УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6я73
Б142

Друкуецца па рашэнні рэдакцыйна–выдавецкага савета
БДПУ імя Максіма Танка

Аўтары: С. А. Багдановіч, С. І. Васілец, У. А. Шылінец

Рэцэнзенты: Г. І. Кабак, кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт
У. У. Шлыкаў, кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт

Б142 **Звычайныя дыферэнцыяльныя раўнанні** // С. А. Багдановіч, С. І. Васілец, У. А. Шылінец. — Мн.: БДПУ імя М. Танка, 2003. 65 с.
ISBN

Мэта дапаможніка — даць цэласнае ўяўленне аб прадмеце і метадах тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, аб метадах інтэгравання асноўных тыпаў дыферэнцыяльных раўнанняў, якія найбольш часта сустракаюцца ў розных дадатках.

Адрасуецца студэнтам фізіка–матэматычных спецыяльнасцяў педагагічных ВНУ.

ББК 22.161.6я73

ISBN

Прадмова

Дадзены вучэбны дапаможнік адрасуецца студэнтам фізіка-матэматычных спецыяльнасцяў педагагічных ВНУ.

Змест дапаможніка ахоплівае ўвесь матэрыял дзеючай праграмы па матэматычнаму аналізу, які тычыцца звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў.

Пры выкладанні аўтары імкнуліся прытрымлівацца прынцыпу арганічнага спалучэння фундаментальнасці і прыкладной накіраванасці і паказаць ролю дыферэнцыяльных раўнанняў для матэматычнага мадэлявання рэальных працэсаў.

Асноўная мэта дапаможніка — даць па магчымасці цэласнае ўяўленне аб прадмеце і метадах тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, аб метадах інтэгравання асноўных тыпаў дыферэнцыяльных раўнанняў, якія найбольш часта сустракаюцца, і аб задачах агульнай тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў.

Дастаткова строгае і поўнае выкладанне тэарэтычнага матэрыялу суправаджаецца вялікай колькасцю ілюстрацыйных прыкладаў.

§1. Першапачатковыя паняцці

У інтэгральнам злічэнні вывучаецца задача знаходжання функцыі па яе вытворнай. Гэтую задачу можна сфармуляваць наступным чынам: знайсці функцыю y, якая задавальняе раўнанню

$$y'=f(x),$$

дзе $f(x)$ — зададзеная функцыя.

Можна сфармуляваць больш агульную задачу: знайсці функцыю y, якая задавальняе раўнанню

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0. \tag{1.1}$$

Гэтае раўнанне называецца ***звычайным дыферэнцыяльным раўнаннем.***

Такім чынам, звычайным дыферэнцыяльным раўнаннем называецца раўнанне, якое звязвае незалежную зменную, невядомую функцыю і яе вытворныя.

Адзначым, што ў звычайным дыферэнцыяльным раўнанні невядомая функцыя з'яўляецца функцыяй адной зменнай. Аднак сустракаюцца такія раўнанні, якія звязваюць невядомую функцыю некалькіх зменных, частковыя вытворныя гэтай функцыі і незалежныя зменныя. Такія раўнанні называюцца ***дыферэнцыяльнымі раўнаннямі ў частковых вытворных.*** У далейшым мы будзем вывучаць толькі звычайныя дыферэнцыяльныя раўнанні, якія будзем называць проста дыферэнцыяльнымі раўнаннямі.

Азначэнне 1. Парадкам дыферэнцыяльнага раўнання называецца найвышэйшы парадак вытворнай невядомай функцыі, якая ўваходзіць у дыферэнцыяльнае раўнанне.

Азначэнне 2. Рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання называецца такая функцыя $y=y(x)$, якая задавальняе дадзенаму раўнанню, г.зн. пры падстаноўцы якой у дадзенае раўнанне атрымліваем тоеснасць.

Адзначым, што рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання можа быць зададзена і ў няяўнай форме.

Раўнанне $\Phi(x, y)=0$, якое няяўна вызначае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання, называецца ***інтэгралам дыферэнцыяльнага раўнання***.

Графік рашэння дыферэнцыяльнага раўнання называецца яго інтэгральнай крывой.

На прасцейшым прыкладзе праілюструем уведзеныя паняцці.

Разгледзім дыферэнцыяльнае раўнанне

$$y''+y=0. \tag{1.2}$$

Гэтае раўнанне з'яўляецца дыферэнцыяльным раўнаннем другога парадку.

Праверым, ці з'яўляецца функцыя $y=\sin x$ рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (1.2). Маем, $y=\sin x$, $y''=-\sin x$. Знойдзеныя выразы падставім у дыферэнцыяльнае раўнанне (1.2). У выніку атрымаем:

$$-\sin x+\sin x\equiv 0.$$

Адзначым, што раўнанне $y–\sin x=0$ з'яўляецца інтэгралам дыферэнцыяльнага раўнання (1.2). Дадзенае раўнанне мае яшчэ адно рашэнне $y=\cos x$, што можна непасрэдна праверыць. Больш таго, дадзенае раўнанне (1.2) мае бясконцае мноства рашэнняў $y=c_1\sin x+c_2\cos x$, дзе c_1, c_2 — адвольныя канстанты.

Тэорыя дыферэнцыяльных раўнанняў займаецца знаходжаннем рашэнняў дыферэнцыяльных раўнанняў і вывучэннем уласцівасцяў гэтых рашэнняў. Працэс знаходжання рашэнняў дыферэнцыяльнага раўнання называецца ***інтэграваннем дыферэнцыяльнага раўнання***.

Да складання дыферэнцыяльных раўнанняў прыводзяць шматлікія задачы матэматыкі і фізікі. Разгледзім дзве такія задачы.

Задача 1. На плоскасці xOy знайсці крывую, якая ў кожным пункце мае датычную, вуглавы каэфіцыент якой роўны падвоенай абсцысе пункта дотыку.

Рашэнне. Няхай $y=y(x)$ — раўнанне шуканай крывой. З дыферэнцыяльнага злічэння вядома, што вуглавы каэфіцыент датычнай да гэтай крывой у пункце $M(x, y(x))$ роўны $y'(x)$.

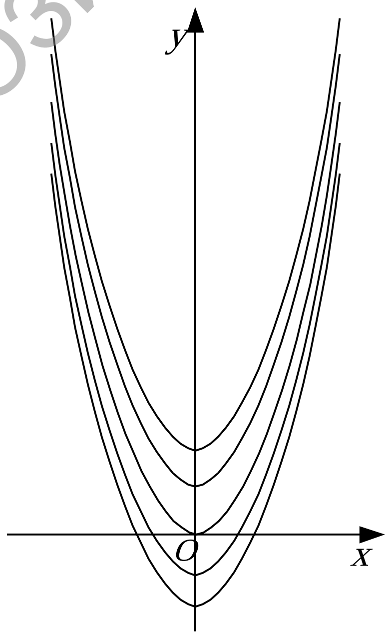
З другога боку, згодна з умовай задачы, ён роўны $2x$. Атрымліваем дыферэнцыяльнае раўнанне

$$y'=2x. \tag{1.3}$$

З інтэгральнага злічэння вядома, што гэтае раўнанне мае цэлую сукупнасць рашэнняў

$$y=x^2+c, \tag{1.4}$$

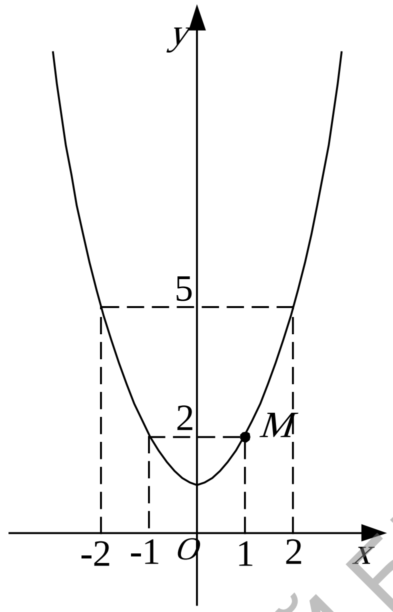
дзе c — адвольная канстанта. Прычым усе рашэнні вычэрпваюцца гэтай сукупнасцю. Графікамі гэтых рашэнняў, г. зн. інтэгральнымі крывымі будуць парабалы (рыс. 1).



Рыс. 1

Задача 1 рэшана.

Вылучым цяпер са знойдзенай сукупнасці парабал тую, якая праходзіць праз пункт $M(1, 2)$. Для гэтага неабходна знайсці адпаведнае значэнне канстанты c. З (1.4), калі $x=1$, $y=2$, атрымліваем $c=1$. Такім чынам, $y=x^2+1$ — раўнанне шуканай парабалы (рыс. 2).



Рыс. 2

Задача 2. Няхай у пачатковы момант часу маса радыеактыўнага рэчыва роўная

$$m(0)=m_0. \qquad (1.5)$$

Патрабуецца знайсці закон радыеактыўнага распаду $m=m(t)$.

Рашэнне. Складзем дыферэнцыяльнае раўнанне распаду. Вядома, што хуткасць распаду $\frac{dm}{dt}$ прапарцыйная наяўнай колькасці радыеактыўнага рэчыва:

$$\frac{dm}{dt} = km. \qquad (1.6)$$

Тут $k<0$ — параметр, які характарызуе "сорт" радыеактыўнага рэчыва. Раўнанне (1.6) і ёсць шуканае дыферэнцыяльнае раўнанне радыеактыўнага распаду.

Праінтэгруем дыферэнцыяльнае раўнанне (1.6). Маем

$$\frac{dm}{dt} = km \Rightarrow \frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = k \Rightarrow (\ln m)' = (km)' \Rightarrow \ln m = kt + \ln c \Rightarrow m = ce^{kt}\,(m(0) = m_0) \Rightarrow m = m_0 e^{kt}.$$

Такім чынам, мы атрымалі экспаненцыяльны закон распаду:

$$m=m_0e^{kt}. \qquad (1.7)$$

Задача аб распадзе радыеактыўнага рэчыва цалкам рэшана.

З аналітычнай структуры формулы (1.7) бачым, што шуканая функцыя $m=m(t)$ непарыўна залежыць як ад часу t, так і ад параметру k і пачатковага значэння m_0 і што яна валодае ўласцівасцю

$$m(t)\to 0 \text{ пры } t\to +\infty.$$

Прамежак часу T, праз які маса радыеактыўнага рэчыва памяншаецца ў два разы, называецца перыядам паўраспаду гэтага рэчыва. Ведаючы T, формулу (1.7) можна пераўтварыць. Маем

$$m(T)=\frac{1}{2}m_0 \Rightarrow m_0e^{kT}=\frac{1}{2}m_0 \Rightarrow e^{kT}=2^{-1} \Rightarrow e^k=2^{-\frac{1}{T}} \Rightarrow e^{kt}=2^{-\frac{t}{T}}.$$

Таму формула (1.7) прыме выгляд

$$m=m_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

§2. Дыферэнцыяльныя раўнанні першага парадку

Дыферэнцыяльнае раўнанне першага парадку мае выгляд $F(x, y, y')=0$. Будзем меркаваць, што яго можна рашыць адносна y', г. зн. запісаць у выглядзе

$$y'=f(x, y). \qquad (2.1)$$

Прыватным выпадкам такога раўнання з'яўляецца раўнанне

$$y'=f(x).$$

Падчас для дыферэнцыяльнага раўнання (2.1) магчыма знайсці сукупнасць усіх рашэнняў (можа толькі за выключэннем некаторых), г. зн. магчыма знайсці такую функцыю $y=\varphi(x, c)$, якая валодае наступнымі ўласцівасцямі:

1) пры кожнам значэнні канстанты c (з некаторага мноства) яна будзе рашэннем раўнання (2.1);

2) пры належным падборы канстанты c яна абарачаецца ў любое рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (2.1), можа толькі за выключэннем некаторых.

Такая функцыя $y=\varphi(x, c)$ называецца ***агульным рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання*** (2.1).

Тыя рашэнні, якія атрымліваюцца з агульнага пры канкрэтных значэннях c, называюцца ***частковымі рашэннямі дадзенага дыферэнцыяльнага раўнання.***

Напрыклад, $y=x^2+c$ (c — адвольная канстанта) — агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (1.3); $y=x^2+1$, $y=x^2+3$ — частковыя рашэнні гэтага раўнання.

Падчас магчыма знайсці такое раўнанне

$$\Phi(x, y, c)=0, \qquad (2.2)$$

якое няяўна вызначае ўсе рашэнні дыферэнцыяльнага раўнання (2.1) (можа толькі за выключэнне некаторых), г. зн. валодае наступнымі ўласцівасцямі:

1) кожнае рашэнне $y=y(x)$ дыферэнцыяльнага раўнання (2.1) задавальняе раўнанню (2.2) пры некаторым значэнні c;

2) кожная функцыя $y=y(x)$, якая задавальняе раўнанню (2.2) пры якім-небудзь c, з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (2.1).

Такое раўнанне (2.2) называецца ***агульным інтэгралам дыферэнцыяльнага раўнання*** (2.1).

Так, напрыклад, $x^2-y+c=0$ — агульны інтэграл дыферэнцыяльнага раўнання (1.3).

У шматлікіх задачах, якія прыводзяць да дыферэнцыяльных раўнанняў першага парадку, патрабуецца знайсці рашэнне, якое прымае зададзенае значэнне пры зададзеным значэннні незалежнай зменнай. Такая задача называецца задачай Кашы.

Задача Кашы для дыферэнцыяльнага раўнання (2.1) фармулюецца наступным чынам: знайсці рашэнне раўнання (2.1), якое задавальняе пачатковай умове (умове Кашы)

$$y=y_0 \text{ пры } x=x_0, \tag{2.3}$$

якую можна запісаць і гэтак:

$$y(x_0)=y_0, \text{ ці } y(x)|_{x=x_0}=y_0.$$

З геаметрычнага пункта гледжання размова ідзе аб знаходжанні інтэгральнай крывой, якая праходзіць праз зададзены пункт $M_0(x_0, y_0)$.

Лікі x_0, y_0 называюцца пачатковымі дадзенымі.

Некалькі пазней будуць высветлены тыя ўмовы, пры якіх задача Кашы мае рашэнне і прытым адзінае (г. зн. будзе даказана тэарэма пра існаванне і адзінасць рашэння дыферэнцыяльнага раўнання). Пасля гэтага мы зможам удакладніць паняцце агульнага рашэння дыферэнцыяльнага раўнання першага парадку.

Агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання можа быць скарыстана для знаходжання частковага рашэння, якое задавальняе пачатковай умове (2.3). Робіцца гэта як і пры рашэнні першай задачы §1.

Дадзім дыферэнцыяльнаму раўнанню першага парадку геаметрычнае тлумачэнне.

Няхай дадзена дыферэнцыяльнае раўнанне першага парадку $y'=f(x, y)$, а $y=y(x)$ — яго рашэнне. Графік гэтага рашэння (інтэгральная крывая раўнання (2.1)) ёсць непарыўная крывая, праз кожны пункт якой можна правесці датычную. Вуглавы каэфіцыент датычнай да інтэгральнай крывой у яе пункце (x, y) роўны y', г. зн. роўны $f(x, y)$. Такім чынам, раўнанне $y'=f(x, y)$ дае сувязь паміж каардынатамі пункта (x, y) і вуглавым каэфіцыентам y' датычнай да інтэгральнай крывой у гэтым пункце.

Кожнаму пункту (x, y) інтэгральнай крывой паставім у адпаведнасць накіраваны адрэзак, вуглавы каэфіцыент якога роўны $f(x, y)$. Атрымаем так званае поле напрамкаў дадзеннага дыферэнцыяльнага раўнання, якое раскрывае геаметрычны сэнс дыферэнцыяльнага раўнання першага парадку.

