яўляюцца зручным інструментам для даследавання шырокага класа функцый.

Дапаможнік разбіты на параграфы. Нумарацыя формул захоўваецца ў межах кожнага з іх. У пачатку параграфа прыводзіцца тэарэтычны матэрыял; затым падрабязна разбіраюцца тыпавыя прыклады; пасля гэтага даюцца практыкаванні для самастойнага рашэння. Амаль усе практыкаванні забяспечаны адказамі.

Сістэматычная праца з выкарыстаннем дапаможніка «Шэрагі Фур'е» забяспечыць студэнту неабходны мінімум ведаў па адпаведным раздзеле матэматычнага аналізу.

Дапаможнік будзе карысным і студэнтам інжынерна-тэхнічных ВНУ, у праграму па вышэйшай матэматыцы якіх уваходзіць раздзел «Шэрагі Фур'е».

§1. Уводзіны

Будзем вывучаць адзін прыватны выпадак функцыянальных шэрагаў, так званыя трыганаметрычныя шэрагі.

Азначэнне. Трыганаметрычным шэрагам называецца шэраг наступнага выгляду:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (1)$$

дзе $a_0, a_n, b_n (n=1,2,...)$ – рэчаісныя лікі, якія называюцца каэфіцыентамі шэрагу.

Адзначым, што кожны складнік шэрагу (1) з'яўляецца перыядычнай функцыяй перыяду 2π (2π-перыядычнай). Таму, калі шэраг (1) збягаецца, то яго сумма таксама з'яўляецца 2π-перыядычнай функцыяй.

Раней разглядалася задача выяўленне функцыі $y=f(x)$ у выглядзе сумы ступеневага шэрагу. Цяпер будзем займацца задачай выяўлення функцыі $y=f(x)$ у выглядзе сумы трыганаметрычнага шэрагу.

Паколькі сума трыганаметрычнага шэрагу з'яўляецца 2π-перыядычнай, то пры рашэнні гэтай задачы натуральна абмежавацца разглядам функцыі перыяду 2π або функцыі, зададзенай на адрэзку даўжыні 2π.

Далей мы будзем меркаваць, што функцыя $y=f(x)$ зададзена на адрэзку $[-\pi,\pi]$.

§2. Артаганальная сістэма функцый

Азначэнне. Сістэма функцый $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...$ (канечная або бясконцая), зададзеных на адрэзку $[a,b]$, называецца артаганальнай на гэтым адрэзку, калі яна задавальняе наступным дзвюм умовам:

1^0. $\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0 \quad \forall n,m\ (n\neq m);$

2^0. $\int_a^b \varphi_n^2(x)dx>0 \quad \forall n.$

Разгледзім наступную сістэму функцый:

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\dots. \qquad (1)$$

Гэта сістэма функцый называецца трыганаметрычнай сістэмай.

Тэарэма. Трыганаметрычная сістэма функцый (1) з'яўляецца артаганальнай на адрэзку $[-\pi,\pi]$.

Доказ. Спачатку праверым выкананне ўмовы 1^0:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nxdx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n = 1,2,...;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nxdx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n = 1,2,...;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cos mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+m)x}{n+m} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n \neq m,\ n = 1,2,...,\ m = 1,2,...;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\sin mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n \neq m,\ n = 1,2,...,\ m = 1,2,...;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cos mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\right)dx = 0, \quad n = 1,2,...,\ m = 1,2,... \ .$$

Праверым зараз выкананне ўмовы 2^0:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi > 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\cos 2nx\right)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi > 0, \quad n = 1,2,...;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\cos 2nx\right)dx = \pi > 0, \quad n = 1,2,... \ .$$

Практыкаванні

1. Даказаць, што сістэма функцый $1, \cos x, \cos 2x, ..., \cos nx...$ з’яўляецца ортаганальнай на адрэзку $[0, \pi]$.
2. Даказаць, што сістэма функцый $\sin x, \sin 2x, ..., \sin nx, ...$ з’яўляецца ортаганальнай на адрэзку $[0, \pi]$.
3. Даказаць, што сістэма функцый $\sin x, \sin 3x, \sin 5x, ..., \sin(2n+1)x, ...$ з’яўляецца ортаганальнай на адрэзку $[0, \frac{\pi}{2}]$.

§3. Шэрагі Фур'е

Няхай функцыя $y=f(x)$ зададзена на адрэзку $[-\pi,\pi]$ і раскладаецца на гэтым адрэзку ў трыганаметрычны шэраг:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (1)$$

Знойдзем каэфіцыенты гэтага раскладу. Пры гэтым будзем меркаваць, што трыганаметрычны шэраг збягаецца раўнамерна на адрэзку $[-\pi,\pi]$ да функцыі $f(x)$, а значыць, і на ўсёй лікавай прамой.

Паколькі шэраг (1) збягаецца раўнамерна на адрэзку $[-\pi,\pi]$, то яго можна паскладова інтэграваць на гэтым адрэзку:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx).$$

З прычыны ортаганальнасці трыганаметрычнай сістэмы функцый, кожны інтэграл пад знакам сумы роўны нулю, таму будзем мець

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=a_0\pi,$$

адкуль

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx. \qquad (2)$$

Памножым цяпер абедзве часткі роўнасці (1) на $\cos kx$. Раўнамерная збежнасць шэрагу ад гэтага не парушыцца.

Здзейснім паскладовае інтэграванне гэтага шэрагу на адрэзку $[-\pi,\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kxdx).$$

Кожны інтэграл у правай частцы апошняй роўнасці, за выключэннем інтэграла $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx$, які атрымліваецца пры $n=k$, роўны нулю (глядзі §2). Таму будзем мець:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx,$$

адкуль

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx, \quad k=1,2,\ldots \quad . \qquad (3)$$

Заўважым, што роўнасць (2) можна атрымаць з роўнасці (3) пры $k=0$.

Калі роўнасць (1) памножыць на $\sin kx$ і здзейсніць паскладовае інтэграванне атрыманага шэрагу на адрэзку $[-\pi,\pi]$, то будзем мець:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k = 1,2,\ldots \quad .$$

Атрыманыя вынікі можна сфармуляваць у выглядзе наступнай тэарэмы.

Тэарэма 1. Калі функцыя $y = f(x)$ на адрэзку $[-\pi,\pi]$ раскладаецца ў раўнамерна збежны трыганаметрычны шэраг, то каэфіцыенты a_0, a_n, b_n гэтага раскладу знаходзяцца адназначна па наступных формулах:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,\ldots \quad . \tag{4}$$

Азначэнне. Няхай функцыя $y = f(x)$ інтэгравальная на адрэзку $[-\pi,\pi]$. Лікі a_n, b_n, якія вызначаюцца формуламі (4), называюцца каэфіцыентамі Фур'е функцыі $y = f(x)$. Трыганаметрычны шэраг з такімі каэфіцыентамі называецца шэрагам Фур'е функцыі $y = f(x)$.

Адзначым, што кожнай функцыі $y = f(x)$, інтэгравальнай на адрэзку $[-\pi,\pi]$, можна паставіць у адпаведнасць яе шэраг Фур'е:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

дзе a_n, b_n вызначаюцца формуламі (4). Аднак, як і ў выпадку ступеневых шэрагаў, нельга сцвярджаць, што шэраг Фур'е функцыі $y = f(x)$ збягаецца да гэтай функцыі. Пытанне аб збежнасці шэрагу Фур'е застаецца адкрытым.

Калі скарыстаць паняцце шэрагу Фур'е, то даказаную вышэй тэарэму 1 можна сфармуляваць наступным чынам.

Тэарэма $1'$**.** Калі функцыя $y = f(x)$ на адрэзку $[-\pi,\pi]$ раскладаецца ў раўнамерна збежны трыганаметрычны шэраг, то гэты шэраг з'яўляецца яе шэрагам Фур'е.

З гэтай тэарэмы можна зрабіць высновы, што пры даследаванні пытання аб выяўленні функцыі $y = f(x)$ у выглядзе сумы трыганаметрычнага шэрагу мы павінны асаблівую ўвагу надаваць шэрагу Фур'е гэтай функцыі.

Далей мы будзем займацца пытаннем аб выяўленні функцыі $y = f(x)$ у выглядзе сумы яе шэрагу Фур'е.

Як было ўжо адзначана вышэй, кожнай функцыі $y = f(x)$, інтэгравальнай на адрэзку $[-\pi,\pi]$, можна паставіць ў адпаведнасць яе шэраг Фур'е. Аднак, гэты шэраг можа і не збягацца да функцыі $y = f(x)$. Узнікае пытанне: «Якой павінна быць функцыя $y = f(x)$, каб яе шэраг Фур'е збягаўся да гэтай функцыі, г. зн. каб яна раскладалася ў шэраг Фур'е?»