Такім чынам, з геаметрычнага пункта гледжання раўнанне $y'=f(x, y)$ вызначае на плоскасці xOy поле напрамкаў, а рашэнне гэтага раўнання — інтэгральная крывая, напрамак датычнай да якой у кожным пункце супадае з напрамкам поля ў гэтым пункце.

Пабудаваўшы на плоскасці поле напрамкаў дадзенага дыферэнцыяльнага раўнання, можна набліжана пабудаваць інтэгральныя крывыя.

Заўвага. У разнастайных задачах, у прыватнасці ў геаметрычных задачах, зменныя x, y з’яўляюцца раўнапраўнымі. Таму ў такіх задачах, калі толькі яны зводзяцца да разгляду дыферэнцыяльнага раўнання

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{2.4}$$

натуральна разглядаць таксама і перавернутае раўнанне

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{2.5}$$

Калі дыферэнцыяльныя раўнанні (2.4) і (2.5) маюць сэнс, то яны эквівалентныя. Калі функцыя $y=y(x)$ з’яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (2.4), то адваротная функцыя $x=x(y)$ з’яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (2.5) і наадварот.

Таму дыферэнцыяльныя раўнанні (2.4) і (2.5) вызначаюць аднолькавыя інтэгральныя крывыя.

Калі ў некаторых пунктах дыферэнцыяльнае раўнанне (2.4) губляе сэнс, то тады замест яго разглядаюць перавернутае раўнанне (2.5) і наадварот.

§3. Дыферэнцыяльныя раўнанні са зменнымі, якія можна раздзяліць

Заўвага 1. У тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў пад сімвалам $\int f(x)dx$ разумеюць не ўсю сукупнасць першаісных для функцыі $f(x)$, а адну якую-небудзь першаісную.

Заўвага 2. Дамовімся гаварыць, што дыферэнцыяльнае раўнанне праінтэгравана ў квадратурах, калі яго агульнае рашэнне або агульны інтэграл знойдзены ў выглядзе, які можа змяшчаць яшчэ неўзятыя інтэгралы ад вядомых функцый.

Прыклад 1. Разгледзім дыферэнцыяльнае раўнанне

$$y' = \frac{\sin x}{x}.$$

Агульнае рашэнне гэтага раўнання мае наступны выгляд:

$$y = \int \frac{\sin x}{x} dx + c.$$

Дадзенае раўнанне праінтэгравана ў квадратурах.

Няхай дадзена дыферэнцыяльнае раўнанне першага парадку $F(x, y, y')=0$. Звычайна яго спрабуюць запісаць у выглядзе

$$y'=f(x, y), \tag{3.1}$$

або ў выглядзе

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0. \tag{3.2}$$

Адзначым, што ад выгляду (3.1) лёгка перайсці да выгляду (3.2) і наадварот.

У дадзенам параграфе мы разгледзім два прыватных выпадкі дыферэнцыяльнага раўнання выгляду (3.2).

Азначэнне 1. Дыферэнцыяльным раўнаннем з раздзеленымі зменнымі называецца раўнанне выгляду

$$P(x)dx+Q(y)dy=0, \qquad (3.3)$$

дзе $P(x)$, $Q(y)$ — непарыўныя пры разглядаемых значэннях x і y функцыі.

Дакажам, што раўнанне (3.3) можна праінтэграваць у квадратурах. Замест раўнання (3.3) будзем разглядаць раўназначнае яму раўнанне

$$P(x)dx=-Q(y)dy. \qquad (3.3')$$

Няхай функцыя $y=y(x)$ — якое-небудзь рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (3.3′). Яно задавальняе гэтаму раўнанню, г.зн. пры падстаноўцы абарачае яго ў тоеснасць:

$$P(x)dx=-Q(y(x))y'(x)dx.$$

Левая частка з'яўляецца дыферэнцыялам функцыі $\int P(x)dx$, а правая частка — дыферэнцыял функцыі $-\int Q(y(x))y'(x)dx$. Паколькі дыферэнцыялы дзвюх функцый роўныя, то самі функцыі адрозніваюцца на канстанту, г.зн.

$$\int P(x)dx = -\int Q(y(x))y'(x)dx + C .$$

У другім інтэграле зробім падстаноўку $y=y(x)$. Атрымаем

$$\int P(x)dx = -\int Q(y)dy + C .$$

Мы атрымалі раўнанне, якому задавальняе кожнае рашэнне раўнання (3.3′).

Такім чынам, мы даказалі наступнае:

1) кожнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (3.3′) задавальняе раўнанню

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C, \qquad (3.4)$$

дзе C — адвольная канстанта.

Праўдзівым з'яўляецца і наступнае:

2) калі функцыя $y=y(x)$ задавальняе раўнанню (3.4), то яна задавальняе таксама і дыферэнцыяльнаму раўнанню (3.3′).

Сапраўды, калі функцыя $y=y(x)$ абарачае раўнанне (3.4) у тоеснасць, то прадыферэнцаваўшы гэтаю тоеснасць, мы атрымаем, што яна абарачае ў тоеснасць і дыферэнцыяльнае раўнанне (3.3′), г.зн. з'яўляецца рашэннем гэтага раўнання.

Даказаўшы 1) і 2), мы гэтым даказалі, што раўнанне (3.4) з'яўляецца агульным інтэгралам дыферэнцыяльнага раўнання (3.3).

Высновы. Агульны інтэграл дыферэнцыяльнага раўнання (3.3) мае выгляд

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C \quad , \qquad (3.4)$$

дзе C — адвольная канстанта.

Прыклад 2. Знайсці інтэгральную крывую раўнання

$$(2x-2)dx+2ydy=0,$$

якая праходзіць праз пачатак каардынат.

Рашэнне. Зменныя раздзелены, бо каэфіцыент пры dx з'яўляецца функцыяй толькі x, а каэфіцыент пры dy з'яўляецца функцыяй толькі y. Скарыстаем формулу (3.4). Атрымаем

$$\int(2x-2)dx+\int 2ydy=c$$

або

$$x^2-2x+y^2=c. \tag{3.5}$$

Мяркуючы $x=y=0$, знаходзім $c=0$. Падставіўшы гэта значэнне c у (3.5), будзем мець

$$x^2-2x+y^2=0.$$

Гэтая акружнасць і ёсць шуканая інтэгральная крывая.

Азначэнне 2. Дыферэнцыяльным раўнаннем са зменнымі, якія можна раздзяліць, называецца раўнанне

$$P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0, \tag{3.6}$$

дзе $P_1(x)$, $Q_1(y)$, $P_2(x)$, $Q_2(y)$ — функцыі, непарыўныя пры разглядаемых значэннях x і y.

Дыферэнцыяльнае раўнанне (3.6) можа быць зведзена да дыферэнцыяльнага раўнання з раздзеленымі зменнымі. Сапраўды, падзелім абедзве часткі раўнання на $P_2(x)Q_1(y)$ і атрымаем

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0. \tag{3.7}$$

Дыферэнцыяльнае раўнанне (3.7) — гэта дыферэнцыяльнае раўнанне з раздзеленымі зменнымі. Яго агульны інтэграл мы знаходзіць умеем.

Адзначым, што пры дзяленні на здабытак $P_2(x)Q_1(y)$ мы можам згубіць некаторыя рашэнні. Менавіта такія, якія абарачаюць у нуль гэты здабытак. Важна ўмець знаходзіць гэтыя рашэнні. Зрабіць гэта можна наступным чынам.

Параўноўваем да нуля адзначаны вышэй здабытак і атрымліваем два раўнанні

$$P_2(x)=0,\ Q_1(y)=0.$$

Няхай $x=a$, $y=b$ з'яўляюцца рашэннямі гэтых раўнанняў. Лёгка пераканацца ў тым, што яны з'яўляюцца таксама і рашэннямі зыходнага раўнання (3.6).

Такім чынам, калі мы да ўсіх рашэнняў раўнання (3.7) далучым $x=a$, $y=b$, то атрымаем ўсе рашэнні зыходнага раўнання (3.6).

Прыклад 3. Рашыць раўнанне

$$x(1+y^2)+y(1+x^2)\frac{dy}{dx}=0.$$

Рашэнне. Запішам дадзенае раўнанне ў выглядзе

$$x(1+y^2)dx+y(1+x^2)dy=0.$$

Падзяліўшы абедзве часткі гэтага раўнання на здабытак $(1+x^2)(1+y^2)$, атрымаем раўнанне з радзеленымі зменнымі

$$\frac{x}{1+x^2}dx+\frac{y}{1+y^2}dy=0.$$

Праінтэграваўшы гэта раўнанне, паслядоўна знаходзім

$$\int\frac{xdx}{1+x^2}+\int\frac{ydy}{1+y^2}=c_1,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=\frac{1}{2}\ln c \qquad \left(\frac{1}{2}\ln c=c_1\right).$$

Адсюль

$$(1+x^2)(1+y^2)=c.$$

Прыклад 4. Рашыць дыферэнцыяльнае раўнанне

$$\frac{dy}{dx}=xy^2+2xy.$$

Рашэнне. Перапішам дадзенае раўнанне ў выглядзе

$$dy–xy(y+2)dx=0.$$

Функцыі $y=0$ і $y=-2$ з'яўляюцца рашэннямі раўнання. Астатнія рашэнні знойдзем, раздзяліўшы зменныя ў раўнанні і праінтэграваўшы яго:

$$\frac{dy}{y(y+2)}-xdx=0,$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+2}\right)dy-\int xdx=\frac{1}{2}\ln c_1,$$

$$\ln|y|-\ln|y+2|-x^2=\ln c_1,$$

$$\frac{|y|}{|y+2|}=c_1e^{x^2},\ c_1>0.$$

Паколькі раней знойдзенае рашэнне $y=0$ можна атрымаць з апошніх суадносін, мяркуючы $c_1=0$, то

$$\frac{y}{y+2}=ce^{x^2}\ (c\in\mathbf{R}),\text{ ці }y=\frac{2ce^{x^2}}{1-ce^{x^2}}.$$

Прыклад 5. Ньютан устанавіў, што хуткасць змянення тэмпературы цела, якое ахаладжаецца, прапарцыйна рознасці тэмператур цела і навакольнага асяроддзя (тэмпература асяроддзя лічыцца сталай).

Абазначым праз T тэмпературу цела ў момант часу t, а праз $T_{\text{ас.}}$ — тэмпературу навакольнага асяроддзя ($T_{\text{ас.}}<T$). Хуткасць змянення тэмпературы цела даецца вытворнай ад тэмпературы па часу. Значыць, маем:

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_{\text{ас.}}),$$

дзе k — каэфіцыент прапарцыйнасці, $k>0$.

Гэтае дыферэнцыяльнае раўнанне са зменнымі, якія можна раздзяліць. Праінтэграваўшы, атрымаем:

$$T=T_{\text{ас.}}+Ce^{-kt}.$$

Для вызначэння канстанты C неабходна задаць пачатковыя ўмовы працэсу. Няхай, напрыклад, у момант часу t_0 тэмпература цела была роўнай T_0. Тады

$$T_0 = T_{\text{ас.}} + Ce^{-kt_0}, \quad C = (T_0 - T_{\text{ас.}})e^{-kt_0},$$

г.зн. закон змянення тэмпературы цела, якое ахаладжаецца, мае выгляд:

$$T = T_{\text{ас.}} + (T_0 - T_{\text{ас.}})e^{-k(t-t_0)}.$$

Каэфіцыент k ці задаецца непасрэдна, ці вызначаецца пры дапамозе дадатковай умовы:

$$T|_{t=t_1} = T_1.$$

Прыклад 6. Метэарыт, які знаходзіцца пад уздзеяннем зямнога прыцяжэння, з становішча спакою пачынае прамалінейна падаць на Зямлю з вышыні h. Знойдзем хуткасць метэарыта пры дасягненні ім паверхні Зямлі, калі б адсутнічала зямная атмасфера.

Рашэнне. Няхай $x=x(t)$ — адлегласць, пройдзеная метэарытам з пачатку падзення, $h–x$ — адлегласць ад метэарыта ў момант часу t да цэнтра Зямлі. У момант t на метэарыт дзейнічае сіла $F=ma$, дзе m — маса метэарыта, а a — яго паскарэнне. На паверхні Зямлі на цела дзейнічае сіла цяжару $P=mg$, дзе g — паскарэнне свабоднага падзення на паверхні Зямлі.

Згодна з законам Ньютана гэтыя сілы адваротна прапарцыйныя квадратам адлегласцяў цела ад цэнтра Зямлі:

$$\frac{F}{P} = \frac{R^2}{(h-x)^2}, \quad \frac{ma}{mg} = \frac{R^2}{(h-x)^2}.$$

Тут R=6377 км — радыус Зямлі. Адсюль $a = \dfrac{R^2 g}{(h-x)^2}$, але $a = \dfrac{dv}{dt}$, таму $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{R^2 g}{(h-x)^2}$. Улічваючы роўнасць $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dv}{dx} \cdot v$, атрымаем дыферэнцыяльнае раўнанне руху:

$$\frac{dv}{dx} \cdot v = \frac{R^2 g}{(h-x)^2}.$$

Праінтэграваўшы апошняе раўнанне, знаходзім

$$v^2 = \frac{2gR^2}{h-x} + C.$$

Рух пачаўся з становішча спакою, г.зн. x=0 і v=0 пры t=0: $0 = \dfrac{2gR^2}{h-0} + C$, $C = -\dfrac{2gR^2}{h}$. Таму змяненне хуткасці v метэарыта ў залежнасці ад пройдзенай адлегласці x выражаецца формулай

$$v^2 = \frac{2gR^2 x}{h(h-x)}.$$

На паверхні Зямлі (пры $x=h-R$) хуткасць метэарыта $v=\sqrt{2gR(1-\frac{R}{h})}$.

Паколькі вышыня h паводле ўмовы з’яўляецца неабмежавана вялікай, то, калі перайсці да ліміту пры $h\to+\infty$, атрымліваем $v=\sqrt{2gR}$.

Пры дасягненні паверхні Зямлі метэарыт будзе мець хуткасць

$$v=\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 6377000}\approx 11{,}2\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Заўвага 3. Разгледзім дыферэнцыяльнае раўнанне выгляду

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c) \tag{3.8}$$

Калі $b=0$, то $y=\int f(ax+c)dy+C$ — сукупнасць усіх рашэнняў гэтага раўнання.

Разгледзім выпадак, калі $b\neq 0$. Тады дыферэнцыяльнае раўнанне (3.8) можна звесці да дыферэнцыяльнага раўнання са зменнымі, якія можна раздзяліць, пры дапамозе падстаноўкі

$$u=ax+by+c. \tag{3.9}$$

Сапраўды, калі перайсці да новых зменных x і u, будзем мець

$$\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx},\quad \frac{du}{dx}=a+bf(u),$$

ці

$$\frac{du}{a+bf(u)}=dx. \tag{3.10}$$

Мы атрымалі дыферэнцыяльнае раўнанне з раздзеленымі зменнымі. Агульны інтэграл такога раўнання мы знаходзіць умеем. Калі знайсці агульны інтэграл раўнання (3.10) і замяніць u на $ax+by+c$, атрымаем агульны інтэграл дыферэнцыяльнага раўнання (3.8).