Адказ дае наступная тэарэма.

Тэарэма 2 (*Дырыхле*). Няхай функцыя $y = f(x)$ задавальняе наступным умовам:

1) на інтэрвале $(-\pi,\pi)$ функцыя мае хіба толькі канечны лік пунктаў разрыву першага роду;

2) у пункце $-\pi$ функцыі $y = f(x)$ мае канечны ліміт $f(-\pi+0)$, а ў пункце π – канечны левы ліміт $f(\pi-0)$;

3) адрэзак $[-\pi,\pi]$ можна разбіць на канечны лік прамежкаў, унутры кожнага з якіх функцыя $y = f(x)$ манатонная.

Тады шэраг Фур'е функцыі $y = f(x)$ збягаецца на адрэзку $[-\pi,\pi]$, прычым яго сумма $S(x)$ роўная:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}, \text{ калі } x_0 \in (-\pi,\pi); \qquad (5)$$

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}. \qquad (6)$$

Заўвага 1. Калі функцыя $y = f(x)$ непарыўная ў пункце $x_0 \in (-\pi,\pi)$, то $S(x_0) = f(x_0)$, бо $f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0)$.

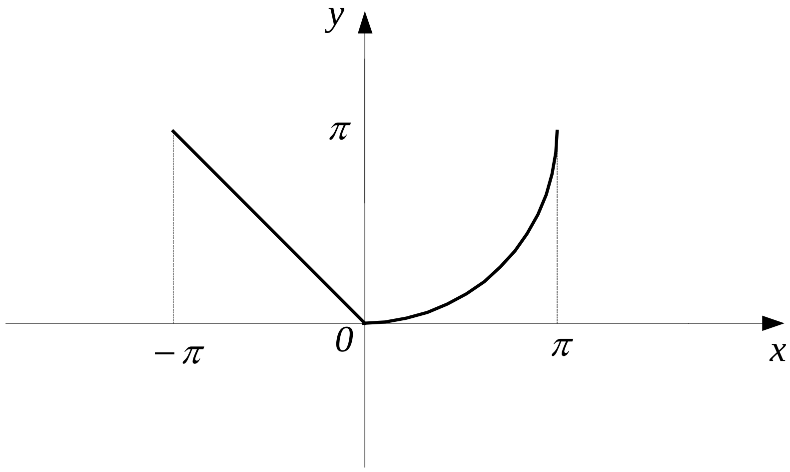
Такім чынам, калі для функцыі $y = f(x)$ на адрэзку $[-\pi,\pi]$ выконваюцца патрабаванні тэарэмы Дырыхле, то гэтая функцыя раскладаецца ў шэраг Фур'е ва ўсіх пунктах інтэрвала $(-\pi,\pi)$, у якіх яна непарыўная.

Заўвага 2. Калі функцыя $y = f(x)$ на адрэзку $[-\pi,\pi]$ задавальняе ўмовам тэарэмы Дырыхле, то згодна з гэтай тэарэмай шэраг Фур'е функцыі $y = f(x)$ збягаецца. Паколькі складнікі гэтага шэрагу – 2π-перыядычныя функцыі, то гэты шэраг збягаецца таксама і на ўсёй лікавай прамой, прычым яго сума з'яўляецца 2π-перыядычнай функцыяй.

Прыклад 1. Раскладзіце ў шэраг Фур'е функцыю, зададзеную на прамежку $[-\pi,\pi]$ формуламі:

$$f(x) = \begin{cases} -x, -\pi \le x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{\pi}, 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Графік функцыі адлюстраваны на рысунку 1.



Рыс. 1

Рашэнне. Дадзеная функцыя задавальняе ўмовам тэарэмы Дырыхле, пры якіх шэраг Фур’е збягаецца да яе ва ўсіх пунктах непарыўнасці, а ў пунктах разрыву і на канцах адрэзка $[-\pi,\pi]$ сума шэрагу вызначаецца формуламі (5) і (6).

Функцыя гэта непарыўная ва ўсіх пунктах прамежку $(-\pi,\pi)$. Знойдзем каэфіцыенты шэрагу Фур’е дадзенай функцыі па формулах (4):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi^2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{\pi}x^2\cos nxdx \quad (n=1,2,\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\sin nxdx=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{\pi}x^2\sin nxdx \quad (n=1,2,\ldots).$$

У выразе для a_n мы зрабілі пераўтварэнне:

$$\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nxdx=\int_{0}^{-\pi}x\cos nxdx=\int_{0}^{\pi}(-t)\cos(-nt)(-dt)=\int_{0}^{\pi}t\cos ntdt=\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx,$$

скарыстаўшы падстаноўку

$$\begin{array}{l|l} x=-t, & x=0, t=0, \\ dx=-dt, & x=-\pi, t=\pi, \end{array}$$

і ў апошняй роўнасці змянілі абазначэнне: t замянілі на x.

Пераўтварэнне выразу для b_n ажыццяўляецца аналагічным чынам з улікам няцотнасці сінуса.

Знойдзем цяпер метадам інтэгравання па частках інтэгралы, якія ўваходзяць у выразы для a_n, b_n:

$$I_1 = \int_0^\pi x\cos nx dx; \qquad I_2 = \int_0^\pi x\sin nx dx;$$

$$I_3 = \int_0^\pi x^2\cos nx dx; \qquad I_4 = \int_0^\pi x^2\sin nx dx.$$

Вылічым значэнне I_1. Мяркуем

$$u = x,\ dv = \cos nx dx,$$

адкуль

$$du = dx,\ v = \frac{\sin nx}{n},$$

значыць,

$$I_1 = \frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx dx = \frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^\pi = \frac{\pi\sin n\pi}{n} - \frac{0\cdot\sin 0}{n} +$$

$$+\frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\cos 0 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2} & \text{пры } n \text{ няцотным,} \\ 0 & \text{пры } n \text{ цотным.} \end{cases}$$

Мы скарысталі роўнасці:

$$\sin n\pi = 0,\ \cos n\pi = \begin{cases} -1 & \text{пры } n \text{ няцотным,} \\ 1 & \text{пры } n \text{ цотным.} \end{cases}$$

Вылічваем I_2. Мяркуем

$$u = x,\ dv = \sin nx dx,$$

адкуль

$$du = dx,\ v = -\frac{\cos nx}{n}.$$

Такім чынам,

$$I_2 = -\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx dx = -\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^\pi = -\frac{\pi\cos n\pi}{n} +$$

$$+\frac{0\cdot\cos 0}{n} + \frac{1}{n^2}\sin n\pi - \frac{1}{n^2}\sin 0 = -\frac{\pi(-1)^n}{n} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}.$$

Знойдзем значэнне I_3. Мяркуем

$$u = x^2,\ dv = \cos nx dx,$$

адкуль

$$du = 2xdx,\ v = \frac{\sin nx}{n}.$$

$$I_3 = \frac{x^2 \sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{\pi^2 \sin n\pi}{n} - \frac{0 \cdot \sin 0}{n} - \frac{2}{n}\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= (-1)^{n+2}\frac{2\pi}{n^2} = (-1)^n \frac{2\pi}{n^2}.$$

Мы скарысталі значэнне I_2.

Вылічым, нарэшце, I_4. Мяркуем

$$u = x^2,\ dv = \sin nx dx,$$

адкуль

$$du = 2xdx,\ v = -\frac{\cos nx}{n}.$$

Такім чынам,

$$I_4 = -\frac{x^2 \cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \cos nx dx = -\frac{\pi^2 \cos n\pi}{n} + \frac{0 \cdot \cos 0}{n} + \frac{2}{n}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right) =$$

$$= -\frac{\pi^2 (-1)^n}{n} + \frac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right) = (-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right).$$

Падставім знойдзеныя значэнні інтэгралаў у выразы для a_n і b_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi} I_1 + \frac{1}{\pi^2} I_3 = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} + \frac{1}{\pi^2}(-1)^n \frac{2\pi}{n^2} = \frac{(-1)^n - 1 + (-1)^n \cdot 2}{\pi n^2} =$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot 3 - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{пры } n \text{ няцотным}, \\ \dfrac{2}{\pi n^2} & \text{пры } n \text{ цотным}, \end{cases}$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} I_2 + \frac{1}{\pi^2} I_4 = -\frac{1}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n} + \frac{1}{\pi^2}\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right)\right\} =$$

$$= (-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \frac{2}{\pi^2 n^3}\left((-1)^n - 1\right) = \frac{2}{\pi^2 n^3}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi^2 n^3} \quad \text{пры} \quad n \quad \text{няцотным}, \\ \quad 0 \quad \text{пры} \quad n \quad \text{цотным}. \end{cases}$$

Цяпер мы можам запісаць расклад дадзенай функцыі ў шэраг Фур'е:

$$f(x) = \frac{5}{12}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n \cdot 3 - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{2}{\pi^2 n^3}((-1)^n - 1)\sin nx\right\} =$$

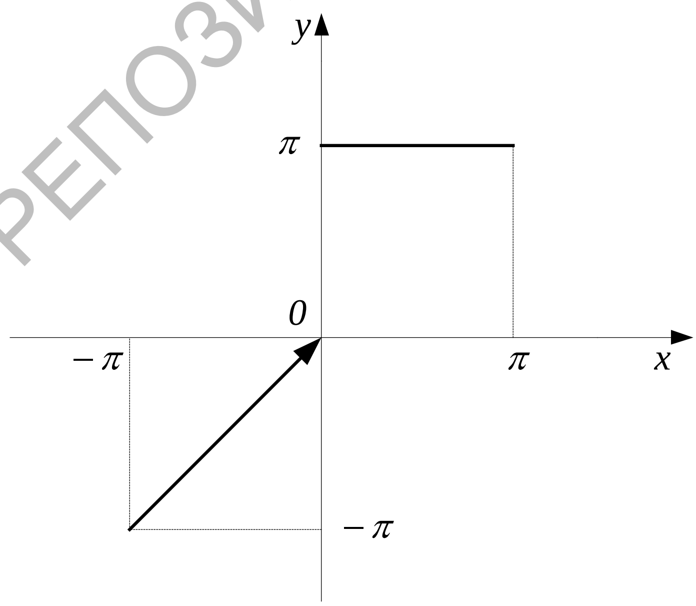
$$= \frac{5}{12}\pi - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{\pi^2}\sin x + \frac{1}{2\pi}\cos 2x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x - \frac{4}{27\pi^2}\sin 3x +$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\cos 4x + \ldots, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Прыклад 2. Раскладзіце ў шэраг Фур'е функцыю, зададзеную на прамежку $[-\pi, \pi]$ выразам:

$$f(x) = \begin{cases} x \quad \text{пры} -\pi \le x < 0, \\ \pi \quad \text{пры } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Рашэнне. Графік функцыі адлюстраваны на рысунку 2.



Рыс. 2

Нам спатрэбяцца значэнні лімітаў:

$$f(-\pi+0)=\lim_{x\to-\pi+0} f(x)=\lim_{x\to-\pi+0} x=-\pi,\; f(\pi-0)=\lim_{x\to\pi-0} f(x)=\lim_{x\to\pi-0} \pi=\pi,$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to0+0} f(x)=\lim_{x\to0+0} \pi=\pi,\; f(0-0)=\lim_{x\to0-0} f(x)=\lim_{x\to0-0} x=0.$$

Вылічым каэфіцыенты шэрагу Фур’е:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} xdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{0}+x\bigg|_{0}^{\pi}=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi\cos nxdx=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{-\pi} x\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}\cos nxdx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx+\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}=-\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2}=\frac{1+(-1)^{n+1}}{\pi n^2}=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi n^2} & \text{пры } n \text{ няцотным},\\ 0 & \text{пры } n \text{ цотным},\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi\sin nxdx=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{-\pi} x\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\sin nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx-\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}=\frac{1}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}-\frac{\cos\pi n}{n}+\frac{\cos 0}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2+1}{n}=\begin{cases}\dfrac{3}{n} & \text{пры } n \text{ няцотным},\\ -\dfrac{1}{n} & \text{пры } n \text{ цотным}.\end{cases}$$

Шэраг Фур’е для дадзенай функцыі мае наступны выгляд:

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2+1}{n}\sin nx\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cos x+3\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+$$

$$+\frac{2}{9\pi}\cos 3x+\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots\quad .$$

Гэты шэраг, відавочна, збягаецца да дадзенай функцыі на інтэрвалах непарыўнасці $(-\pi,0)$ і $(0,\pi)$. У пункце $x=0$ сума шэрагу Фур’е ў адпаведнасці з формулай (5), роўная

$$\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{0+\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

У пунктах $x=-\pi$ і $x=\pi$ сума шэрагу Фур’е згодна з роўнасцю (6) роўная

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0.$$

Прыклад 3. Раскладзіце ў трыганаметрычны шэраг Фур’е функцыю

$$f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi\le x<0,\\ \pi-x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Рашэнне. Дадзеная функцыя задавальняе ўмовам тэарэмы Дырыхле, пры якіх шэраг Фур’е функцыі збягаецца да яе ва ўсіх пунктах непарыўнасці, а ў пунктах разрыву і на канцах прамежку $[-\pi,\pi]$ сума шэрагу вызначаецца формуламі (5) і (6).

Вылічым каэфіцыенты Фур’е:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{3}{2}\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cos nxdx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx=-\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\sin nxdx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-1)^n}{n}.$$

Падставім іх у роўнасць (1):

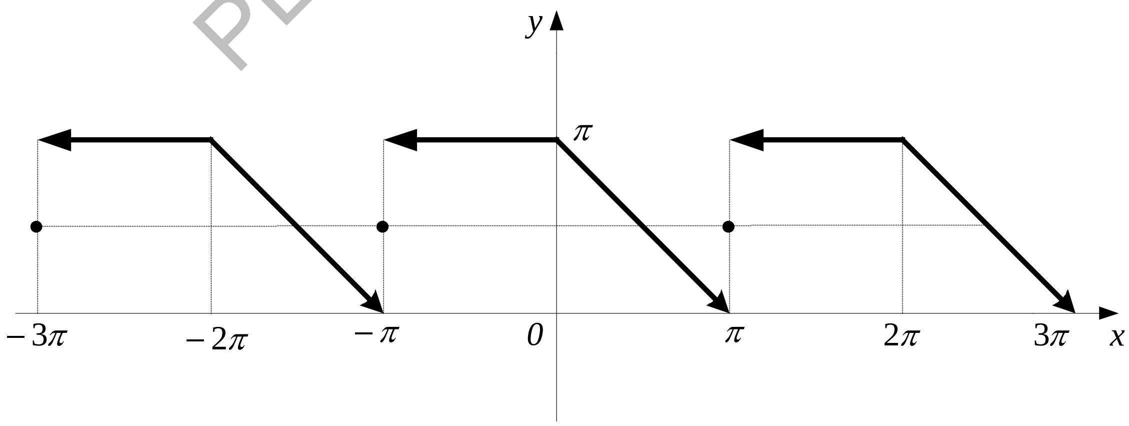
$$f(x)=\frac{3}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right).$$

Знойдзены расклад мае месца пры ўсіх значэннях $x\in(-\pi,\pi)$.

Адзначым, што шэраг

$$\frac{3}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right)$$

збягаецца пры ўсіх x да функцыі, графік якой адлюстраваны на рысунку 3.



Рыс. 3

Прыклад 4. Раскладзіце ў шэраг Фур’е функцыю

$$f(x)=\begin{cases}-x \quad \text{пры} \quad -\pi\le x\le 0,\\ 0 \quad \text{пры} \quad 0<x<\pi.\end{cases}$$

Пры дапамозе атрыманага раскладу пакажыце, што

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots \ .$$

Рашэнне. Па формулах (4) знаходзім каэфіцыенты шэрагу Фур’е:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0dx=-\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{0}=\frac{\pi^2}{2\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}xd\left(\frac{\sin nx}{n}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}x\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx=-\frac{1}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}=-\frac{1}{\pi n^2}(\cos 0-\cos n\pi)=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi-\cos 0)=\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right),$$

г.зн. $a_n=-\dfrac{2}{\pi n^2}$ пры n няцотным; $a_n=0$ пры n цотным;

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}xd\left(\frac{\cos nx}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nx}{n}dx=\frac{1}{\pi n}\big(0\cos 0-(-\pi)\cos(-\pi)\big)-\frac{1}{\pi n}\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}=$$

$$=\frac{\pi\cos n\pi}{\pi n}=\frac{(-1)^n}{n}.$$

Такім чынам,

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi\le x\le\pi).$$

Пры $x=0$ атрымаем

$$0=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \quad \text{ці}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},$$

што і трэба было паказаць.