Прыклад 7. Праінтэграваць дыферэнцыяльнае раўнанне

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1.$$

Рашэнне. Мяркуем $x-y=u$. Атрымаем

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{du}{dx},\quad 1-\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+1,\quad \frac{du}{dx}=-\frac{1}{u},$$

$$udu=-dx,\ u^2=-2x+c,\ (x-y)^2=-2x+c.$$

§4. Аднародныя дыферэнцыяльныя раўнанні першага парадку

Азначэнне 1. Функцыя $f(x, y)$ называецца аднароднай n-га вымярэння адносна сваіх аргументаў x і y, калі для любога значэння t, акрамя, можа быць, $t=0$, мае месца тоеснасць

$$f(tx, ty)=t^n f(x, y).$$

Напрыклад, $f(x, y)=2x^3+5x^2y$ — аднародная функцыя трэцяга вымярэння адносна x і y, бо

$$f(tx, ty)=2(tx)^3+5(tx)^2ty=t^3(2x^3+5x^2y)=t^3f(x, y).$$

Разгледзім дзве ўласцівасці аднародных функцый.

1^0. Калі $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ з'яўляюцца аднароднымі функцыямі аднаго і таго ж вымярэння, то іх дзель з'ўляецца аднароднай функцыяй нулявога вымярэння.

Сапраўды, маем

$$\frac{P(tx,ty)}{Q(tx,ty)}=\frac{t^nP(x,y)}{t^nQ(x,y)}=t^0\,\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

1^0. Калі $f(x, y)$ з'яўляецца аднароднай функцыяй нулявога вымярэння, то яна можа быць запісана ў наступным выглядзе:

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Сапраўды, скарыстаем азначэнне аднароднай функцыі нулявога вымярэння, узяўшы $t=\dfrac{1}{x}$.

$$f\left(\frac{1}{x}x,\frac{1}{x}y\right)=f(x,y),\ \text{г.зн.}\quad f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

Мяркуючы $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)=f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$, атрымаем, што

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Азначэнне 2. Аднародным дыферэнцыяльным раўнаннем першага парадку называецца раўнанне выгляду

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0, \tag{4.1}$$

дзе $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — аднародныя функцыі аднаго і таго ж вымярэння.

На падставе ўласцівасцяў 1^0 і 2^0 раўнанне (4.1) можна звесці да выгляду

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{4.1'}$$

Пакажам, што інтэграванне аднароднага дыферэнцыяльнага раўнання першага парадку (4.1') пры дапамозе спецыяльнай падстаноўкі зводзіцца да інтэгравання раўнання са зменнымі, якія можна раздзяліць.

Мяркуем $u = \dfrac{y}{x}$,

г.зн.

$$y=ux. \tag{4.2}$$

Адсюль

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u. \tag{4.3}$$

Калі падставім (4.2) і (4.3) у раўнанне (4.1'), то атрымаем

$$x\frac{du}{dx} + u = \varphi(u),$$

г.зн.

$$x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

Мы атрымалі дыферэнцыяльнае раўнанне са зменнымі, якія можна раздзяліць. Раздзяліўшы зменныя і праінтэграваўшы, будзем мець:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|u| + c. \tag{4.4}$$

Мяркуем $\Phi(u) = \int \dfrac{du}{\varphi(u) - u}$. Тады, калі ўлічыць, што $u = \dfrac{y}{x}$, атрымаем

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + c.$$

Гэта і ёсць агульны інтэграл дыферэнцыяльнага раўнання (4.1').

Заўвага 1. Пры раздзяленні зменных мы можам згубіць некаторыя рашэнні. Важна іх знайсці. Як гэта рабіць, паказана ў §3.

Заўвага 2. Пры інтэграванні дыферэнцыяльнага раўнання (4.1) неабавязкова запісваць яго ў выглядзе (4.1'). Дастаткова пераканацца, што гэта раўнанне аднароднае, а затым скарыстаць падстаноўку (4.2).

Прыклад 1. Праінтэграваць дыферэнцыяльнае раўнанне

$$xdy - \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx = 0. \tag{4.5}$$

Рашэнне. Каэфіцыенты пры dy і dx адпаведна роўныя:

$$P(x, y) = -\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad Q(x, y) = x.$$

Функцыі $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ з'яўляюцца аднароднымі функцыямі першага вымярэння. Сапраўды,

$$P(tx, ty) = -(ty + \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2}) = -t(y + \sqrt{x^2 + y^2}) = t\,P(x, y),$$

$$Q(tx, ty) = tx = t\,Q(x, y).$$

Такім чынам, раўнанне (4.5) з'яўляецца аднародным дыферэнцыяльным раўнаннем першага парадку.

Няхай $y=ux$, тады $dy=udx+xdu$. Падставім гэтыя выразы ў зыходнае раўнанне:

$$x(udx+xdu)-\left(ux+\sqrt{x^2+u^2x^2}\right)dx=0.$$

Пасля пераўтварэнняў атрымаем раўнанне

,

якое з’яўляецца дыферэнцыяльным раўнаннем са зменнымі, якія можна раздзяліць.

Раздзяліўшы зменныя і праінтэграваўшы, знаходзім

$$\ln|x|=\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|+\ln|c|,$$

адкуль

$$x=c\left(u+\sqrt{u^2+1}\right).$$

Калі падставіць сюды выраз $u=\dfrac{y}{x}$, будзем мець

$$x=c\left(\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\right)$$

ці

$$\frac{x^2}{c}-y=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Падвысіўшы ў квадрат абедзве часткі роўнасці і скараціўшы на x^2, атрымаем агульны інтэграл

$$x^2-2cy=c^2,$$

які геаметрычна ўяўляе сабою сукупнасць парабал з вяршынямі на восі Oy.

Заўвага 3. Разгледзім дыферэнцыяльнае раўнанне выгляду

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right). \tag{4.6}$$

Дакажам, што раўнанне (4.6) можна пераўтварыць у аднароднае шляхам пераносу пачатку каардынат у пункт перасячэння (x_1, y_1) прамых

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \ \text{ і } \ a_2x+b_2y+c_2=0. \tag{4.7}$$

Скарыстаем формулы пераўтварэння каардынат пры паралельным параносе, г.зн. формулы

$$x=X+x_1,\ \ y=Y+y_1, \tag{4.8}$$

і пяройдзем ад зменных x, y да зменных X, Y.

Будзем мець:

$$dx=dX,\ \ dy=dY. \tag{4.9}$$

Калі падставіць (4.8), (4.9) у раўнанне (4.6), то гэта дыферэнцыяльнае раўнанне пераўтвараецца да выгляду

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)$$

ці

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right)=\varphi\left(\frac{Y}{X}\right)$$

і з’яўляецца ўжо аднародным раўнаннем.

Адзначым, што гэты метад нельга скарыстаць толькі ў выпадку паралельнасці прамых $a_1x+b_1y+c_1=0$ і $a_2x+b_2y+c_2=0$, г.зн. калі каэфіцыенты пры бягучых каардынатах прапарцыйныя:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k.$$

У гэтым выпадку дыферэнцыяльнае раўнанне (4.6) можа быць запісана ў выглядзе

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=F(a_1x+b_1y).$$

Атрымалі дыферэнцыяльнае раўнанне, якое пры дапамозе падстаноўкі $u=a_1x+b_1y$ зводзіцца да раўнання са зменнымі, якія можна раздзяліць (гл. §3).

Прыклад 2. Рашыць раўнанне

$$(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0. \tag{4.10}$$

Рашэнне. Разгледзім сістэму лінейных алгебраічных раўнанняў

$$\begin{cases} x+y-2=0, \\ x-y+4=0. \end{cases}$$

Дэтэрмінант гэтай сістэмы

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Сістэма мае адзінае рашэнне $x_1=-1$, $y_1=3$. Зробім замену $x=X-1$, $y=Y+3$. Тады раўнанне (4.10) прыме выгляд

$$(X+Y)dX+(X-Y)dY=0. \tag{4.11}$$

Раўнанне (4.11) з’яўляецца аднародным раўнаннем. Мяркуем $Y=uX$ і атрымаем

$$(X+Xu)dX+(X-Xu)(Xdu+udX)=0,$$

адкуль

$$(1+2u-u^2)dX+X(1-u)du=0.$$

Раздзелім зменныя і будзем мець

$$\frac{dX}{X}+\frac{1-u}{1+2u-u^2}du=0.$$

Праінтэграваўшы, знойдзем

$$\ln|X|+\frac{1}{2}\ln\left|1+2u-u^2\right|=\frac{1}{2}\ln|c_1|,\quad X^2(1+2u-u^2)=c_1.$$

Вяртаемся да зменных x, y:

$$(x+1)^2\left(1+2\cdot\frac{y-3}{x+1}-\frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right)=c_1$$

ці

$$x^2+2xy-y^2-4x+8y=c \quad (c=c_1+14).$$

§5. Лінейныя дыферэнцыяльныя раўнанні першага парадку

Азначэнне 1. Лінейным дыферэнцыяльным раўнаннем першага парадку называецца дыферэнцыяльнае раўнанне выгляду

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x), \tag{5.1}$$

дзе $p(x)$, $f(x)$ — непарыўныя на інтэрвале (a, b) функцыі.

Калі $f(x)\equiv 0$, то раўнанне (5.1) называецца лінейным аднародным, калі $f(x)\not\equiv 0$, то дадзенае дыферэнцыяльнае раўнанне называецца неаднародным.

Спачатку возьмем лінейнае аднароднае дыферэнцыяльнае раўнанне

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0, \tag{5.2}$$

якое адпавядае дадзенаму неаднароднаму.

Гэта раўнанне са зменнымі, якія можна раздзяліць. Калі раздзяліць зменныя, то знаходзім:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx, \quad \ln|y|=-\int p(x)dx+\ln|c|, \quad y=Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{5.3}$$

дзе C — адвольная канстанта, адрозная ад нуля.

Пры раздзяленні зменных мы згубілі рашэнне $y=0$, аднак яно можа быць уключана ў знойдзеную сукупнасць рашэнняў (5.3), калі лічыць, што C можа прымаць і значэнне 0.

Такім чынам, судачыненне

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{5.4}$$

дзе C — адвольная канстанта, ёсць агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (5.2).

Для інтэгравання лінейнага неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (5.1) скарыстаем метад варыяцыі адвольнай канстанты (метад Лагранжа). Пры выкарыстанні гэтага метаду спачатку інтэгруецца адпаведнае лінейнае аднароднае раўнанне (5.2), агульнае рашэнне якога, як паказана вышэй, мае выгляд (5.4). Цяпер рашэнне лінейнага неаднароднага раўнання (5.1) будзем шукаць у аналагічным выглядзе, г.зн. у выглядзе

$$y=c(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{5.5}$$

дзе $c(x)$ — невядомая функцыя.

Падставіўшы выраз (5.5) у раўнанне (5.1), атрымліваем:

$$\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

$$\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx} = f(x).$$

Такім чынам, для знаходжання функцыі $c(x)$ прыйшлі да дыферэнцыяльнага раўнання са зменнымі, якія можна раздзяліць.

Праінтэграваўшы яго, знаходзім:

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C, \tag{5.6}$$

дзе C — адвольная канстанта.

Калі падставіць выраз (5.6) у (5.5), то будзем мець:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx, \tag{5.7}$$

дзе C — адвольная канстанта.

Гэта і ёсць агульнае рашэнне лінейнага неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (5.1).

Прааналізуем правую частку формулы (5.7). Першы складнік правай часткі з’яўляецца агульным рашэннем лінейнага аднароднага раўнання (5.2). Другі складнік з’яўляецца частковым рашэннем лінейнага неаднароднага раўнання (5.1) (яно атрымліваецца з агульнага рашэння (5.7) пры C=0).

Такім чынам, агульнае рашэнне лінейнага неаднароднага раўнання роўнае суме агульнага рашэння адпаведнага лінейнага аднароднага раўнання і частковага рашэння дадзенага неаднароднага раўнання.

Заўвага 1. Формулу (5.7) запамінаць не трэба. Неабходна запомніць метад яе атрымання.

Прыклад 1. Рашыць дыферэнцыянае раўнанне

$$y' - 2xy = (x+1)e^{x^2}. \tag{5.8}$$

Рашэнне. Рэшым спачатку лінейнае аднароднае раўнанне $y'-2xy=0$, якое адпавядае дадзенаму раўнанню:

$$\frac{dy}{y} = 2xdx, \quad \ln|y| = x^2 + \ln|c|, \quad y = ce^{x^2}.$$

Будзем шукаць агульнае рашэнне дадзенага раўнання ў выглядзе:

$$y = c(x)e^{x^2}.$$

Тады $y' = c'(x)e^{x^2} + c(x)2xe^{x^2}$. Падставім y і y' у раўнанне (5.8) і атрымаем:

$$c'(x)e^{x^2} = (x+1)e^{x^2},$$

адкуль $c'(x)=x+1$, $c(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2} + C$, дзе C — адвольная канстанта.

Агульнае рашэнне дадзеннага раўнання мае выгляд:

$$y=\left(\frac{(x+1)^2}{2}+C\right)e^{x^2}.$$

Праінтэграваць дыферэнцыяльнае раўнанне (5.1) можна і метадам Бернулі.

Рашэнне раўнання (5.1) шукаем ў выглядзе $y=u(x)v(x)$. Маем $\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}+p(x)uv=f(x)$. Возьмем у якасці $u(x)$ адно з рашэнняў раўнання $\frac{du}{dx}+p(x)u=0$, напрыклад $u(x)=e^{-\int p(x)dx}$.

Тады $v(x)$ знаходзім з раўнання $e^{-\int p(x)dx}\frac{dv}{dx}=f(x)$, г.зн. $v(x)=\int f(x)e^{-\int p(x)dx}dx+c$, дзе c — адвольная канстанта.

Перамножаўшы $u(x)$ і $v(x)$, атрымаем агульнае рашэнне (5.7) лінейнага неаднароднага раўнання (5.1).

Прыклад 2. Рашыць дыферэнцыяльнае раўнанне

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x^2.$$

Рашэнне. Няхай $y=uv$, тады $y'=u'v+uv'$. Падставіўшы гэтыя судачыненні ў зададзенае дыферэнцыяльнае раўнанне, маем

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=x^2.$$

Аб’яднаем ў правай частцы першы і трэці складнікі:

$$v\left(u'-\frac{u}{x}\right)+uv'=x^2.$$

Калі параўнаць выраз у дужках да нуля, атрымаем

$$u'-\frac{u}{x}=0,$$

ці

$$\frac{du}{u}-\frac{dx}{x}=0,$$

адкуль

$$\frac{du}{u}=\frac{dx}{x}.$$

Пасля інтэгравання, адкідваючы адвольную канстанту, маем

$$\ln|u|=\ln|x|,$$

адкуль

$$u=x.$$

Пры такім выбары функцыі u пераўтворанае дыферэнцыяльнае раўнанне прыме выгляд

$$xv'=x^2, \text{ ці } v'=x.$$

Тады $dv=xdx$, адкуль, пасля інтэгравання,

$$v=\frac{x^2}{2}+c.$$

Шуканае агульнае рашэнне

$$y=uv=x\left(\frac{x^2}{2}+c\right)=\frac{x^3}{2}+cx.$$

Прыклад 3. Кандэнсатар, ёмістасць якога Q, уключаецца ў ланцуг з напругай U і супраціўленнем R. Знайсці зарад q кандэнсатара ў момант часу t пасля ўключэння.