Практыкаванні

На прамежку $(-\pi,\pi)$ раскладзіце ў шэраг Фур'е наступныя функцыі:

1. $f(x)=1-2x.$

2. $f(x)=2-3x.$

3. $f(x)=\begin{cases}2, -\pi<x<0,\\ -4, 0<x<\pi.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}-7, -\pi<x<0,\\ 2, 0<x<\pi.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}0, -\pi<x<0,\\ 2, 0<x<\pi.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-\pi-x}{2}, -\pi\le x<0,\\ \dfrac{\pi-x}{2}, 0<x\le\pi.\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x\le 0,\\ \sin x, 0<x<\pi.\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0,\\ 1, 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ -1, \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi.\end{cases}$

9. $f(x)=e^{x}.$

10. $f(x)=\begin{cases}x+\pi, -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\\ -x+\pi, \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2a}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right), -\pi<x<0,\\ \dfrac{2a}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right), 0\le x<\pi.\end{cases}$

12. Дакажыце праўдзівасць роўнасці

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}.$$

13. Пры дапамозе раскладу ў шэраг Фур'е функцыі задачы 11 вылічыце суму шэрагу

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)^2}+\ldots\quad .$$

§4. Асаблівасці шэрагаў Фур’е цотных і няцотных функцый

Спачатку адзначым, што ў далейшым мы будзем карыстацца наступнымі ўласцівасцямі цотных і няцотных функцый.

Лема 1. Здабытак дзвюх цотных або дзвюх няцотных функцый ёсць функцыя цотная.

Лема 2. Здабытак цотнай і няцотнай функцый ёсць функцыя няцотная.

Доказ лем 1 і 2 вынікае з азначэння цотнай і няцотнай функцый.

Лема 3. Няхай функцыя $f(x)$ інтэгравальная на адрэку $[-\pi,\pi]$. Калі $f(x)$ – цотная функцыя, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

Калі $f(x)$ – няцотная функцыя, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

Доказ. Сапраўды,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx .$$

Зробім у першым інтэграле падстаноўку $x=-t$, тады

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)dx = -\int_{\pi}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{\pi} f(-t)dt = \int_{0}^{\pi} f(-x)dx ,$$

пры гэтым

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi}\left(f(x)+f(-x)\right)dx.$$

Калі $f(x)$ – цотная фнкцыя, то $f(-x)=f(x)$ і, значыць,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

Калі ж $f(x)$ – няцотная функцыя, то $f(-x)=-f(x)$ і, значыць,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

Калі скарыстаць разгледжаныя вышэй лемы, то атрымаем наступныя вынікі.

1. Няхай $f(x)$ – цотная функцыя, зададзеная на адрэзку $[-\pi,\pi]$.

Паколькі $\cos nx$ $(n=0,1,2,...)$ ёсць функцыя, відавочна, цотная, то згодна з лемай 1 будзе цотная і функцыя $f(x)\cos nx$. Функцыя $\sin nx$ $(n=1,2,...)$ няцотная. Таму згодна з лемай 2 няцотнай будзе і функцыя $f(x)\sin nx$.

Тады для каэфіцыентаў Фур’е цотнай функцыі $f(x)$ атрымліваем:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ &\qquad (n = 0,1,2,\ldots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0 \\ &\qquad (n = 1,2,\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Такім чынам, для цотнай фнкцыі шэраг Фур'е змяшчае толькі косінусы, г.зн.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

прычым каэфіцыенты a_n вылічваюцца па формулах (1).

Няхай цяпер $f(x)$ – няцотная функцыя, зададзеная на адрэзку $[-\pi, \pi]$. $\cos nx$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ – цотная функцыя, значыць, згодна з лемай 2 функцыя $f(x)\cos nx$ будзе няцотнай. Функцыя $\sin nx$ $(n = 1,2,\ldots)$ з'яўляецца няцотнай. Таму згодна з лемай 1 функцыя $f(x)\sin nx$ будзе цотнай.

Тады для каэфіцыентаў Фур'е няцотнай фунцыі $f(x)$ атрымліваем:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0 \quad (n = 0,1,2,\ldots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1,2,\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

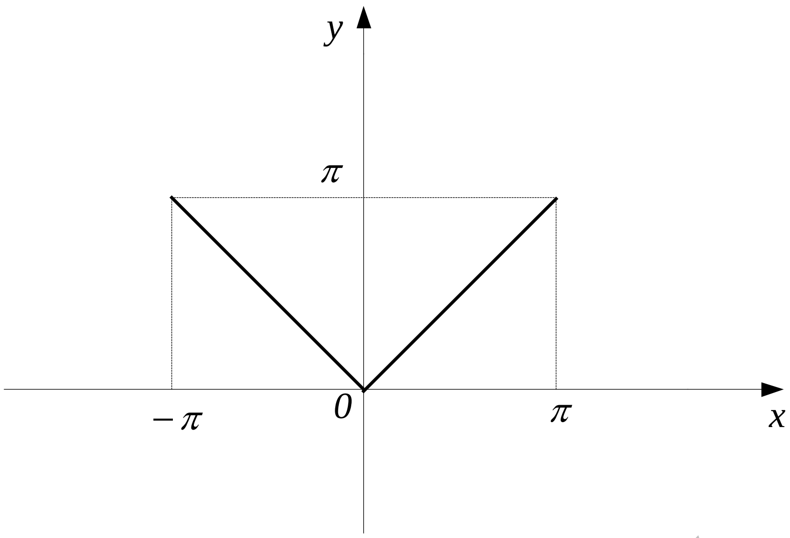
Такім чынам, шэраг Фур'е няцотнай функцыі змяшчае толькі сінусы, г.зн.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

дзе b_n вылічваюцца па формулах (2).

Паколькі шэраг Фур'е для няцотнай функцыі змяшчае толькі сінусы, то, відавочна, ён заўсёды збягаецца да нулявога значэння пры $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$.

Прыклад. Раскладзіце ў шэраг Фур'е функцыю, зададзеную на прамежку $-\pi \le x \le \pi$ формулай $f(x) = |x|$ (рыс. 4).



Рыс. 4

Рашэнне. Функцыя $f(x)$ – цотная, таму каэфіцыенты шэрагу вызначаюцца па формулах (1):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right); \quad b_n = 0.$$

Такім чынам,

$$a_0 = \pi, \quad a_1 = -\frac{4}{\pi\cdot 1^2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{4}{\pi\cdot 3^2}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = -\frac{4}{\pi\cdot 5^2}, \quad \ldots .$$

Дадзеная фунцыя задавальняе ўмовам тэарэмы Дырыхле, значыць, мае месца роўнасць

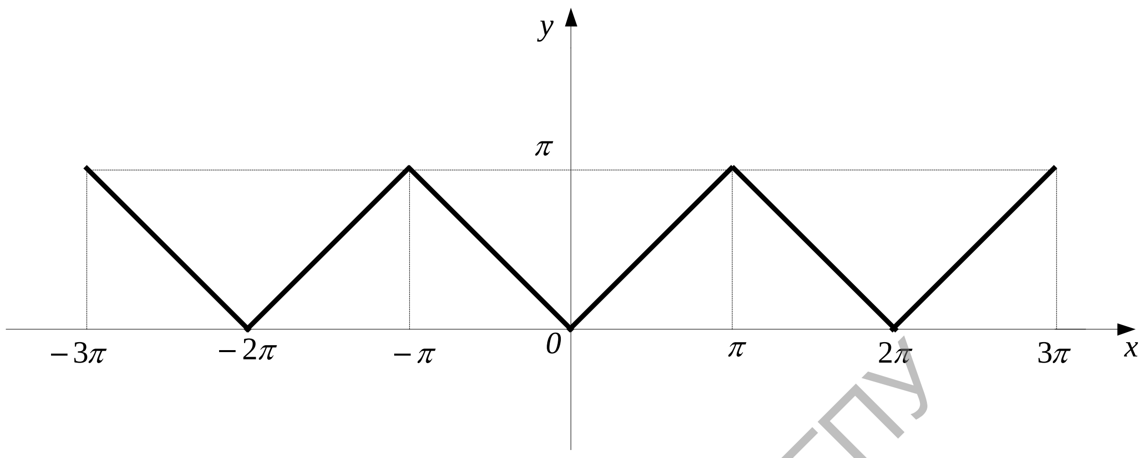
$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \ldots\right) =$$

$$= \begin{cases} |x|, & \text{калі} \quad x \in (-\pi, \pi), \\ \dfrac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \pi, & \text{калі} \quad x = \pm\pi, \end{cases}$$

г.зн.

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \ldots\right) \quad (-\pi \le x \le \pi).$$

Графік сумы атрыманага шэрагу Фур'е адлюстраваны на рысунку 5.



Рыс. 5

Практыкаванні

У прамежку $(-\pi, \pi)$ раскладзіце ў шэраг Фур'е наступныя функцыі:

1. $f(x) = x$.
2. $f(x) = x^3$.
3. $f(x) = \cos\frac{x}{3}$.
4. $f(x) = |\sin x|$.
5. $f(x) = 1 - \frac{1}{4}|x|$.
6. $f(x) = \sin ax,\ a \notin \mathbf{Z}$.
7. $f(x) = \operatorname{sh} x$.
8. $f(x) = x\cos x$.
9. $f(x) = x\sin x$.
10. $f(x) = \operatorname{ch} ax$.

§ 5. Раскладанне ў трыганаметрычны шэраг зададзенай на адрэзку $[0, \pi]$ функцыі

Няхай на адрэзку $[0, \pi]$ зададзена функцыя $f(x)$, якая на гэтым адрэзку задавальняе ўмовам тэарэмы Дырыхле. Разгледзім задачу раскладання дадзенай функцыі ў трыганаметрычны шэраг. Класічны шэраг Фур'е для дадзенай функцыі мы пабудаваць не можам, бо яна зададзена на адрэзку $[0, \pi]$, а не на адрэзку $[-\pi, \pi]$.

Давызначым дадзеную функцыю на прамежку $[-\pi, 0)$. Для гэтага возьмем адвольную функцыю $g(x)$, якая зададзена на прамежку $[-\pi, 0)$ і на гэтым прамежку задавальняе ўмовам тэарэмы Дырыхле, і пабудуем функцыю

$$F(x) = \begin{cases} f(x), \text{ калі } x \in [0, \pi], \\ g(x), \text{ калі } x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Для функцыі $F(x)$ на адрэзку $[-\pi, \pi]$ выконваюцца ўсе патрабаванні тэарэмы Дырыхле, таму функцыя $F(x)$ раскладаецца ў шэраг Фур'е ва ўсіх пунктах інтэрвала $(-\pi, \pi)$, у якіх яна непарыўная:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

дзе

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Паколькі на інтэрвале $(0, \pi)$ $F(x) = f(x)$, то будзем мець

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Гэты расклад мае месца ва ўсіх пунктах інтрвала $(0, \pi)$, у якіх функцыя $f(x)$ непарыўная.

Адзначым, што расклад функцыі $f(x)$ у трыганаметрычны шэраг не будзе адзіным, бо функцыю $g(x)$ мы можам абраць бясконцым мноствам спосабаў.

Інтарэс выклікаюць наступныя два выпадкі.

1. Выбіраем функцыю $g(x)$ такім чынам, каб функцыя $F(x)$ была цотнай на адрэзку $[-\pi, \pi]$. Тады функцыя $f(x)$ на інттэрвале $(0, \pi)$ раскладаецца ў шэраг па косінусах (паколькі $b_n = 0$):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx dx,$$

дзе

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Гэты расклад мае месца ў тых пунктах інтэрвала $(0, \pi)$, у якіх функцыя $f(x)$ непарыўная.

2. Выбіраем функцыю $g(x)$ такім чынам, каб функцыя $F(x)$ была няцотнай на адрэзку $[-\pi, \pi]$. Пры гэтым мяркуем, што $F(x) = 0$.

Тады функцыю $f(x)$ раскладаецца ў шэраг толькі па сінусах (бо $a_n = 0$):

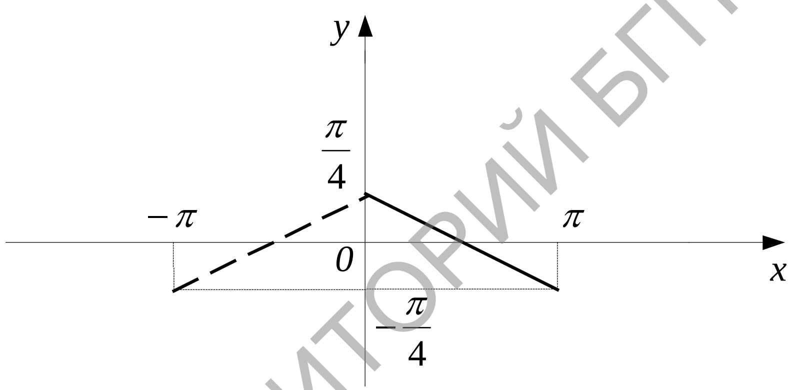
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

дзе

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1, 2, ...).$$

Гэты расклад мае месца ў тых пунтах інтэрвала $(0, \pi)$, у якіх функцыя $f(x)$ непарыўная.

Прыклад. Функцыю $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}$ раскладзіце ў шэраг па косінусах на інтэрвале $(0, \pi)$ (рыс. 6).



Рыс. 6

Рашэнне. Працягваючы гэтую функцыю цотным чынам, як паказана на рысунку 6 пункцірам, будзем мець:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4}\right) = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx dx = -\frac{\cos nx}{\pi n^2}\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2} - (-1)^n\frac{1}{\pi n^2} = \frac{1}{\pi n^2}\left(1 - (-1)^n\right);$$

$$a_{2k} = 0, a_{2k+1} = \frac{2}{\pi(2k+1)^2};$$

таму

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)}{(2k+1)^2}.$$

Практыкаванні

У прамежку $(0,\pi)$ раскладзіце ў шэраг па косінусах наступныя функцыі:

1. $f(x)=x.$
2. $f(x)=-x.$
3. $f(x)=\frac{1}{2}x-1.$
4. $f(x)=-x^2.$
5. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3.$
6. $f(x)=e^{ax}.$
7. $f(x)=\frac{\pi-x}{2}.$
8. $f(x)=|\cos x|.$
9. $f(x)=\begin{cases}1,\ 0<x<h,\\ 0,\ h<x<\pi.\end{cases}$
10. $f(x)=\begin{cases}\cos x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\\ -\cos x,\ \frac{\pi}{2}<x\le\pi.\end{cases}$

У прамежку $(0,\pi)$ раскладзіце ў шэраг па сінусах наступныя функцыі:

11. $f(x)=x.$
12. $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}.$
13. $f(x)=e^{ax}.$
14. $f(x)=\cos ax.$

Наступныя функцыі раскладзіце ў інтэрвале $(0,\pi)$ у шэраг: а) па сінусах; б) па косінусах:

15. $f(x)=2x.$
16. $f(x)=chx.$
17. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2^x}}.$
18. $f(x)=\begin{cases}x,\ 0<x<\frac{\pi}{3},\\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3},\\ -x+\pi,\ \frac{2\pi}{3}<x<\pi.\end{cases}$

§6. Шэрагі Фур'е для функцый любога перыяду

Няхай $f(x)$ – перыядычная функцыя перыяду $T=2l$ ($l-$ паўперыяд) і кускова-манатонная на адрэзку $[-l,l]$ (г.зн. задавальняе на гэтым адрэзку ўмовам тэарэмы Дырыхле). Мяркуем $x=at$ і атрымаем функцыю $f(at)$ аргумента t, перыяд якой роўны $\frac{2\pi}{a}$. Падбіраем a так, каб перыяд функцыі $f(at)$ быў роўны 2π, г.зн.

$$\frac{T}{a}=\frac{2l}{a}=2\pi, \quad \text{адкуль} \quad a=\frac{l}{\pi}.$$

Тады падстаноўка $x=\frac{l}{\pi}t$ прыводзіць да функцыі $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ перыяду 2π. Гэтая функцыя задавальняе ўмовам раскладальнасці ў шэраг Фур'е, бо яна кускова-манатонная на адрэзку $[-\pi,\pi]$. (Лёгка ўбачыць, што адрэзку $[-l,l]$ значэнняў x адпавядае адрэзак $[-\pi,\pi]$ значэнняў t.)

Расклаўшы функцыю $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ у шэраг Фур'е, атрымаем:

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt), \tag{1}$$

пры гэтым

$$\left.\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos ntdt, n=0,1,2,...,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\sin ntdt, n=1,2,... \quad . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Зыходзячы з роўнасці $x=\frac{l}{\pi}t$, пяройдзем цяпер зноў да зменнай x. Паколькі $t=\frac{\pi}{l}x, dt=\frac{\pi}{l}dx$, і лімітам інтэгравання па t ад $-\pi$ да π адпавядаюць ліміты па x ад $-l$ да l, то

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x), \tag{3}$$

пры гэтым

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, \ n=0,1,\ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \ n=1,2,\ldots \quad .$$

Шэрагам Фур'е любой функцыі $f(x)$ перыяду $T=2l$, якая непарыўная або мае канечны лік пунктаў разрыву першага роду на адрэзку $[-l,l]$, называецца трыганаметрычны шэраг выгляду:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x), \tag{3'}$$

каэфіцыенты якога вызначаюцца роўнасцямі:

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\\ a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,\ n=1,2,\ldots,\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,\ n=1,2,\ldots\quad. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Калі $f(x)$ – функцыя перыяду $T=2l$ і кускова-манатонная на адрэзку $[-l,l]$, то яна раскладаецца ў шэраг Фур'е, г.зн. роўнасць (3) мае месца ва ўсіх пунктах непарыўнасці функцыі $f(x)$.