Рашэнне. У момант t зарад кандэнсатара роўны q і сіла току $i=\frac{dq}{dt}$. У гэты момант часу ў ланцугу дзейнічае электрарухальная сіла E, роўная рознасці паміж напругай ланцуга U і напругай кандэнсатара $\frac{q}{Q}$:

$$E=U-\frac{q}{Q}.$$

Паводле закону Ома сіла току $i=\frac{E}{R}$ ці

$$\frac{dq}{dt}=\frac{U-\frac{q}{Q}}{R}.$$

Тады дыферэнцыяльнае раўнанне працэсу мае выгляд

$$R\frac{dq}{dt}=U-\frac{q}{Q}.$$

Праінтэграваўшы атрыманае лінейнае дыферэнцыяльнае раўнанне, знаходзім агульнае рашэнне

$$q=QU-Ce^{-\frac{t}{QR}}.$$

Паводле ўмовы пры $t=0$ $q=0$. Таму

$$0=QU-Ce^{-\frac{0}{QR}}$$

і

$$C=QU.$$

Такім чынам, разглядаемы працэс апісываецца раўнаннем

$$q=QU\left(1-e^{-\frac{t}{QR}}\right).$$

Заўвага 2. Разгледзім дыферэнцыяльнае раўнанне выгляду

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n, \tag{5.9}$$

дзе $p(x)$, $f(x)$ — непарыўныя на інтэрвале $(a,\ b)$ функцыі, n — любы рэчаісны, адрозны ад нуля і ад адзінкі лік. Такое раўнанне называецца раўнаннем Бернулі.

Раўнанне Бернулі можна запісаць у выглядзе

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=f(x). \tag{5.9'}$$

Такое раўнанне зводзіцца да лінейнага дыферэнцыяльнага раўнання пры дапамозе падстаноўкі

$$y^{n-1}=u. \tag{5.10}$$

Сапраўды, калі $y^{n-1}=u$, то $u'=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$, адкуль

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}. \tag{5.11}$$

Калі падставіць выразы (5.10) і (5.11) у дыферэнцыяльнае раўнанне (5.9'), то атрымаем

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}+p(x)u=f(x).$$

Мы прыйшлі да лінейнага дыферэнцыяльнага раўнання першага парадку, якое мы інтэграваць умеем.

Прыклад 4. Праінтэграваць дыферэнцыяльнае раўнанне

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=\frac{x^2}{2y}. \tag{5.12}$$

Рашэнне. Маем дыферэнцыяльнае раўнанне Бернулі. Запішам яго ў выглядзе

$$y\frac{dy}{dx}-\frac{y^2}{2x}=\frac{x^2}{2}. \tag{5.12'}$$

Гэта раўнанне зводзіцца да лінейнага дыферэнцыяльнага раўнання пры дапамозе падстаноўкі

$$u=y^2, \tag{5.13}$$

адкуль

$$\frac{du}{dx}=2y\frac{dy}{dx},$$

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{du}{dx}. \tag{5.14}$$

Калі падставім (5.13) і (5.14) у раўнанне (5.12'), то атрымаем

$$\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}=x^2.$$

Мы прыйшлі да лінейнага дыферэнцыяльнага раўнання, якое было разгледжана ў прыкладзе 2. $u=\frac{x^3}{2}+cx$ — агульнае рашэнне гэтага раўнання. Адкуль, скарыстаўшы падстаноўку (5.13), атрымаем $y^2=\frac{x^3}{2}+cx$ — агульны інтэграл дадзеннага дыферэнцыяльнага раўнання (5.12).

Заўвага 3. Рашэнні раўнання Бернулі зручней шукаць у выглядзе $y=uv$, не зводзячы яго да лінейнага раўнання.

§6. Раўнанні ў поўных дыферэнцыялах

Азначэнне 1. Дыферэнцыяльнае раўнанне выгляду

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0, \tag{6.1}$$

левая частка якога з'яўляецца поўным дыферэнцыялам некаторай функцыі, называецца раўнаннем ў поўных дыферэнцыялах.

Узнікае пытанне: як даведацца, калі левая частка раўнання (6.1) з'яўляецца поўным дыферэнцыялам некаторай функцыі?

Мае месца наступная тэарэма.

Тэарэма. Няхай функцыі $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ непарыўныя разам са сваімі частковымі вытворнымі $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ у замкнутым абмежаваным адназвязнам абсягу D. Для таго, каб выраз $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ у абсягу D был поўным дыферэнцыялам некаторай функцыі, неабходна і дастаткова, каб у абсягу D выконвалася ўмова

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{6.2}$$

Пры дапамозе гэтай умовы лёгка распазнаць, ці з'яўляецца дадзенае раўнанне раўнаннем ў поўных дыферэнцыялах.

Няхай умова (6.2) выконваецца. Тады дыферэнцыяльнае раўнанне з'яўляецца дыферэнцыяльным раўнаннем у поўных дыферэнцыялах, г.зн. левая частка гэтага раўнання з'яўляецца поўным дыферэнцыялам некаторай функцыі.

Абазначым праз $F(x, y)$ тую функцыю, для якой левая частка раўнання (6.1) з'яўляецца поўным дыферэнцыялам, г.зн. для якой

$$dF(x, y)=P(x, y)dx+Q(x, y)dy.$$

Тады дыферэнцыяльнаераўнанне (6.1) запісваецца ў выглядзе

$$dF(x, y)=0. \tag{6.1'}$$

Даследуем пытанне знаходжання агульнага інтэграла раўнання (6.1').

Няхай $y=y(x)$ — якое-небудзь рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (6.1'). Яно абарачае гэтае раўнанне ў тоеснасць

$$dF(x, y(x))=0.$$

Паколькі дыферэнцыял функцыі $F(x, y(x))$ роўны нулю, то гэтая функцыя з’яўляецца сталай:

$$F(x, y(x))=c,$$

дзе c — адвольная канстанта.

Апошняя тоеснасць сведчыць нам аб тым, што функцыя $y=y(x)$ задавальняе раўнанню

$$F(x, y)=c. \tag{6.3}$$

Такім чынам, мы даказалі, што кожнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (6.1') задавальняе раўнанню (6.3).

Праўдзівым будзе і тое, што кожная функцыя, якая задавальняе раўнанню (6.3), з’яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (6.1'). Сапраўды, калі функцыя $y=y(x)$ абарачае (6.3) у тоеснасць, то прадыферэнцаваўшы гэтую тоеснасць, мы атрымаем, што гэтая функцыя задавальняе і дыферэнцыяльнаму раўнанню (6.1').

Такім чынам, мы даказалі, што раўнанне (6.3) неяўна вызначае ўсе рашэнні дыферэнцыяльнага раўнання (6.1'), г.зн. з’яўляецца агульным інтэгралам раўнання (6.1').

Атрыманы вынік можна сфармуляваць у выглядзе наступнага правіла: каб знайсці агульны інтэграл раўнання ў поўных дыферэнцыялах, неабходна знайсці тую функцыю, для якой левая частка раўнання (6.1) з’яўляецца поўным дыферэнцыялам, і прыраўнаць яе да адвольнай канстанты.

Такім чынам, знаходжанне агульнага інтэграла раўнання ў поўных дыферэнцыялах (6.1) зводзіцца да знаходжання функцыі $F(x, y)$, для якой левая частка дадзенага раўнання (6.1) з’яўляецца поўным дыферэнцыялам. Разгледзім пытанне знаходжання функцыі $F(x, y)$.

З аднаго боку,

$$dF(x, y)=P(x, y)dx+Q(x, y)dy.$$

З другога боку,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy.$$

Значыць,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y),$$

адкуль

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx + c(y).$$

Пры вылічэнні інтэграла $\int P(x, y)dx$ y разглядаецца як канстанта, таму $c(y)$ з’яўляецца адвольнай функцыяй y. Для знаходжання функцыі $c(y)$ прадыферэнцуем знойдзеную функцыю $F(x, y)$ па y і, паколькі $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$, атрымаем:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)dx\right)+c'(y)=Q(x, y).$$

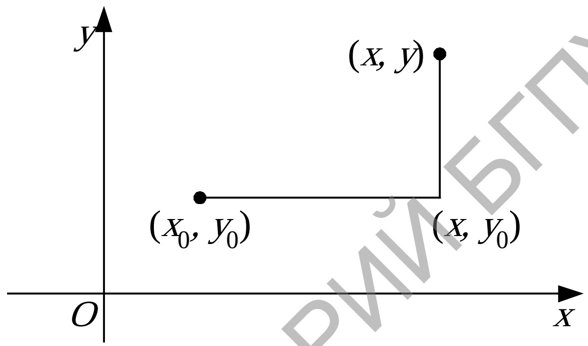
З гэтага раўнання знаходзім $c'(y)$ і, праінтэграваўшы, атрымаем $c(y)$.

Як вядома з курса матэматычнага аналізу, яшчэ прасцей можна вызначыць функцыю $F(x, y)$ па яе поўнаму дыферэнцыялу $dF(x, y)=P(x, y)dx+Q(x, y)dy$, узяўшы крывалінейны інтэграл ад $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ паміж некаторым фіксаваным пунктам (x_0, y_0) і пунктам са зменнымі каардынатамі (x, y) па любому шляху:

$$F(x, y)=\int_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy+c,$$

дзе c — адвольная канстанта.

Часцей усяго ў якасці шляху інтэгравання зручна браць ламаную (рыс.3).



Рыс. 3

У гэтым выпадку

$$F(x, y)=\int_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy+c=\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy+c.$$

Прыклад 1. Праінтэграваць дыферэнцыяльнае раўнанне

$$(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0.$$

Рашэнне. У дадзеным дыферэнцыяльным раўнанні

$$P(x, y)=x+y+1,\ \ Q(x, y)=(x-y^2+3).$$

Паколькі $\frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то выраз $(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy$ з'яўляецца поўным дыферэнцыялам некаторай функцыі $F(x, y)$.

Для шуканай функцыі $F(x, y)$ маем

$$\frac{\partial F}{\partial x}=x+y+1,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=x-y^2+3.$$

З першага раўнання атрымаем

$$F(x, y)=\int(x+y+1)dx+c(y)=\frac{x^2}{2}+yx+x+c(y).$$

Для знаходжання функцыі $c(y)$ дыферэнцуем апошнюю роўнасць па y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + c'(y) = x - y^2 + 3,$$

г.зн. $c'(y)=-y^2+3$. Адсюль $c(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + c_1$, дзе c_1 – адвольная канстанта. Таму

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + yx + x - \frac{y^3}{3} + 3y + c_1.$$

Такім чынам, раўнанне $3x^2+6xy+6x-2y^3+18y=C$, дзе C — адвольная канстанта, з'яўляецца агульным інтэгралам дадзенага раўнання ў поўных дыферэнцыялах.

Азначэнне 2. Інтэгроўным множнікам для раўнання

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0 \tag{6.4}$$

называецца такая функцыя $m(x, y)$, пасля множання на якую раўнанне (6.4) пераўтвараецца у раўнанне ў поўных дыферэнцыялах.

Калі $m(x, y)$ — інтэгроўны множнік раўнання (6.4), то раўнанне $m(x, y)P(x, y)dx+m(x, y)Q(x, y)dy=0$ зяўляецца раўнаннем у поўных дыферэнцыялах:

$$\frac{\partial}{\partial y}(m(x, y)P(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(m(x, y)Q(x, y)),$$

г.зн. інтэгроўны множнік ёсць рашэнне раўнання

$$m(x, y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial m}{\partial x} - P\frac{\partial m}{\partial y}. \tag{6.5}$$

У некаторых прыватных выпадках раўнанне (6.5) спрашчаеца і інтэгроўны множнік для раўнання (6.4) лёгка знайсці. Разгледзім некалькі такіх выпадкаў.

Калі раўнанне (6.4) мае інтэгроўны множнік, які залежыць толькі ад x, г.зн. $m(x, y)=m(x)$, то з (6.5) маем

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}, \text{ ці } \frac{dm}{m} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx,$$

адкуль

$$\ln|m| = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx + C,$$

г.зн.

$$m(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx} \tag{6.6}$$

(адвольнае значэнне канстанты C узялі роўным нулю, паколькі нам дастаткова мець які-небудзь адзін інтэгроўны множнік).

Відавочна, што ў гэтам выпадку выраз $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ не залежыць ад y. Мае месца і адваротнае: калі выраз $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ не залежыць ад y, то існуе інтэгроўны множнік m, які залежыць толькі ад x. Ён вызначаецца роўнасцю (6.6).

Калі раўнанне (6.4) дапускае інтэгроўны множнік як функцыю адной зменнай y, г.зн. $m(x, y)=m(y)$, то з (6.5) вынікае

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dy}=\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{-P},$$

адкуль

$$m(y)=e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}dx}. \qquad (6.7)$$

Зразумела, што ў гэтам выпадку стасунак $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{-P}$ не залежыць ад x. Праўдзівым будзе і адваротнае: калі выраз $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{-P}$ не залежыць ад x, то існуе інтэгроўны множнік m, які залежыць толькі ад y і вызначаецца формулай (6.7).

Прыклад 2. Рашыць раўнанне

$$(x^5-3y^2)dx+2xydy=0.$$

Рашэнне. Дадзенае раўнанне не з’яўляецца ні раўнаннем са зменнымі, якія можна раздзяліць, ні аднародным, ні лінейным. Тут $P(x, y)=(x^5-3y^2)$, $P(x, y)=2xy$, $P'_y=-6y, Q'_x=2y, P'_y\neq Q'_x$. Значыць дадзенае дыферэнцыяльнае раўнанне не з’яўляеццпа раўнаннем у поўных дыферэнцыялах.

Заўважым, што стасунак $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\dfrac{-6y-2y}{2xy}=-\dfrac{4}{x}$ залежыць толькі ад x. Інтэгроўны множнік $m=m(x)$ можа быць знойдзены па формуле (6.6):

$$m(x)=e^{-\int\frac{4}{x}dx}=e^{-4\ln|x|}=\frac{1}{x^4}.$$

Памножым абедзве часткі зыходнага раўнання на $\dfrac{1}{x^4}$ і атрымаем:

$$\frac{x^5-3y^2}{x^4}dx+\frac{2y}{x^3}dy=0. \qquad (6.8)$$

Гэта дыферэнцыяльнае раўнанне з’яўляецца раўнаннем у поўных дыферэнцыялах. Агульны інтэграл раўнання (6.8) знойдзем пры дапамозе формулы $F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C$, мяркуючы ў ёй x_0=1, y_0=0. Канчаткова атрымаем:

$$\frac{y^2}{x^3} + \frac{x^2}{2} = C,$$

дзе C — адвольная канстанта. Гэта і ёсць агульны інтэграл зыходнага дыферэнцыяльнага раўнання.

§7. Тэарэма пра існаванне і адзінасць рашэння дыферэнцыяльнага раўнання $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Клас дыферэнцыяльных раўнанняў, якія інтэгруюцца ў квадратах, вузкі, таму вялікае значэнне маюць метады набліжанага інтэгравання дыферэнцыяльных раўнанняў. У сувязі з гэтым узнікае пытанне пра існаванне і адзінасць рашэння дыферэнцыяльнага раўнання. У дадзеным параграфе мы дакажам тэарэму пра існаванне і адзінасць рашэння дыферэнцыяльнага раўнання

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Доказ гэтай тэарэмы мы будзем ажыццяўляць так званым метадам паслядоўных набліжэнняў. Гэты метад з’яўляецца і метадам набліжаннага інтэгравання дыферэнцыяльнага раўнання.

Тэарэма. Няхай дадзена дыферэнцыяльнае раўнанне

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{7.1}$$

з пачатковай умовай

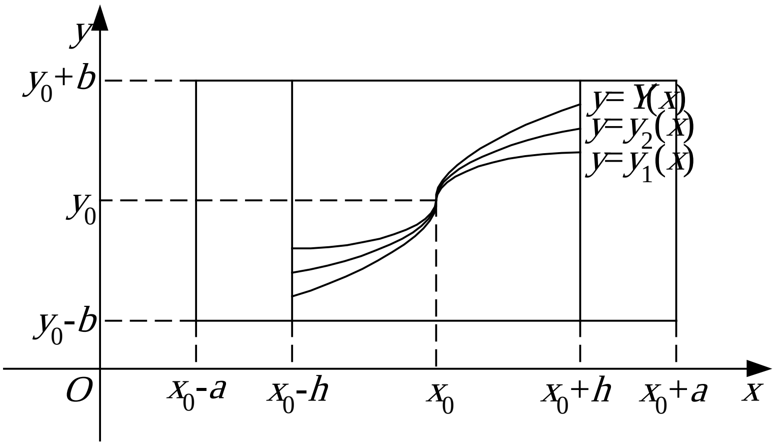
$$y=y_0 \text{ пры } x=x_0. \tag{7.2}$$

Няхай далей функцыя $f(x, y)$ у прамавугольніку $D(x_0–a \le x \le x_0+a, y_0–b \le y \le y_0+b)$ задавальняе наступным дзвюм умовам:

1) $f(x, y)$ непарыўная, а значыць, абмежаваная ў замкнутым прамавугольніку D, г.зн. існуе такі лік M>0, што $|f(x, y)| \le M$ для ўсіх пунктаў $(x, y) \in D$;

2) $f(x, y)$ у прамавугольніку D мае абмежаваную частковаю вытворную па y, г.зн. існуе такі лік N>0, што $|f'_y(x, y)| \le N$ для ўсіх пунктаў $(x, y) \in D$.

Тады на адрэзку $x_0–h \le x \le x_0+h$, дзе $h < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$, існуе адзінае рашэнне $y=Y(x)$ дыферэнцыяльнага раўнання (7.1), якое задавальняе пачатковаў умове (7.2) (рыс. 4).



Рыс. 4

Доказ. 1. Спачатку дакажам, што задача знаходжання рашэння дыферэнцыяльнага раўнання (7.1), якое задавальняе пачатковай умове (7.2), раўназначная задачы знаходжання непарыўнага рашэння наступнага так званага інтэгральнага раўнання

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx, \tag{7.3}$$

дзе y — невядомая функцыя.

Няхай $y=y(x)$ — якое-небудзь непарыўнае рашэнне інтэгральнага раўнання (7.3). Яно абарачае раўнанне (7.3) у тоеснасць

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx. \tag{7.4}$$

Прадыферэнцаваўшы гэту тоеснасць, атрымаем

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)),$$

што сведчыць аб тым, што функцыя $y=y(x)$ з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (7.1). Прычым гэта рашэнне задавальняе пачатковай умове (7.2) (гэта бачна з тоеснасці (7.4)).

Няхай $y=y(x)$ — якое-небудзь рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (7.1), якое задавальняе пачатковай умове (7.2). Тады функцыя $y=y(x)$ непарыўная (бо дыферэнцавальная) і з'яўляецца рашэннем інтэгральнага раўнання (7.3). Сапраўды, паколькі функцыя $y=y(x)$ з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (7.1), то яна абарачае гэта раўнанне ў тоеснасць

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)).$$

Праінтэграваўшы гэту тоеснасць ад x_0 да x, атрымаем

$$y(x) - y_0(x) = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx,$$

адкуль, калі улічыць (7.2), вынікае

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx.$$

Апошняя тоеснасць сведчыць нам аб тым, што функцыя $y=y(x)$ з'яўляецца рашэннем інтэгральнага раўнання (7.3).

Такім чынам, мы даказалі, што задача знаходжання рашэння дыферэнцыяльнага раўнання (7.1), якое задавальняе пачатковай умове (7.2), раўназначная задачы знаходжання непарыўнага рашэння інтэгральнага раўнання (7.3). Таму доказ зводзіцца да доказу існавання і адзінасці непарыўнага рашэння інтэгральнага раўнання (7.3).

2. Дакажам існаванне рашэння. Скарыстаем метад паслядоўных набліжэнняў.

1^0. Спачатку разгледзім функцыю $y=y_0$. Гэту функцыю будзем называць нулявым набліженнем рашэння. Падставім $y=y_0$ у правую частку раўнання (7.3). Атрымаем

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx. \qquad (7.5_1)$$

Гэту функцыю будзем называць першым набліжэннем рашэння. Вывучым яе асаблівасці.

Паколькі функцыя $f(x, y_0)$ непарыўная на адрэзку $[x_0–h, x_0+h]$, то на гэтым адрэзку непарыўнай будзе і функцыя $\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx$. Адсюль вынікае, што функцыя $y=y_1(x)$ вызначаная і непарыўная на адрэзку $[x_0–h, x_0+h]$. Прычым яна прымае значэнне y_0 пры $x=x_0$. Гэта відаць з формулы (7.5_1). Акрамя гэтага для ўсіх x з разглядаемага адрэзка графік функцыі $y=y_1(x)$ ляжыць у прамавугольніку D. Сапраўды, для ўсіх $x\in[x_0–h, x_0+h]$ мае месца няроўнасць:

$$\left|y_1(x) - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} \left|f(x, y_0)\right|dx\right| \le M\left|\int_{x_0}^{x} dx\right| = M\left|x - x_0\right| \le Mh < M\frac{b}{M} = b.$$

Такім чынам, мы даказалі, што для ўсіх $x\in[x_0–h, x_0+h]$ мае месца няроўнасць $|y_1(x)–y_0|<b$, якая сведчыць, што графік функцыі $y=y_1(x)$ ляжыць у прамавугольніку D.

Падставім цяпер $y=y_1(x)$ у правую частку раўнання (7.3) і атрымам функцыю

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx. \qquad (7.5_2)$$

Гэту функцыю будзем называць другім набліжэннем рашэння. Яна валодае наступнымі ўласцівасцямі: $y=y_2(x)$ вызначана і непарыўна на адрэзку $[x_0–h, x_0+h]$; пры $x=x_0$ функцыя прымае значэнне y_0; для ўсіх x з разглядаемага адрэзка графік гэтай фуцкцыі ляжыць у прамавугольніку D.

Аналагічна будуем функцыі

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))dx \quad (n=3,\ 4,\ \ldots). \qquad (7.5_n)$$

Такім чынам, мы пабудуем паслядоўнасць функцый

$$y_0,\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ldots, \qquad (7.6)$$

якія называюцца паслядоўнымі набліжэннямі рашэння.

Дакажам цяпер, што паслядоўнасць (7.6) на адрэзку $[x_0-h,\ x_0+h]$ збягаецца да некаторай функцыі, якая непарыўная на разглядаемым адрэзку і з’яўляецца рашэннем інтэгральнага раўнання (7.3). Гэтым доказ існавання рашэння будзе завершаны.

2^0. Спачатку дакажам, што на разглядаемым адрэзку $[x_0-h,\ x_0+h]$ паслядоўнасць (7.6) збягаецца (нават раўнамерна) да некаторай функцыі $y=Y(x)$, якая непарыўная на разглядаемым адрэзку. Для доказу пабудуем функцыйны шэраг

$$y_0+(y_1(x)-y_0)+(y_2(x)-y_1(x))+\ldots+(y_n(x)-y_{n-1}(x))+\ldots, \qquad (7.7)$$

для якога паслядоўнасць (7.6) будзе паслядоўнасцю частковых сум. Дакажам, што шэраг (7.7) раўнамерна збягаецца на адрэзку $[x_0-h,\ x_0+h]$, што і будзе сведчыць аб раўнамернай збежнасці функцыйнай паслядоўнасці (7.6).

Будзем карыстацца тэарэмай Вейерштраса. Спачатку здзейснім ацэнку складнікаў шэрагу (7.7).

$$\left|y_1(x) - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx\right| \le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f(x, y_0)\right|dx\right| \le M\left|\int_{x_0}^{x} dx\right| = M\left|x - x_0\right|.$$

Такім чынам,

$$\left|y_1(x) - y_0\right| \le \frac{M\left|x - x_0\right|}{1!}. \qquad (7.8)$$

$$\left|y_2(x) - y_1(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x}\left(f\left(x, y_1(x)\right) - f\left(x, y_0\right)\right)dx\right| = \left|\int_{x_0}^{x}\left(f_y'\left(x, \xi_1\right)\left(y_1(x) - y_0\right)\right)dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f_y'\left(x, \xi_1\right)\right|\left|y_1(x) - y_0\right|dx\right| \le N\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_1(x) - y_0\right|dx\right| \le NM\left|\int_{x_0}^{x}\left|x - x_0\right|dx\right| = \frac{NM\left|x - x_0\right|^2}{2}.$$

Такім чынам,

$$\left|y_2(x) - y_1(x)\right| \le \frac{MN\left|x - x_0\right|^2}{2!}. \qquad (7.9)$$

Далей,

$$\left|y_3(x) - y_2(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x}\left(f\left(x, y_2(x)\right) - f\left(x, y_1(x)\right)\right)dx\right| \le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f\left(x, y_2(x)\right) - f\left(x, y_1(x)\right)\right|dx\right| =$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x}\left|f_y'\left(x, \xi_2\right)\right|\left|y_2(x) - y_1(x)\right|dx\right| \le N\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_2(x) - y_1(x)\right|dx\right| \le \frac{MN^2}{2}\left|\int_{x_0}^{x}\left|x - x_0\right|^2 dx\right| = \frac{N^2M\left|x - x_0\right|^3}{2\cdot 3}.$$

Значыць,

$$\left|y_3(x)-y_2(x)\right|\le\frac{N^2M\left|x-x_0\right|^3}{2\cdot 3}.$$

У агульным выпадку будзем мець:

$$\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right|\le\frac{N^{n-1}M\left|x-x_0\right|^n}{n!}.\ (n=1,\ 2,\ 3,\ ...) \tag{7.10}$$

Паколькі для ўсіх $x\in[x_0-h,\ x_0+h]$ мае месца няроўнасць $|x-x_0|\le h$, то з (7.10) для ўсіх такіх x будзем мець:

$$\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right|\le\frac{N^{n-1}M}{n!}h^n. \tag{7.11}$$

З гэтай няроўнасці робім высновы, што на адрэзку $[x_0-h,\ x_0+h]$ складнікі функцыйнага шэрагу (7.7) (пачынаючы з другога) не перавышаюць па абсалютнай велічыні складнікаў наступнага дадатнага лікавага шэрагу:

$$\frac{M}{1!}h+\frac{MN}{2!}h^2+\frac{MN^2}{3!}h^3+...+\frac{MN^{n-1}}{n!}h^n+... . \tag{7.12}$$

Калі мы дакажам, што лікавы шэраг (7.12) збягаецца, то згодна з тэарэмай Вейерштраса атрымаем, што функцыйны шэраг (7.7) раўнамерна збягаецца на адрэзку $[x_0-h,\ x_0+h]$. У збежнасці шэрагу (7.12) лёгка пераканацца пры дапамозе прыметы Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{MN^nh^{n+1}n!}{(n+1)!MN^{n-1}h^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{Nh}{n+1}=0<1.$$

Такім чынам, мы даказалі, што шэраг (7.7) ці, што тое самае, функцыйная паслядоўнасць (7.6) раўнамерна збягаецца на адрэзку $[x_0-h,\ x_0+h]$.

Лімітавую функцыю абазначым праз $Y(x)$:

$$Y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x),\ \forall x\in[x_0-h,\ x_0+h]. \tag{7.13}$$

Адзначым яшчэ наступнае: паколькі паслядоўнасць (7.6) раўнамерна збягаецца на адрэзку $[x_0-h,\ x_0+h]$, і элементы яе з’яўляюцца непарыўнымі функцыямі, то лімітавая функцыя $Y(x)$ непарыўная на разглядаемым адрэзку.

3^0. Дакажам, што непарыўная функцыя $Y(x)$ з’яўляецца рашэннем інтэгральнага раэнання (7.3) на адрэзку $[x_0-h,\ x_0+h]$. Спачатку адзначым наступнае: паколькі для ўсіх $\forall x\in[x_0-h,\ x_0+h]$ графікі функцый $y_n(x)$ ляжаць у прамавугольніку D, то графік лімітавай функцыі $Y(x)$ таксама ляжыць у прамавугольніку D. Адсюль вынікае, што

$$\int_{x_0}^{x}f\left(x,Y(x)\right)dx$$

існуе для ўсіх $x\in[x_0-h,\ x_0+h]$.

Дакажам цяпер наступную роўнасць:

$$\int_{x_0}^{x} f\left(x, Y(x)\right)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f\left(x, y_n(x)\right)dx. \qquad (7.14)$$

Для доказу ацэнім для ўсіх $x\in[x_0-h,\ x_0+h]$ рознасць:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f\left(x, Y(x)\right)dx - \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_n(x)\right)dx\right| \le \left|\int_{x_0}^{x}\left| f\left(x, Y(x)\right) - \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_n(x)\right)\right|dx\right| =$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x}\left| f_y'\left(x, \xi\right)\right| \cdot \left|Y()x - y_n(x)\right|dx\right| \le N\left|\int_{x_0}^{x}\left|Y(x) - y_n(x)\right|dx\right| \le$$

$$\le N \max_{x\in[x_0-h;\, x_0+h]}\left|Y(x) - y_n(x)\right| \cdot \left|\int_{x_0}^{x} dx\right| = N\rho_n\left|x - x_0\right| \le N\rho_n h,$$

дзе $\rho_n = \max_{x\in[x_0-h;x_0+h]}\left|Y(x) - y_n(x)\right|$.

Такім чынам, для ўсіх $x\in[x_0-h,\ x_0+h]$ мы атрымалі няроўнасць:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f\left(x, Y(x)\right)dx - \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_n(x)\right)dx\right| \le N\rho_n h. \qquad (7.15)$$

На адрэзку $[x_0-h,\ x_0+h]$ функцыйная паслядоўнасць (7.6) раўнамерна збягаецца да функцыі $Y(x)$, таму $\rho_n\to 0$ пры $n\to\infty$. Адсюль і няроўнасці (7.15) вынікае роўнасць (7.14).

Роўнасць (7.14) скарыстаем для доказу факту, што функцыя $Y(x)$ з'яўляецца рашэннем інтэгральнага раўнання (7.3). Вернемся да роўнасці (7.5_n):

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, y_{n-1}(x)\right)dx.$$

Калі ў роўнасці (7.5_n) перайсці да ліміту пры $n\to\infty$ і скарыстаць роўнасці (7.13), (7.14), то для ўсіх $x\in[x_0-h,\ x_0+h]$ атрымаем наступную роўнасць:

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(x, Y(x)\right)dx. \qquad (7.16)$$

Роўнасць (7.16) і сведчыць нам аб тым, што непарыўная функцыя $Y(x)$ з'яўляецца рашэннем інтэгральнага раўнання (7.3). Доказ існавання рашэння закончаны.

3. Дакажам цяпер адзінасць рашэння дыферэнцыяльнага раўнання (7.1). Для гэтага дакажам, што непарыўная функцыя $Y(x)$ з'яўляецца адзіным непарыўным рашэннем інтэгральнага раўнання (7.3) на адрэзку $[x_0-h,\ x_0+h]$.