У пунктах разрыву функцыі $f(x)$ сума шэрагу Фур'е роўная

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

У выпадку цотнай функцыі з перыядам $2l$ усе $b_n=0$ і, значыць, у шэрагу Фур'е адсутнічаюць складнікі з сінусамі. Тады атрымаем у пунктах непарыўнасці:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{5}$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\quad (n=1,2,...)\ . \tag{6}$$

У выпадку няцотнай функцыі з перыядам $2l$ усе $a_n=0$ і, значыць, у пунктах непарыўнасці атрымліваем:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{7}$$

дзе

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ \ (n=1,2,\ldots). \tag{8}$$

Прыклад 1. Напішыце расклад у шэраг Фур'е няцотнай функцыі з перыядам 1.

Рашэнне. Тут $2l=1$, і на падставе (7), (8) атрымліваем:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2n\pi x, \text{ дзе } b_n = 4\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\sin 2n\pi\, x dx.$$

Прыклад 2. Раскладзіце функцыю $f(x)=x, -1<x<1,$ перыяду $T=2$ у шэраг Фур'е.

Рашэнне. Функцыя $f(x)$ – няцотная і задавальняе ўмовам раскладальнасці ў шэраг Фур'е, таму на падставе (7), (8) маем:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \quad (\text{тут } l=1),$$

дзе

$$b_n = 2\int_0^1 x\sin n\pi\, x dx = 2\left(-x\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi\, x dx \right) =$$

$$= 2\left(-\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^1 \right) = -\frac{2\cos n\pi}{n\pi} = (-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}, \quad n=1, 2, 3, \ldots \quad .$$

Такім чынам,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\pi x}{1} - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n} + \cdots \right)$$

або інакш

$$x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\pi x}{1} - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n} + \cdots \right), \quad -1<x<1.$$

У прыватнасці, пры $x=\frac{1}{2}$ атрымаем:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right),$$

адкуль

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots \quad .$$

Практыкаванні

Раскладзіце ў шэраг Фур’е дадзеныя функцыі на адзначаных прамежках:

1. $f(x)=x,\ \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right).$

2. $f(x)=|x|,\ (-2,2).$

3. $f(x)=|x|,\ \left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right).$

4. $f(x)=x^2,\ (-3,3).$

5. $f(x)=x^2,\ \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right).$

Раскладзіце ў шэраг Фур’е ў прамежку $(-l,l)$ наступныя функцыі:

6. $f(x)=\begin{cases}1, -l\le x\le 0,\\ -1,\ 0<x<l.\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}0, -l\le x\le 0,\\ x,\ 0<x<l.\end{cases}$

8. $f(x)=x.$

9. $f(x)=|x|.$

10. $f(x)=x^2.$

11. Раскладзіце функцыю $f(x)=x^2$ у шэраг Фур’е па сінусах на адрэзку $\left[0,\dfrac{1}{2}\right].$

12. Раскладзіце у шэраг Фур’е на адрэзку $[0,3]$ функцыю

$$f(x)=\begin{cases}x,\ 0\le x\le 1;\\ 1,\ 1<x<2;\\ 3-x,\ 2\le x\le 3.\end{cases}$$

§7. Шэраг Фур’е па любой артаганальнай сістэме функцый. Мінімальная ўласцівасць каэфіцыентаў Фур’е

Разгледзім артаганальную на адрэзку $[a,b]$ сістэму функцый

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ldots,\ \varphi_n(x),\ldots \quad . \tag{1}$$

Будзем для прастаты разглядаць функцыі, непарыўныя на адрэзку $[a,b]$.

Артаганальнасць на адрэзку $[a,b]$ сістэмы функцый (1) не парушыцца, калі кожную функцыю сістэмы памножыць на сталы множнік, г. зн. сістэма

$$\lambda_1\varphi_1(x),\ \lambda_2\varphi_2(x),\ldots,\ \lambda_n\varphi_n(x),\ldots \tag{1'}$$

таксама артаганальная на адрэзку $[a,b]$. Сапраўды,

$$\int_a^b \lambda_i\varphi_i(x)\ \lambda_j\varphi_j(x)dx=\lambda_i\lambda_j\int_a^b \varphi_i(x)\ \varphi_j(x)dx=0 \quad (i\ne j).$$

Азначэнне 1. Сістэма (1) называецца ортаганальнай і ўнармаванай (ортаўнармаванай) на адрэзку $[a,b]$, калі яна ортаганальная на гэтым адрэзку, г.зн.

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)dx = 0 \quad i \neq j,\ i,\ j = 1,2,\ldots,$$

і ўнармаваная, г.зн.

$$\int_a^b (\varphi_i(x))^2 dx = 1, \quad i = 1,2,\ldots,$$

ці, што тое ж, калі

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{2}$$

Напрыклад, сістэма функцый

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x,\ \ldots,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx,\ldots$$

ортаўнармаваная на адрэзку $[0,\pi]$.

Заўважым, што любую ортаганальную на адрэзку $[a,b]$ сістэму (1) можна ўнармаваць, калі памножыць кожную функцыю гэтай сістэмы на некаторы множнік, які называецца нармоўным.

Сапраўды, сістэма функцый

$$\lambda_1\varphi_1(x),\ \lambda_2\varphi_2(x),\ldots,\ \lambda_n\varphi_n(x),\ldots \tag{$1'$}$$

ортаганальная на адрэзку $[a,b]$. Падбярэм цяпер множнікі λ_n $(n = 1,2,\ldots)$ так, каб выконвалася ўмова $\int_a^b (\lambda_n\varphi_n(x))^2 dx = 1, \quad n = 1,2,\ldots$.

З гэтай умовы вызначаем

$$\lambda_n = \frac{1}{\pm\sqrt{\int_a^b (\varphi_n(x))^2 dx}}, \quad n = 1,2,\ldots \ . \tag{3}$$

Гэтыя лікі λ_n $(n = 1,2,\ldots)$ называюцца нармоўнымі множнікамі (знак у кораня можна браць любы), пры такіх λ_n $(n = 1,2,\ldots)$ сістэма $(1')$ будзе ортаўнармаванай.

Азначэнне 2. Шэрагам па ортаганальнай сістэме функцый (1) называецца шэраг выгляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x),$$

дзе лікі a_n $(n = 1,2,\ldots)$ – каэфіцыенты шэрагу.

Няхай функцыя $f(x)$ з'яўляецца сумай раўнамерна збежнага на адрэзку $[a,b]$ шэрагу па ортаганальнай сістэме функцый (1):

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(x) + \ldots \quad .$$

Вызначым каэфіцыенты гэтага шэрагу. Функцыя $f(x)$, як сумма раўнамерна збежнага на адрэзку $[a,b]$ шэрагу непарыўных функцый, з'яўляецца непарыўнай функцыяй на гэтым адрэзку.

Памножыўшы шэраг на функцыю $\varphi_n(x)$ (пры гэтым раўнамерная збежнасць шэрагу не парушыцца) і праінтэграваўшы атрыманы шэраг пасклaдова нна адрэзку $[a,b]$, атрымаем:

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = a_1\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_n(x)dx + a_2\int_a^b \varphi_2(x)\varphi_n(x)dx + \ldots + a_n\int_a^b (\varphi_n(x))^2 dx + \ldots =$$

$$= a_n\int_a^b (\varphi_n(x))^2 dx,$$

адкуль

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b (\varphi_n(x))^2 dx}, \quad n = 1,2,\ldots \quad . \tag{4}$$

Калі сістэма функцый (1) ортаўнармаваная, то ў гэтым выпадку

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx, \quad n = 1,2,\ldots \quad . \tag{4'}$$

Няхай цяпер $f(x)$ – любая функцыя, якая непарыўная або мае канечны лік пунктаў разрыву першага роду на адрэзку $[a,b]$.