Мяркуем адваротнае, што на разглядаемым адрэзку існуе яшчэ адно непарыўнае рашэнне $Z(x)$ раўнання (7.3). Паколькі функцыя $Z(x)$, згодна з меркаваннем, з'яўляецца рашэннем (7.3), то для ўсіх x з адрэзка $[x_0-h,\ x_0+h]$ мае месца роўнасць:

$$Z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x, Z(x)\big)dx. \tag{7.17}$$

На разглядаемым адрэзку функцыя $Z(x)$ няроўна тоесна функцыі $Y(x)$, таму

$$|Y(x) - Z(x)| > 0 \tag{7.18}$$

у некаторых пунктах адрэзка $[x_0 - h, x_0 + h]$. Функцыя $|Y(x) - Z(x)|$ непарыўная на адрэзку $[x_0 - h, x_0 + h]$, значыць у некаторым пункце гэтага адрэзка яна дасягае свайго найбольшага значэння, прычым, згодна з (7.18), будзем мець:

$$\max_{x \in [x_0 - h; x_0 + h]} |Y(x) - Z(x)| > 0. \tag{7.19}$$

Далей маем:

$$|Y(x) - Z(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \big(f(x, Y(x)) - f(x, Z(x)) \big) dx \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f(x, Y(x)) - f(x, Z(x)) \right| dx \right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} \left| f_y{}'(x, \xi) \right| \cdot |Y(x) - Z(x)| dx \right| \le N \left| \int_{x_0}^{x} |Y(x) - Z(x)| dx \right| \le N \cdot \max_{x \in [x_0 - h; x_0 + h]} |Y(x) - Z(x)| \cdot \left| \int_{x_0}^{x} dx \right| =$$

$$= N \cdot \max_{x \in [x_0 - h; x_0 + h]} |Y(x) - Z(x)| \cdot |x - x_0| \le N \cdot \max_{x \in [x_0 - h; x_0 + h]} |Y(x) - Z(x)| \cdot h <$$

$$< N \cdot \max_{x \in [x_0 - h; x_0 + h]} |Y(x) - Z(x)| \frac{1}{N} = \max_{x \in [x_0 - h; x_0 + h]} |Y(x) - Z(x)|.$$

Такім чынам, мы даказалі, што для ўсіх $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ мае месца няроўнасць:

$$|Y(x) - Z(x)| < \max_{x \in [x_0 - h; x_0 + h]} |Y(x) - Z(x)|.$$

Адсюль вынікае, што

$$\max_{x \in [x_0 - h; x_0 + h]} |Y(x) - Z(x)| < \max_{x \in [x_0 - h; x_0 + h]} |Y(x) - Z(x)|,$$

аднак гэта немагчыма. Адзінасць рашэння даказана.

Такім чынам, тэарэма пра існаванне і адзінасць рашэння дыферэнцыяльнага раўнання даказана цалкам.

§8. Паняцці агульнага і асаблівага рашэнняў дыферэнцыяльнага раўнання

Разгледзем дыферэнцыяльнае раўнанне выгляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{8.1}$$

і пачатковаю ўмову

$$y(x_0) = y_0. \tag{8.2}$$

У §2 была сфармулявана задача Кашы. Будзем гаварыць, што задача Кашы ў пункце (x_0, y_0) мае адзінае рашэнне, калі ў некаторым наваколлі пункта x_0 існуе адзінае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (8.1), якое задавальняе пачатковай умове (8.2) (г.зн. існуе адзіная інтэгральная крывая, якая праходзіць праз пункт (x_0, y_0)).

У §2 была ўведзена паняцце агульнага рашэння дыферэнцыяльнага раўнання (8.1). Цяпер удакладнім гэта паняцце.

Няхай D — некаторы абсяг, у кожным пункце якога задача Кашы мае адзінае рашэнне. Такім абсягам будзе абсяг, ў наваколлі кожнага пункта якога выконваюцца ўсе ўмовы тэарэмы існавання і адзінасці рашэння.

Азначэнне 1. Функцыя $y=\varphi(x, C)$ называецца агульным рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (8.1) у абсягу D, калі яна валодае наступнымі дзвюма ўласцівасцямі:

1^0. Пры кожным значэнні C з некаторага мноства яна з’яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (8.1).

2^0. Пры належным падборы C яна абарачаецца ў рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (8.1), якое задавальняе любой наперад зададзенай умове $y(x_0)=y_0$, дзе $(x_0, y_0)\in D$.

Умова 2^0 можа быць сфармулявана гэтак:
якой бы не была пачатковая ўмова (8.2), заўсёды можна знайсці такое значэнне $C=C_0$, што функцыя $y=\varphi(x, C)$ будзе рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (8.1), якое задавальняе зададзенай пачатковай умове (8.2).

Пяройдзем цяпер да вывучэння паняцця асаблівага рашэння.

Прыклад 1. Разгледзем дыферэнцыяльнае раўнанне

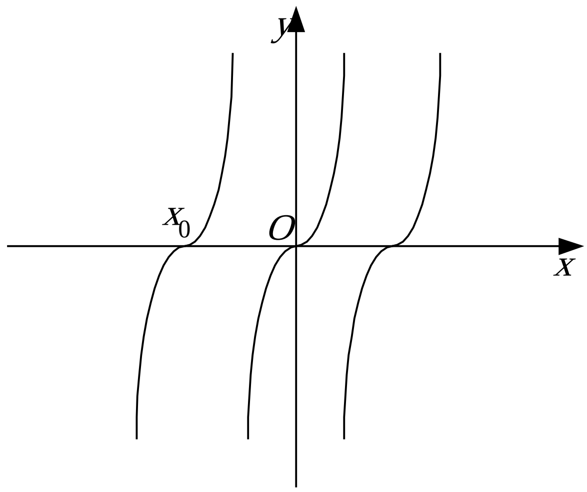
$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}}. \tag{8.3}$$

Раздзелім абедзве часткі дадзенага раўнання на $y^{\frac{2}{3}}$, атрымаем $\dfrac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = dx$.

Праінтэграваўшы, знаходзім: $y = \dfrac{(x+c)^3}{27}$ — агульнае рашэнне раўнанння (8.3). Пры раздзяленні мы згубілі рашэнне $y=0$. Графічна гэта рашэнне адлюстроўваецца восю Ox.

Праз кожны пункт x_0 восі Ox праходзяць прынамсі дзве інтэгральныя лініі: прамая $y=0$ і крывая, якая атрымліваецца з агульнага рашэння (кубічная парабала): $y = \dfrac{(x+C_0)^3}{27}$, дзе $C_0=x_0$ (рыс. 5).

Такім чынам, у кожным пункце рашэння $y=0$ парушаецца адзінасць рашэння задачы Кашы. Рашэнне $y=0$ называецца асаблівым рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (8.3).



Рыс. 5

Азначэнне 2. Асаблівым рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (8.1) называецца такое рашэнне, у кожным пункце графіка якога парушаецца адзінасць рашэння задачы Кашы.

Разгледзем пытанне знаходжання асаблівага рашэння.

1 метад. Пры інтэграванні дыферэнцыяльнага раўнання падчас даводзіцца ажыццяўляць такія пераўтварэнні, пры якіх некаторыя рашэнні губляюцца. Такія рашэнні як раз могуць быць асаблівымі. Неабходна знайсці такія рашэнні і праверыць, ці будуць яны асаблівымі. Менавіта такім шляхам мы знайшлі асаблівае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (8.3).

2 метад. Калі функцыя $f(x, y)$, якая стаіць у правай частцы раўнання (8.1), непарыўная ў некаторым абсягу, то асаблівым рашэннем можа быць толькі такая функцыя $y=\varphi(x)$, у кожным пункце графіка якой не выконваецца ўмова існавання ці абмежаванасці частковай вытворнай $f_y'(x, y)$. Такая функцыя называецца падазронай на асаблівае рашэнне. Неабходна яе знайсці, праверыць: ці будзе яна рашэннем? Ці парушаецца адзінасць рашэння задачы Кашы ў кожным пункце графіка гэтага рашэння? Калі так, то гэтая функцыя будзе асаблівым рашэннем.

Праілюструем гэты метад на прыкладзе дыферэнцыяльнага раўнання (8.3). Правая частка гэтага раўнання з’яўляецца функцыяй, непарыўнай у кожным пункце плоскасці. Знаходзім

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(y^{\frac{2}{3}} \right)'_y = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}.$$

Мы бачым, што частковая вытворная $\frac{\partial f}{\partial y}$ у пунктах прамой $y=0$ абарачаецца ў бясконцасць. Таму функцыя $y=0$ з’яўляецца падазроўнай на асаблівае рашэнне. Паколькі гэтая функцыя з’яўляецца рашэнне дыферэнцыяльнагараўнання (8.3), акрамя гэтага, у кожным пункце графіка гэтага рашэння парушаецца адзінасць рашэння задачы Кашы, таму $y=0$ — асаблівае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (8.3).

Прыклад 2. Разгледзім дыферэнцыяльнае раўнанне

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y-x} + 5. \tag{8.4}$$

Правая частка гэтага раўнання з'яўляецца непарыўнай ва ўсіх пунктах плоскасці функцыяй. Вылічым f_y':

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-x)^2}}.$$

Бачым, што частковая вытворная $\frac{\partial f}{\partial y}$ абарачаецца ў бясконцасць на прамой $y=x$. Значыць функцыя $y=x$ з'яўляецца падазроўнай на асаблівае рашэнне. Аднак асаблівым рашэннем гэта функцыя не будзе, бо не з'яўляецца рашэннем дадзенага дыферэнцыяльнага раўнання (у гэтам можна пераканацца непасрэдна праверкай).

§9. *Дыферэнцыяльныя раўнанні вышэйшых парадкаў*

Разгледзім дыферэнцыяльнае раўнанне парадку n:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0.$$

Будзем меркаваць, што гэтае раўнанне можна рашыць адносна $y^{(n)}$, г. зн. можна запісаць у выглядзе

$$y^{(n)}=F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{9.1}$$

З паняццем рашэння дыферэнцыяльнага раўнання мы ўжо знаёмы (гл. §1). Задача Кашы для дыферэнцыяльнага раўнання (9.1) фармулюецца наступным чынам:

знайсці рашэнне $y=y(x)$ дыферэнцыяльнага раўнання (9.1), якое задавальняе наступным пачатковым умовам:

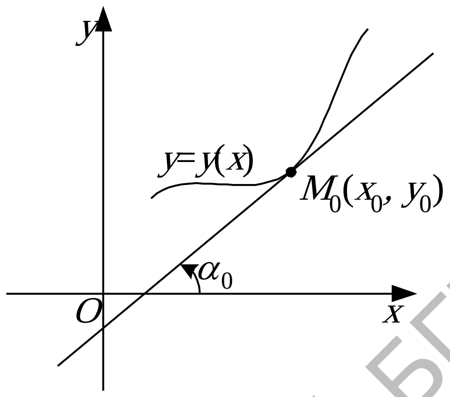
$$\left.\begin{array}{l} y = y_0, \\ y' = y_0', \\ y'' = y_0'', \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{пры} \;\; x = x_0 \end{array}\right\}, \tag{9.2}$$

дзе x_0, y_0, y_0', …, $y_0^{(n-1)}$ — зададзенныя лікі, якія называюцца пачатковымі дадзенымі.

У выпадку дыферэнцыяльнага раўнання другога парадку $y''=f(x, y, y')$ задача Кашы заключаецца ў знаходжанні рашэння $y=y(x)$, якое задавальняе наступным пачатковым умовам:

$$y = y_0,$$
$$y' = y'_0 \quad \text{пры} \;\; x = x_0.$$

З геаметрычнага пункта гледжанння задача заключаецца ў знаходжанні інтэгральнай крывой $y=y(x)$, якая праходзіць праз пункт $M_0(x_0, y_0)$ і мае ў гэтым пункце зададзены нахіл (вуглавы каэфіцыент) (рыс. 6) датычнай:



Рыс. 6

Задача. Знайсці інтэгральную крывую дыферэнцыяльнага раўнання $y''=-1$, якая праходзіць праз пункт $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ і датыкаецца прамой, паралельнай прамой $x+y=0$.

Рашэнне. Задача заключаецца ў знаходжанні інтэгральнай крывой, якая задавальняе наступным пачатковым умовам:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2}, \\ y' = -1 \quad \text{пры} \;\; x = 1 \end{array}\right\}. \tag{9.3}$$

Пяройдзем да рашэння сфармуляванай задачы. Праінтэграваўшы дадзенае раўнанне, атрымаем:

$$y'=-x+c_1,$$
$$y = -\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2, \tag{9.4}$$

дзе c_1, c_2 — адвольныя канстанты.

Такім чынам, $y = -\dfrac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$ — сукупнасць усіх рашэнняў дадзенага дыферэнцыяльнага раўнання $y''=-1$.

Каб знайсці патрэбную нам інтэгральную крывую, неабходна, скарыстаўшы пачатковыя ўмовы, знайсці c_1, c_2. Скарыстаем пачатковыя ўмовы (9.3) і атрымаем

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c_1 + c_2, \\ -1 = -1 + c_1, \end{cases}$$

адкуль вынікае, што c_1=0, c_2=1. Падставім знойдзенныя значэнні c_1, c_2 у (9.4) і атрымаем шуканую інтэгральную крывую $y = -\frac{x^2}{2} + 1$.

Сфармулюем тэарэму пра існаванне і адзінасць рашэння дыферэнцыяльнага раўнання (9.1).

Тэарэма. Няхай даддзна дыферэнцыяльнае раўнанне (9.1) з пачатковымі ўмовамі (9.2).

Калі ў некаторым наваколлі пункта $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ функцыя $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ непарыўная і мае абмежаваныя частковыя вытворныя па аргументах $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, то на некаторым адрэзку $[x_0-h, x_0+h]$ існуе адзінае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (9.1), якое задавальняе пачатковым умовам (9.2).

Вызначым цяпер паняцце агульнага рашэння дыферэнцыяльнага раўнання (9.1). Няхай D — некаторы абсяг, у кожным пункце $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ якога задача Кашы мае адзінае рашэнне. Такім абсягам, напрыклад, з'яўляецца абсяг, у наваколлі кожнага пункта якога выкананы ўмовы сфармуляванай вышэй тэарэмы.

Азначэнне. Функцыя $y=\varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ называецца агульным рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (9.1) у абсягу D, калі яна задавальняе наступным дзвюм умовам:

1^0. Пры любых значэннях $c_1, c_2, \ldots, c_n$, узятых з некаторых мностваў, яна будзе рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (9.1).

2^0. Пры належным падборы $c_1, c_2, \ldots, c_n$ яна абарачаецца ў рашэнне дадзенага раўнання, якое задавальняе любым наперад зададзеным пачатковым умовам (9.2), дзе $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$.

Умова 2^0 можа быць сфармулявана і гэтак: якімі б небылі пачатковыя ўмовы (9.2), заўсёды можна знайсці такія значэнні $c_1 = c_1^*, c_2 = c_2^*, \ldots, c_n = c_n^*$, што функцыя $y = \varphi(x, c_1^*, c_2^*, \ldots, c_n^*,)$ будзе рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (9.1), якое задавальняе гэтым пачатковым умовам.

Тыя рашэнні, якія атрымліваюцца з агульнага рашэння пры канкрэтных значэннях $c_1, c_2, \ldots, c_n$, называюцца частковымі рашэннямі.

Вернемся да разгледжанага вышэй дыферэнцыяльнага раўнання $y''=-1$. Відавочна , што $y = -\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ — агульнае рашэнне гэтага раўнання. Рашэнне $y = -\frac{x^2}{2} + 1$, якое задавальняе пачатковым умовам (9.3), з'яўляецца частковым рашэннем.

§10. Прасцейшыя выпадкі паніжэння парадку

Разгледзім тры прыватныя выпадкі, калі дыферэнцыяльнае раўнанне

$$y''=f(x, y, y') \tag{10.1}$$

пры дапамозе замены зменнай зводзіцца да рашэння раўнання першага парадку. Такое пераўтварэнне раўнання (10.1) называецца паніжэннем парадку.

1. Раўнанне выгляду

$$y''=f(x), \tag{10.2}$$

дзе $f(x)$ — функцыя, непарыўная на некаторым інтэрвале $a<x<b$.

Уводзім новую функцыю $Z(x)$, мяркуючы $Z(x)=y'$. Тады $Z'(x)=y''$, і раўнанне пераўтвараецца ў раўнанне першага парадку: $Z'(x)=f(x)$. Рашыўшы яго, знаходзім $Z(x)=\int f(x)dx+C_1$. Паколькі $Z(x)=y'$, то $y'=\int f(x)dx+C_1$. Адсюль, праінтэграваўшы яшчэ раз, атрымаем

$$y=\int\left(\int f(x)\right)dx+C_1x+C_2,$$

дзе C_1, C_2 — адвольныя канстанты. Гэта і ёсць агульнае рашэнне раўнання (10.2) у абсягу D: $a<x<b$, $-\infty<y<\infty$.