Азначэнне 3. Шэрагам Фур'е функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a,b]$ па ортаганальнай сістэме функцый (1) называецца шэраг:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \tag{5}$$

каэфіцыенты якога вызначаюцца роўнасцямі (4):

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x).$$

Заўважым, што шэраг Фур'е функцыі $f(x)$ па дадзенай ортаганальнай сістэме функцый і па адпаведнай ёй ортаўнармаванай сістэме функцый адзін і той жа.

Калі шэраг Фур'е функцыі $f(x)$ па сістэме функцый (1) збягаецца да функцыі $f(x)$ у кожным яе пункце непарыўнасці, які належыць адрэзку $[a,b]$, то знак адпаведнасці замяняюць знакам роўнасці, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ на адрэзку $[a,b]$.

У гэтым выпадку гавораць, што функцыя $f(x)$ на адрэзку $[a,b]$ раскладаецца ў шэраг па артаганальнай сістэме функцый (1).

Няхай на адрэзку $[a,b]$ вызначаны дзве непарыўныя функцыі $f(x)$ і $\varphi(x)$.

Падзелім гэты адрэзак на n роўных частак пунктамі x_i $(i=0,1,\dots,n)$, пры гэтым $x_0=a,\ x_n=b.$ Рознасць $f(x_i)-\varphi(x_i)$ з'яўляецца памылкай пры замене функцыі $f(x)$ функцыяй $\varphi(x)$ у пункце x_i.

Азначэнне 4. Лік δ_n, вызначаемы роўнасцю $\delta_n^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-\varphi(x_i)\right)^2$, называецца сярэдняй квадратычнай памылкай (ці сярэднім квадратычным адхіленнем) пры замене функцыі $f(x)$ функцыяй $\varphi(x)$ або, наадварот, у разглядаемых пунктах $x_i, i=1,2,...,n$.

Азначэнне 5. Ліміт сярэдняга квадратычнага адхілення пры неабмежаваным здрабненні адрэзка $[a,b]$ называецца сярэднім квадратычным адхіленнем функцыі $\varphi(x)$ ад функцыі $f(x)$ (або наадварот) на адрэзку $[a,b]$.

Сярэдняе квадратычнае адхіленне будзем абазначаць праз δ, тады згодна з азначэннем

$$\delta^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-\varphi(x_i)\right)^2.$$

Няхай $\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$ $(i=1,2,\dots,n).$ Тады $\dfrac{1}{n}=\dfrac{\Delta x_i}{b-a}$ і δ^2 можна запісаць у наступным выглядзе:

$$\delta^2=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-\varphi(x_i)\right)^2\Delta x_i.$$

Паколькі ліміт сумы, запісанай ў правай частцы, роўны інтэгралу $\int\limits_a^b\left(f(x)-\varphi(x)\right)^2dx$, то

$$\delta^2=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(f(x)-\varphi(x)\right)^2dx.$$

Заўважым , што калі $\left|f(x)-\varphi(x)\right|\le M$ для ўсіх x адрэзка $[a,b]$, то і сярэдняе квадратычнае адхіленне $\delta\le M$.

Няхай

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x),... - \qquad (6)$$

артаганальная сістэма функцый на адрэзку $[a,b]$.

Азначэнне 6. Выраз

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x),$$

дзе c_k $(k=1,2,\ldots,n)$ – лікі, называецца паліномам n-га парадку адносна зададзенай сістэмы функцый.

Няхай функцыя $f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a,b]$ або мае канечны лік пунктаў разрыву 1-га роду.

Разгледзім наступную задачу: сярод усіх паліномаў $P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)$ парадку n знайсці той, які дае найменшае сярэдняе квадратычнае адхіленне ад функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a,b]$ ці, іншымі словамі, знайсці паліном, які дае найменшае сярэдняе квадратычнае набліжэнне функцыі $f(x)$ на адрэзку $[a,b]$.

Не парушаючы агульнасці разважанняў, можна лічыць, што сістэма функцый $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots$ – ортаўнармаваная на разглядаемым адрэзку (апошняе заўсёды можна дасягнуць, калі памножыць функцыі сістэмы на нармоўныя множнікі). Такім чынам, задача заключаецца ў вызначэнні каэфіцыентаў c_k $(k=1,\ldots,n)$ полінома $P_n(x)$, пры якіх інтэграл

$$\int_a^b\left(f(x)-P_n(x)\right)^2dx=\int_a^b\left(f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)\right)^2dx$$

мае найменшае значэнне.

Адзначым, што разглядаемы інтэграл толькі на сталы множнік адрозніваецца ад δ^2.

Пераўтворым гэты інтэграл:

$$\int_a^b\left(f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)\right)^2dx=\int_a^b\left\{\left(f(x)\right)^2-2f(x)\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)+\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)\right)^2\right\}dx=$$

$$=\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx-2\sum_{k=1}^{n}c_k\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx+\sum_{k=1}^{n}c_k{}^2\int_a^b\left(\varphi_k(x)\right)^2dx+2\sum_{i<k}c_ic_k\int_a^b\varphi_i(x)\varphi_k(x)dx$$

(запіс $\sum_{i<k}c_ic_k\int_a^b\varphi_i(x)\varphi_k(x)dx$ сведчыць аб тым, што сумаванне ажыццяўляецца па ўсіх індэксах i, k, якія задавальняюць умове $i<k$).

Калі ўлічваць, што пры любым k інтэграл $\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx=a_k$, a_k – каэфіцыент Фур’е функцыі $f(x)$ па дадзенай ортаўнармаванай сістэме, а таксама што

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx = 0,\ \ i \neq k,\ \ i,k = 1,2,\ldots,n,$$

$$\int_a^b \left(\varphi_k(x)\right)^2 dx = 1,\ \ k = 1,2,\ldots,n,$$

атрымаем:

$$\int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x) \right)^2 dx = \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx - 2\sum_{k=1}^{n} c_k a_k + \sum_{k=1}^{n} c_k{}^2 =$$

$$= \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k - a_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2.$$

Лёгка пераканацца ў тым, што інтэграл

$$\int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x) \right)^2 dx$$

будзе мінімальным, калі $\sum_{k=1}^{n}(c_k - a_k)^2 = 0$, г. зн. пры $c_k = a_k, k = 1,2,...,n.$

Такім чынам, з усіх паліномаў n-га парадку адносна дадзенай ортаганальнай сістэмы функцый на адрэзку $[a,b]$ найменшае сярэдняе квадратычнае адхіленне ад зададзенай функцыі $f(x)$ на гэтым адрэзку мае паліном з каэфіцыентамі Фур'е функцыі $f(x)$ адносна дадзенай ортаганальнай сістэмы функцый, г. зн. n-ая частковая сума шэрагу Фур'е функцыі $f(x)$ па гэтай ортаганальнай сістэме.

Значыць, незалежна ад таго, збягаецца шэраг Фур'е функцыі $f(x)$ па ортаганальнай сістэме на адрэзку $[a,b]$ да гэтай функцыі ці не, яго n-ая частковая сума дае найлепшае сярэдняе квадратычнае набліжэнне функцыі $f(x)$ на гэтым адрэзку ў параўнанні з усімі іншымі паліномамі парадку n адносна дадзенай ортаганальнай сістэмы.

Азначэнне 7. Для ортаганальнай на адрэзку $[-\pi,\pi]$ трыганаметрычнай сістэмы

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, ...$$

трыганаметрычным паліномам n-га парадку называецца функцыя выгляду:

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(c_k \cos kx + d_k \sin kx).$$

З усіх трыганаметрычных паліномаў парадку n найменшае сярэдняе квадратычнае адхіленне на адрэзку $[-\pi,\pi]$ ад зададзенай на гэтым адрэзку функцыі $f(x)$ мае паліном з каэфіцыентамі Фур'е гэтай функцыі, г. зн. паліном

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

З прыведзеных вышэй разважанняў атрымліваем, што

$$\min\int_a^b\left(f(x)-\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)\right)^2 dx=\int_a^b\left(f(x)-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k(x)\right)^2 dx=$$
$$=\int_a^b\left(f(x)\right)^2 dx-\sum_{k=1}^n a_k{}^2,$$

адкуль, калі ўлічыць, што падынтэгральная функцыя неадмоўная, маем:

$$\int_a^b\left(f(x)\right)^2 dx-\sum_{k=1}^n a_k{}^2\geq 0$$

і, значыць,

$$\sum_{k=1}^n a_k{}^2\leq\int_a^b\left(f(x)\right)^2 dx.$$

З гэтай няроўнасці, якая мае месца пры любым n, вынікае збежнасць шэрагу $\sum_{k=1}^{\infty} a_k{}^2$. Калі ў гэтай няроўнасці перайсці да ліміту пры $n\to\infty$, атрымаем няроўнасць Беселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k{}^2\leq\int_a^b\left(f(x)\right)^2 dx.$$

Лёгка пераканацца ў тым, што няроўнасць Беселя ў выпадку артаганальнай (але не ортаўнармаванай) сістэмы прымае выгляд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k{}^2}{\lambda_k{}^2}\leq\int_a^b\left(f(x)\right)^2 dx,$$

дзе λ_k − нармоўны множнік для функцыі $\varphi_k(x)$.