Прыклад 1. Цела кінулі вертыкальна ўверх з пачатковай хуткасцю v_0. Знайсці закон руху цела, калі лічыць, што яно рухаецца толькі пад уплывам сілы цяжару.

Рашэнне. Задача заключаецца ў вызначэнні невядомага закону змянення шляху (вышыні) S з цягам часу t, г. зн. неабходна знайсці закон $S=f(t)$. На падставе другога закону дынамікі (Ньютана)

$$m\frac{d^2S}{dt^2}=F, \tag{10.3}$$

дзе $\frac{d^2S}{dt^2}$ — паскарэнне цела ; m — яго маса ; F — сіла, якая дзейнічае на цела ў напрамку яго руху.

Паводле ўмовы задачы сіла F роўная сіле цяжару mg, якая накіравана ўніз, г. зн. у працілеглы бок, і таму мае знак мінус:

$$F=-mg. \tag{10.4}$$

Прыраўнаваўшы суадносіны (10.3) і (10.4), атрымаем дыферэнцыяльнае раўнанне руху:

$$\frac{d^2S}{dt^2}=-g.$$

Гэта дыферэнцыяльнае раўнанне выгляду $y''=\text{const}$. Праінтэграваўшы яго маем:

$$\frac{dS}{dt}=-gt+c_1,$$

$$S=-\frac{gt^2}{2}+c_1t+c_2. \tag{10.5}$$

Канстанты c_1 і c_2 вызначым з пачатковых умоў. Адлік шляху ажыцяўляецца ад пачатковага моманту, таму пры t=0, S=0, значыць, c_2=0.

Паколькі, пры t=0 пачатковая хуткасць $v_0 = \frac{dS}{dt}$, то з раўнання (10.5) атрымаем $c_1=v_0$.

Такім чынам, залежнасць пройдзенага целам шляху S ад часу t:

$$S = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

2. Раўнанне выгляду

$$F(x, y', y'')=0. \tag{10.6}$$

Характэрным для раўнання (10.6) з'яўляецца тое, што яно не змяшчае y.

У раўнанне (10.6) мяркуем $y'=Z(x)$ і, значыць, $y''=Z'(x)$, тады атрымаем дыферэнцыяльнае раўнанне першага парадку:

$$F(x, Z, Z')=0. \tag{10.7}$$

Няхай

$$Z=\varphi(x, c_1) \tag{10.8}$$

ёсць агульнае рашэнне раўнання (10.7). Замяніўшы ў левай частକі (10.8) Z адваротна праз y', атрымаем раўнанне:

$$y'=\varphi(x, c_1).$$

Адсюль знаходзім

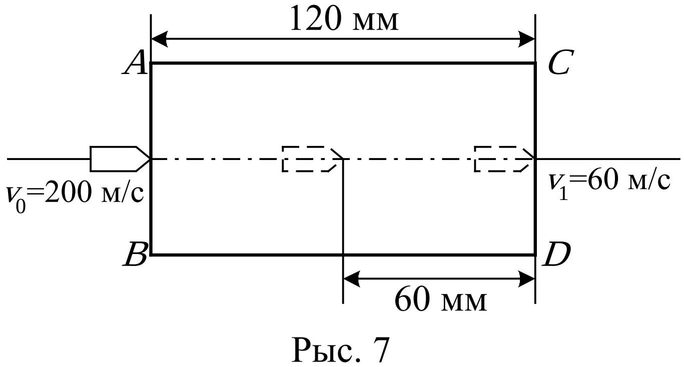
$$y = \int \varphi(x, c_1)dx + c_2,$$

дзе c_1, c_2 — адвольныя канстанты. Гэта і ёсць агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (10.6).

Прыклад 2. Знайсці агульнае рашэнне раўнання

$$y'' - 3\frac{y'}{x} = x.$$

Рашэнне. Мяркуем $y'=Z(x)$ і атрымаем лінейнае раўнанне першага парадку $Z' - 3\frac{Z}{x} = x$. Рашыўшы яго, знодзем $Z(x)=c_1x^3-x^2$. Тады $y'=c_1x^3-x^2$ і $y = c_1\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + c_2$ — шуканае рашэнне.



Рыс. 7

Прыклад 3. Куля ўваходзіць у брус таўшчынёй 12 см з хуткасцю 200 м/с, а вылятае з яго з хуткасцю 60 м/с. Сіла супраціўлення бруса праходжанню кулі прапарцыйная квадрату хуткасці руху (рыс. 7). Знайсці час руху кулі праз брус.

Рашэнне. Унутры бруса ў любы момант t на кулю дзейнічае сіла супраціўлення бруса F. Яна накіравана ў працілеглы руху бок, а па велічыні прапарцыйная квадрату хуткасці руху кулі ў дадзены момант. Такім чынам,

$$F=-kv^2.$$

На падставе другога закону дынамікі, сіла роўная здабытку масы m пункта на паскарэнне a, якое надаецца пункту:

$$F=ma.$$

Параўнаўшы раўнанні, атрымаем:

$$ma=-kv^2. \tag{10.9}$$

Як вядома, хуткасць пункта

$$v=\frac{dS}{dt}, \tag{10.10}$$

а паскарэнне

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2S}{dt^2}. \tag{10.11}$$

Падставім (10.10) і (10.11) у раўнанне (10.9) і атрымаем дыферэнцыяльнае раўнанне руху:

$$\frac{d^2S}{dt^2}=-\frac{k}{m}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2. \tag{10.12}$$

Будзем рашаць раўнанне (10.12) метадам паніжэння парадку раўнання пры дапамозе ўвядзення новай шуканай функцыі:

$$Z(t)=\frac{dS}{dt},$$

$$\frac{dZ}{dt}=\frac{d^2S}{dt^2}.$$

Раўнанне (10.12) прыме выгляд

$$\frac{dZ}{dt}=-\frac{k}{m}Z^2.$$

Атрымалі дыферэнцыяльнае раўнанне са зменнымі, якія можна раздзяліць. Раздзелім зменныя і праінтэгруем:

$$\frac{dZ}{Z^2}=-\frac{k}{m}dt,$$

$$-\frac{1}{Z}=-\frac{k}{m}t+c_1.$$

Заменім у левай частцы Z праз $\frac{dS}{dt}$ і праінтэгруем яшчэ раз:

$$-\frac{dt}{dS}=-\frac{k}{m}t+c_1,$$

$$dS=\frac{dt}{\frac{k}{m}t-c_1},$$

$$S=\frac{m}{k}\ln\left|\frac{k}{m}t-c_1\right|+c_2. \qquad (10.13)$$

Функцыя (10.13) і ёсць агульнае рашэнне раўнання (10.12).

Для знаходжання частковага рашэння вылічым значэнні адвольных канстантаў c_1 і c_2. У адпаведнасці з умовай задачы пры t=0 S=0 і $\frac{dS}{dt}$=200 м/с. Таму будзем мець: $c_1=-\frac{1}{200}$, $c_2=\frac{m}{k}\ln 200$. Калі падставіць знодзеныя значэнні c_1 і c_2 у агульнае рашэнне (10.13), то атрымаем

$$S=\frac{m}{k}\ln\left|\frac{k}{m}t+\frac{1}{200}\right|+\frac{m}{k}\ln 200=\frac{m}{k}\ln\left|\frac{200k}{m}t+1\right|. \qquad (10.14)$$

Гэта ёсць частковае рашэнне, якое вызначае раўнанне руху для разглядаемай задачы.

Рэшым (10.14) адносна t:

$$t=\frac{m}{200k}\left(e^{\frac{kS}{m}}-1\right). \qquad (10.15)$$

Для знаходжання шуканага часу t неабходна ведаць велічыні k і m. Каэфіцыент прапарцыйнасці k вызначым з дадатковай умовы: пры S=12 см = 0,12 м $\frac{dS}{dt}$=60 м/с. Маем:

$$\frac{dS}{dt}=\frac{200}{200\frac{k}{m}t+1},$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{200}{200\frac{k}{m}\left(\frac{m}{200k}\left(e^{\frac{kS}{m}}-1\right)\right)+1}=\frac{200}{e^{\frac{kS}{m}}}.$$

Улічваючы дадатковую ўмову, атрымаем

$$60=\frac{200}{e^{0,12\frac{k}{m}}}, \qquad (10.16)$$

адкуль

$$k=\frac{\ln\frac{10}{3}}{0{,}12}m\approx 10{,}03m\,.$$

Бачым, што k з’яўляецца лінейнай функцыяй і няма неабходнасці ў вызначэнні m, дастаткова знайсці велічыню $e^{\frac{k}{m}}$.

З роўнасці (10.16) вынікае:

$$e^{\frac{k}{m}}=\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{25}{3}}.$$

Падставім лікавыя значэнні k і $e^{\frac{S}{m}}$ у роўнасць (10.15) і атрымаем:

$$t=\frac{m}{200\cdot 10{,}03m}\left(\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{25}{3}\cdot 0{,}12}-1\right)\approx 0{,}00114.$$

Такім чынам, час праходжання кулі праз брус t=0,00114 с.

3. Раўнанне выгляду

$$F(y,\,y',\,y'')=0. \tag{10.17}$$

Гэта раўнанне не змяшчае яўна зменную x.

Уводзім новую функцыю $z(y)$, мяркуючы $y'=z(y)$. Тады

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot z(y)\,.$$

Падставім у раўнанне (10.17) выразы для y' і y'', атрымаем раўнанне першага парадку адносна z як функцыі ад y:

$$F\left(y,\,z,\,z\frac{dz}{dy}\right)=0\,. \tag{10.18}$$

Няхай яго агульнае рашэнне ёсць

$$z=\varphi(y,\,c_1).$$

Паколькі $z=\frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx}=\varphi(y,\,c_1)$. Адсюль $\frac{dy}{\varphi(y,\,c_1)}=dx$. Атрымана раўнанне з раздзеленымі зменнымі, з якога знаходзім агульны інтэграл дадзенага раўнання:

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,\,c_1)}=x+c_2\,,$$

дзе c_1 і c_2 — адвольныя канстанты.

Прыклад 4. Прантэграваць дыферэнцыяльнае раўнанне

$$yy''+(y')^2=1\quad (y>0).$$

Рашэнне. Мяркуючы $y'=x$, $z=z(y)$, маем $y''=\frac{dz}{dy}z$. Таму раўнанне прыме выгляд $y\frac{dz}{dy}z+z^2=1$ ці $yzdz+(z^2-1)dy=0$, адкуль, раздзяліўшы зменныя і здзейсніўшы інтэграванне, знойдзем

$$z=\pm\frac{\sqrt{c_1+y^2}}{y}.$$

Замяніўшы z на y', маем

$$y'=\pm\frac{\sqrt{c_1+y^2}}{y} \text{ ці } \pm\frac{ydy}{\sqrt{c_1+y^2}}=dx.$$

Праінтэграваўшы, атрымаем

$$\pm\sqrt{c_1+y^2}=x+c_2 \text{ або } (x+c_2)^2-y^2=c_1.$$

§11. Агульныя звесткі аб лінейных дыферэнцыяльных раўнаннях n-га парадку

Азначэнне. Раўнанне выгляду

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=f(x), \tag{11.1}$$

дзе функцыі $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$, $f(x)$ непарыўныя на некаторам інтэрвале (a, b), называецца лінейным раўнаннем n-га парадку.

Калі ўвесці аператар $L(y)=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y$, то дыферэнцыяльнае раўнанне (11.1) прыме выгляд:

$$L(y)=f(x). \tag{11.2}$$

Раўнанне (11.1) называецца аднародным, калі функцыя $f(x)$ на інтэрвале (a, b) тоесна роўная нулю. Калі ж функцыя $f(x)$ тоесна не роўная нулю на інтэрвале (a, b), то раўнанне (11.1) называецца не аднародным.

Возьмем адвольны пункт $x_0\in(a, b)$ і адвольны набор лікаў y_0, y_0', y_0'', …, $y_0^{(n-1)}$. Высветлім, ці існуе рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (11.1), якое задавальняе наступным пачатковым умовам:

$$\begin{cases} y=y_0, \\ y'=y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \quad \text{пры } x=x_0. \end{cases} \tag{11.3}$$

Будзем карыстацца тэарэмай пра існаванне і адзінасць рашэння дыферэнцыяльнага раўнання n-га парадку. Каб скарыстаць гэтую тэарэму, перапішам раўнанне ў выглядзе

$$y^{(n)}=-a_1(x)y^{(n-1)}-\ldots-a_n(x)y+f(x)=F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Заўважым, што ў наваколі пункта $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ для функцыі $F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ выкананы ўсе ўмовы упамянутай вышэй тэарэмы. Сапраўды, паколькі функцыі $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$, $f(x)$ непарыўныя на інтэрвале (a, b), то ў некаторым наваколлі пункта $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ функцыя $F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ непарыўная і мае абмежаваныя частковыя вытворныя:

$$F'_y=-a_n(x),\quad F'_{y'}=-a_{n-1}(x),\ \ldots,\quad F'_{y^{(n-1)}}=-a_1(x).$$

Таму існуе адзінае рашэнне разглядаемага дыферэнцыяльнага раўнання (11.1), якое задавальняе пачатковым умовам (11.3). Прычым гэта рашэнне існуе на інтэрвале (a, b).

Такім чынам, пытанне пра існаванне рашэння дыферэнцыяльнага раўнання (11.1), якое задавальняе пачатковым умовам (11.3) высветлена.

Атрыманы вынік можна сфармуляваць наступным чынам: у кожным пункце абсягу D, які вызначаецца няроўнасцямі $a<x<b$, $-\infty<y<+\infty$, $-\infty<y'<+\infty$, ..., $-\infty<y^{(n-1)}<+\infty$, мае месца існаванне і адзінасць рашэння задачы Кашы.

§12. Лінейныя аднародныя дыферэнцыяльныя раўнанні n-га парадку

Разгледзем лінейнае аднароднае дыферэнцыяльнае раўнанне n-га парадку

$$L(y)=0, \tag{12.1}$$

дзе $L(y)=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y$ — лінейны дыферэнцыяльны аператар.

Спачатку вывучым некаторыя ўласцівасці лінейнага дыферэнцыяльнага аператара.

1^0. $L(cy)=cL(y)$.

2^0. $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)$.

3^0. $L\left(\sum_{k=1}^{n}c_k y_k\right)=\sum_{k=1}^{n}c_k L(y_k)$.

Праўдзівасць уласцівасці 1^0 вынікае з таго, што канстанту можна выносіць за знак вытворнай. Уласцівасць 2^0 вынікае з таго, што вытворная сумы роўная суме вытворных. Уласцівасць 3^0 лёгка даказаць пры дапамозе метаду матэматычнай індукцыі, калі скарыстаць уласцівасці 1^0 і 2^0.

У §11 мы даказалі, што для любога пункта x_0 інтэрвала (a, b) і любога набору лікаў y_0, y_0', y_0'', …, $y_0^{(n-1)}$ існуе адзінае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (12.1), якое задавальняе пачатковым умовам

$$\begin{cases} y = y_0, \\ y' = y_0', \\ y'' = y_0'', \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{пры} \;\; x = x_0. \end{cases} \tag{12.2}$$

Вынікам гэтага з’яўляецца наступная тэарэма.

Тэарэма 1. Няхай функцыя $y=y(x)$ з’яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (12.1), якое задавальняе нулявым пачатковым умовам

$$\begin{cases} y = 0, \\ y' = 0, \\ y'' = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = 0 \quad \text{пры} \;\; x = x_0 \in (a, b). \end{cases}$$

Тады функцыя $y=y(x)$ тоесна роўная нулю на інтэрвале (a, b).