Калі шэраг Фур’е функцыі $f(x)$ па ортаўнармаванай сістэме на адрэзку $[a,b]$ раўнамерна збягаецца да функцыі $f(x)$ на гэтым адрэзку, то

$$\int_a^b\left(f(x)-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k(x)\right)^2 dx\to 0$$

і няроўнасць Беселя пераўтвараецца ў роўнасць:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k{}^2=\int_a^b\left(f(x)\right)^2 dx.$$

У выпадку артаганальнай сістэмы гэтая роўнасць прымае выгляд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k{}^2}{\lambda_k{}^2}=\int_a^b\left(f(x)\right)^2 dx.$$

Заўважым, што са збежнасці шэрагу $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{\ 2}$ непасрэдна вынікае, што $a_k \to 0$, г. зн. каэфіцыенты Фур'е функцыі $f(x)$ па любой ортаўнармаванай сістэме імкнуцца да нуля.

§8. Камплексная форма шэрагу Фур'е

Няхай

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

дзе

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad (n = 0,1,2,...),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad (n = 1,2,\dots).$$

Пры дапамозе формул Эйлера

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2},$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = i\frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2},$$

пераўтворым роўнасць (1):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + ib_n \frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}).$$

Калі ўвесці абазначэнні:

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \ \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n, \ \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n},$$

то атрымаем:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{2}$$

дзе

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)\cos nx - if(x)\sin nx\big)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx},$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx} \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Гэтыя формулы можна аб’яднаць у адну:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots). \tag{3}$$

Формула (2) выражае шэраг Фур’е (1) у камплекснай формуле, а формула (3) – каэфіцыенты гэтага шэрагу.

Камплексная формула шэрагу Фур’е

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

дзе

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 0,1,2,\ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad (n = 1,2,\ldots),$$

знаходзіцца аналагічным чынам:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \quad (\omega = \frac{\pi}{l}),$$

дзе

$$c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{1}{2}\big(a_n - ib_n\big) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-in\omega x}dx \quad (n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Адказы

§3. Шэрагі Фур'е

1. $1+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}$.

2. $2+6\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$.

3. $-1-\frac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$.

4. $-\frac{5}{2}+\frac{18}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$.

5. $1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

7. $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$.

8. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)}$.

9. $\frac{sh\pi}{\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx-n\sin nx}{1+n^2}\right)$.

10. $\frac{3}{8}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\left[\left(-1\right)^{n+1}\frac{2}{\pi}+n\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right]\right\}\cos nx$.

11. $\frac{8a}{\pi^2}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)$.

12. *Указанне.* Скарыстаць расклад у шэраг Фур'е функцыі задачы 7, мяркуючы ў гэтым раскладзе x=0.

13. $\frac{\pi^2}{8}$.

§4. Асаблівасці шэрагаў Фур'е цотнай і няцотнай функцый

1. $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$.

3. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos nx}{9n^2-1}\right).$

4. $\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\cos 2x}{3}+\dfrac{\cos 4x}{15}+\dfrac{\cos 6x}{35}+\cdots+\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}+\cdots\right).$

5. $1-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$

6. $\dfrac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n\sin nx}{a^2-n^2}.$

7. $\dfrac{2sh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n\sin nx}{1+n^2}.$

8. $-\dfrac{1}{2}\sin x+2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\dfrac{k}{k^2-1}\sin kx.$

9. $1-\dfrac{1}{2}\cos x-2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\dfrac{\cos kx}{k^2-1}.$

10. $\dfrac{sha\pi}{\pi a}+\dfrac{2sha\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{a}{a^2+k^2}\cos kx.$

§5. Раскладанне ў трыганаметрычны шэраг зададзенай на адрэзку $[0,\pi]$ функцыі

1. $x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\ (0\le x\le\pi).$

2. $-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$

3. $-1+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$

4. $-\dfrac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}.$

5. $3+\dfrac{\pi^2}{6}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}.$

6. $e^{ax}=\dfrac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\dfrac{2a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k e^{a\pi}-1}{k^2+a^2}\cos kx\quad(0\le x\le\pi).$

7. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

8. $\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}\right).$

9. $\dfrac{2h}{\pi}\left(\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nh}{nh}\cos nx\right).$

10. $\dfrac{4}{\pi}\left\{\dfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{\cos 2kx}{4k^2-1}\right\}.$

11. $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nx}{2n}.$

13. $e^{ax}=\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-1)^n e^{a\pi})\dfrac{n}{n^2+a^2}\sin nx\quad(0<x<\pi).$

14. $\frac{2}{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n(1-\cos a\pi)}{4n^2-a^2}\sin 2nx+\frac{(2n-1)(1+\cos a\pi)}{(2n-1)^2-a^2}\sin(2n-1)x\right]\right\}.$

15. *а*) $4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$; *б*) $\pi-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

16. *а*) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n ch\pi}{1+n^2}n\sin nx$; *б*) $\frac{sh\pi}{\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{1+n^2}\right).$

17. *а*) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{2^\pi}}\right]\frac{n\sin nx}{4n^2+\ln^2 2}$; *б*) $\frac{2\left(\sqrt{2^\pi}-1\right)}{\pi\sqrt{2^\pi}\ln 2}-\frac{4\ln 2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{2^\pi}}-1\right]\frac{\cos nx}{4n^2+\ln^2 2}.$

18. *а*) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{3}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$; *б*) $\frac{2}{9}\pi-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{2}{3}\pi n}{n^2}\cos 2nx.$

§6. Шэрагі Фур'е для функцый любога перыяду

1. $\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin 2n\pi x}{n}.$

2. $1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}}{(2k-1)^2}.$

3. $\frac{1}{8}-\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 4(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}.$

4. $6+\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{3}}{n^2}.$

5. $\frac{1}{6}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2n\pi x}{n^2}.$

6. $-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)}{l}\pi x.$

7. $\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)}{l}\pi x+\frac{(-1)^n}{2n}\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$

8. $\frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}.$

9. $\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k-1)\pi x}{l}}{(2k-1)^2}.$

10. $\frac{2l^2}{3}+\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}}{n^2}.$

11. $\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi^2 n^3}-\frac{(-1)^n}{2n}\right)\sin 2n\pi x.$

12. $\frac{2}{3}-\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}.$

Літаратура

1. Гусак, А.А. Ряды и кратные интегралы.– Мн.: Изд. БГУ, 1970.–384 с.
2. Игнатьева, А.В. Курс высшей математики / А.В. Игнатьева, Т.И. Краснощекова, Смирнов В.Ф.; под ред. П.И. Романовского.– М.: Высшая школа, 1968.– 692 с.
3. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу, В.П. Норин, Д.Т. Письменный, Ю.А. Шевченко; под ред. С.Н. Федина.– М.: Айрис-пресс, 2004.– 592 с.
4. Математический анализ в примерах и задачах. В 2 ч. Ч. 2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач.– Киев: Вища школа, 1977.– 672 с.
5. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин; под ред. Л.Д. Кудрявцева.– М.: Наука, 1986.– 528 с.
6. Романовский, П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа / П.И. Романовский.– М.: Наука, 1973.– 336 с.
7. Толстов, Г.П. Ряды Фурье /Г.П. толстов.– М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.– 396 с.
8. Шмелев, П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях / П.А. Шмелев.– М.: Высшая школа, 1983.– 176 с.

Змест

Вучэбнае выданне

ШЫЛІНЕЦ Уладзімір Адамавіч

ШЭРАГІ ФУР’Е

Дапаможнік

Рэдактар
Тэхнічнае рэдагаванне
Камп′ютэрная вёрстка

Падпісана ў друк . Фармат 60х84 1/16. Папера афсетная.
Гарнітура . Друк афсетны. Ум. друк. арк. . Ул.–выд. арк. .
Тыраж экз. Заказ

Выдавец і паліграфічнае выкананне:
Установа адукацыі «Беларускі дзяржаўны педагагічны універсітэт імя Максіма Танка».
ЛИ № 02330/0494368 от 16.03.09.
ЛП № 02330/0494171 от 03.04.09.
220809, Мінск-50, Савецкая, 18.