Доказ. Разгледзім функцыю $y(x)=0$ $\forall x \in (a, b)$. Лёгка заўважыць, што гэта функцыя задавальняе раўнанню (12.1) і нулявым пачатковым умовам. Паводле тэарэмы пра існаванне і адзінасць рашэння дыферэнцыяльнага раўнання іншых рашэнняў раўнання (12.1) з нулявымі пачатковымі ўмовамі няма.

Тэарэма 2. Няхай функцыі y_1, y_2, …, y_n з’яўляюцца рашэннямі дыферэнцыяльнага раўнання (12.1). Тады для любых канстантаў C_1, C_2, …, C_n функцыя

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n \tag{12.3}$$

з’яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (12.1).

Доказ. $L(y) = L(\sum_{k=1}^{n} C_k y_k) = \sum_{k=1}^{n} C_k L(y_k) = 0.$

Калі мы ўспомнім азначэнне агульнага рашэння дыферэнцыяльнага раўнання (12.1) n-га парадку, дык заўважым, што яно змяшчае n адвольных канстантаў і пры разнастайных значэннях гэтых канстантаў з’яўляецца рашэннем раўнання (12.1).

Натуральна ўзнікае думка, што функцыя (12.3) з’яўляецца агульным рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (12.1). Але нажаль, не заўсёды выраз (12.3) дае агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (12.1). Да вывучэння ўмоў, пры якіх (12.3) дае агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (12.1), мы і пяройдзем.

Азначэнне 1. Функцыі $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называюцца лінейна залежнымі на інтэрвале (a, b), калі існуюць адначасова няроўныя нулю канстанты $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ($C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2 \neq 0$), што $C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n\equiv 0$ на інтэрвале (a, b).

У працілеглым выпадку функцыі $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называюцца лінейна незалежнымі.

Азначэнне лінейнай залежнасці функцый эквівалентна наступнаму сцвярджэнню: прынамсі адна з функцй $y_1, y_2, \ldots, y_n$ з'яўляецца лінейнай камбінацыяй астатніх.

Дакажам тэарэму, якую называюць дастаковай умовай лінейнай незалежнасці функцый.

Тэарэма 3. Няхай дадзены функцыі $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Калі дэтэрмінант Вронскага

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n\text{-}1)} & y_2^{(n\text{-}1)} & \cdots & y_n^{(n\text{-}1)} \end{vmatrix}$$

адрозны ад нуля прынамсі ў адным пункце інтэрвалу (a, b), то функцыі $y_1, y_2, \ldots, y_n$ з'яўляюцца лінейна незалежнымі на інтэрвале (a, b).

Доказ. Доказ будзем ажыццяўляць метадам ад працілеглага і для большай нагляднасці абмяжуемся выпадкам n=3.

Маем тры функцыі y_1, y_2, y_3. Няхай у некаторым пункце $x_0\in(a, b)$ $W(x_0)\neq 0$. Дапусцім, што гэтыя функцыі з'яўляюцца лінейна залежнымі на інтэрвале (a, b). Сцвярджэнне, што функцыі лінейна залежныя, эквівалентна таму, што адна з функцый з'яўляецца лінейнай камбінацыяй астатніх. Няхай, напрыклад, $y_3=C_1y_1+C_2y_2$. Складзем дэтэрмінант Вронскага

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & C_1y_1 + C_2y_2 \\ y_1' & y_2' & C_1y_1' + C_2y_2' \\ y_1'' & y_2'' & C_1y_1'' + C_2y_2'' \end{vmatrix}.$$

У гэтым дэтэрмінанце трэці слупок з'яўляецца лінейнай камбінацыяй першых двух. Значыць $W(x)$=0, што супярэчыць таму, што $W(x_0)\neq 0$.

Тэарэма 4. Калі функцыі $y_1, y_2, \ldots, y_n$ з'яўляюцца лінейна незалежнымі рашэннямі дыферэнцыяльнага раўнання (12.1), то дэтэрмінант Вронскага адрозны ад нуля ў кожным пункце інтэрвала (a, b).

Доказ. Лічым, што функцыі $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінейна незалежныя, але існуе такі пункт $x_0\in(a, b)$, што $W(x_0)=0$.

Разгледзім функцыю $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$. Пры любых значэннях канстантаў $C_1, C_2, \ldots, C_n$ гэтая функцыя паводле тэарэмы 2 з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (12.1). Паспрабуем падабраць канстанты $C_1, C_2, \ldots,$

C_n так, каб функцыя y задавальняла ў пункце x_0 нулявым пачатковым умовам, г. зн.

$$\begin{aligned}
&y(x_0)=C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+\ldots+C_ny_n(x_0)=0,\\
&y'(x_0)=C_1y'_1(x_0)+C_2y'_2(x_0)+\ldots+C_ny'_n(x_0)=0, \qquad (12.4)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y^{(n-1)}(x_0)=C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0.
\end{aligned}$$

Для таго, каб функцыя y задавальняла нулявым пачатковым умовам, трэба, каб канстанты $C_1, C_2, \ldots, C_n$ былі рашэннямі лінейнай алгебраічнай сістэмы (12.4).

Заўважым, што галоўны дэтэрмінант гэтай сістэмы супадае з дэтэрмінантам Вронскага $W(x_0)$ і, значыць, роўны нулю. Таму існуюць ненулявыя рашэнні $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n$ ($\tilde{C}_1^2+\tilde{C}_2^2+\ldots+\tilde{C}_n^2\neq 0$) сістэмы (12.4).

Разгледзім функцыю $\tilde{y}=\tilde{C}_1y_1+\tilde{C}_2y_2+\ldots+\tilde{C}_ny_n$. Гэтая функцыя з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (12.1) і задавальняе ў пункце x_0 нулявым пачатковым умовам. Значыць, гэтая функцыя паводле тэарэмы 1 на інтэрвале (a, b) тоесна роўная нулю. Адсюль вынікае, што функцыі $y_1, y_2, \ldots, y_n$ з'яўляюцца лінейна залежнымі на інтэрвале (a, b). Атрымалі супярэчнасць.

Пяройдзем зараз да тэарэмы, якая апісвае структуру агульнага рашэння дыферэнцыяльнага раўнання (12.1).

Тэарэма 5. Калі $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — якія-небудзь n лінейна незалежных рашэнняў дыферэнцыяльнага раўнання (12.1), то

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \qquad (12.5)$$

дзе $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – адвольныя канстанты, ёсць агульнае рашэнне гэтага раўнання ў абсягу D: $a<x<b$, $-\infty<y<+\infty$, $-\infty<y'<+\infty$, …, $-\infty<y^{(n-1)}<+\infty$.

Доказ. Будзем карысацца азначэннем агульнага рашэння, якое было сфармулявана ў §9. У папярэднім параграфе было даказана наступнае: якімі б ні былі пачатковыя ўмовы

$$\begin{aligned}
&y=y_0,\\
&y'=y_0'\\
&y''=y_0'' \qquad (12.2)\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \text{ пры } x=x_0,
\end{aligned}$$

дзе x_0 — любы пункт інтэрвалу (a, b), заўсёды існуе адзінае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (12.1), якое задавальняе гэтым пачатковым умовам. Гэта сведчыць аб тым, што ў кожным пункце абсягу D задача Кашы мае адзінае рашэнне.

Засталося даказаць, што функцыя (12.2) у абсягу D задавальняе наступным дзвюм умовам:

1^0. Пры любых значэннях $C_1, C_2, \ldots, C_n$ функцыя (12.5) з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (12.1).

Гэта было даказана ў тэарэме 2.

2^0. Возьмем адвольныя пачатковыя ўмовы (12.2) і дакажам, што пры належным падборы C_1, C_2, …, C_n функцыя (12.5) абарачаецца ў рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (12.1), якое задавальняе гэтым пачатковым умовам.

Калі падставіць ўмовы (12.2) у (12.5), то атрымаем

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n\text{-}1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n\text{-}1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n\text{-}1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

З гэтай сістэмы будзем знаходзіць невядомыя C_1, C_2, …, C_n. Паколькі дэтэрмінант

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

гэтай сістэмы паводле тэарэмы 4 адрозны ад нуля, то дадзеная сістэма мае адзінае рашэнне $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n$, якое можна знайсці, напрыклад, па формулах Крамера.

Калі падставіць гэтае рашэнне ў (12.5), то атрымаем рашэнне $y = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + \ldots + \tilde{C}_n y_n$ дыферэнцыяльнага раўнання (12.1), якое задавальняе зададзеным пачатковым умовам (12.2). Умову 2^0 даказалі, а разам з ёю закончылі і доказ тэарэмы 5.

Прыклад. Разгледзім дыферэнцыяльнае раўнанне

$$y''=0.$$

Лёгка пераканацца ў тым, што рашэннямі гэтага раўнання з’яўляюцца функцыі $y_1=1$, $y_2=x$. Прычым гэтыя рашэнні будуць лінейна незалежнымі. Паводле тэарэмы 5 функцыя $y=C_1+C_2x$, дзе C_1, C_2 — адвольныя канстанты, будзе рашэннем раўнання $y''=0$.

Заўвага. Лінейна незалежныя рашэнні y_1, y_2, …, y_n дыферэнцыяльнага раўнання (12.1) з’яўляюцца, відавочна, частковымі рашэннямі гэтага раўнання, бо яны атрымліваюцца з агульнага рашэння (12.5) пры канкрэтных значэннях адвольных канстантаў.

§13. Лінейныя аднародныя дыферэнцыяльныя раўнанні другога парадку са сталымі каэфіцыентамі

Разгледзім лінейнае аднароднае дыферэнцыяльнае раўнанне другога парадку са сталымі каэфіцыентамі

$$L(y)=y''+a_1y'+a_2y=0, \qquad (13.1)$$

дзе a_1, a_2 — канстанты. Знойдзем агульнае рашэнне гэтага раўнання. Для гэтага спачатку знойдзем два лінейна незалежныя частковыя рашэнні y_1, y_2, а затым агульнае рашэнне атрымаем па формуле $y=C_1y_1+C_2y_2$, дзе C_1, C_2 — адвольныя канстанты. Такім чынам, спачатку знойдзем два лінейна незалежныя частковыя рашэнні дыферэнцыяльнага раўнання (13.1).

Частковыя рашэнні дыферэнцыяльнага раўнання (13.1) будзем шукаць у выглядзе $y=e^{kx}$, дзе k — некаторы лік, пакуль невядомы, але які неабходна абраць так, каб гэта функцыя задавальняла раўнанню (13.1). Падставім функцыю $y=e^{kx}$ у левую частку раўнання (13.1) і атрымаем: $e^{kx}(k^2+a_1k+a_2)$. Паколькі $e^{kx}\neq 0$, то гэты выраз будзе роўным нулю тады і толькі тады, калі лік k будзе коранем наступнага раўнання:

$$k^2+a_1k+a_2=0. \qquad (13.2)$$

Раўнанне (13.2) называецца характарыстычным раўнаннем дыферэнцыяльнага раўнання (13.1). З адзначанага вынікае, што функцыя $y=e^{kx}$ задавальняе дыферэнцыяльнаму раўнанню (13.1), г. зн. з'яўляецца яго рашэннем, тады і толькі тады, калі лік k будзе коранем характарыстычнага раўнання (13.2).

Магчымы тры выпадкі:

1. Характарыстычнае раўнанне (13.2) мае два розных рэчаісныя карані k_1 і k_2. Тады $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$ — два рашэнні раўнання (13.1). Прычым гэтыя рашэнні з'яўляецца лінейна-незалежнымі, бо

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix}=e^{(k_2+k_1)x}(k_2-k_1)\neq 0.$$

Таму агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (13.1) у разглядаемым выпадку будзе мець выгляд

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x},$$

дзе C_1, C_2 — адвольныя канстанты.

Прыклад 1. Знайсці агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання

$$y''-3y'+2y=0.$$

Рашэнне. Складзем характарыстычнае раўнанне: $k^2-3k+2=0$. Рашыўшы гэтае квадратовае раўнанне, знаходзім, што $k_1=1$, $k_2=2$. Карані характарыстычнага раўнання — рэчаісныя і не супадаюць. Гэтым караням адпавядаюць частковыя лінейна-незалежныя рашэнні $y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$. Таму агульнае рашэнне зыходнага дыферэнцыяльнага раўнання будзе мець выгляд:

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x},$$

дзе C_1, C_2 — адвольныя канстанты.

2. Характарыстычнае раўнанне (13.2) мае два роўныя рэчаісныя карані $k_1=k_2$. У гэтым выпадку па формуле $y=e^{kx}$ мы атрымаем толькі адно рашэнне $y_1=e^{k_1x}$ дыферэнцыяльнага раўнання (13.1).

Дакажам, што рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання будзе і функцыя $y_2=xe^{k_1x}$. Калі падставіць гэту функцыю ў левую частку раўнання (13.1), то атрымаем:

$$(xe^{k_1x})'' + a_1(xe^{k_1x})' + a_2xe^{k_1x} = (e^{k_1x}(1+k_1x))' + a_1e^{k_1x}(1+k_1x) + a_2xe^{k_1x} =$$
$$= e^{k_1x}(k_1 + k_1^2x + k_1) + a_1e^{k_1x}(1+k_1x) + a_2xe^{k_1x} = e^{k_1x}((k_1^2 + a_1k_1 + a_2)x + (2k_1 + a_1)) = 0,$$
бо $k_1^2 + a_1k_1 + a_2 = 0,\ 2k_1 + a_1 = 0.$

Такім чынам, мы даказалі, што функцыя $y_2 = xe^{k_1x}$ з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (13.1).

Мы знайшлі два рашэнні дыферэнцыяльнага раўнання (13.1): $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = xe^{k_1x}$. Лёгка пераканацца ў тым, што гэтыя рашэнні з'яўляюцца лінейна незалежнымі, бо

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & xe^{k_1x} \\ (e^{k_1x})' & (xe^{k_1x})' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таму агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (13.1) у разглядаемым выпадку мае выгляд:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x},$$

дзе C_1, C_2 — адвольныя канстанты.

Прыклад 2. Знайсці агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання

$$y''-4y'+4y=0.$$

Рашэнне. Складзем характарыстычнае раўнанне: $k^2-4k+4=0$. Карані гэтага характарыстычнага раўнання —рэчаісныя і супадаюць: $k_1=k_2=2$. Таму агульнае рашэнне зыходнага дыферэнцыяльнага раўнання будзе мець выгляд:

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x},$$

дзе C_1, C_2 — адвольныя канстанты.

3. Характарыстычнае раўнанне (13.2) мае два спалучаныя камплексныя карані $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$. Дакажам, што ў гэтым выпадку рашэннямі дыферэнцыяльнага раўнання (13.1) будуць наступныя функцыі:

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x, \tag{13.3}$$
$$y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{13.4}$$

Здзейснім праверку, напрыклад, для функцыі (13.3). Папярэдне знойдзем y' і y'':

$$y_1'=\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{13.5}$$
$$y_2''=\alpha^2e^{\alpha x}\cos\beta x-2\alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x-\beta^2e^{\alpha x}\cos\beta x. \tag{13.6}$$

Падставім выразы (13.3), (13.5), (13.6) у левую частку дыферэнцыяльнага раўнання (13.1), атрымаем:

$$e^{\alpha x}[(\alpha^2-\beta^2+\alpha a_1+a_2)\cos\beta x-(2\alpha\beta+\beta a_1)\sin\beta x].$$

Калі мы дакажам, што

$$\alpha^2-\beta^2+\alpha a_1+a_2=0,$$
$$2\alpha\beta+\beta a_1=0, \tag{13.7}$$

то будзе даказана, што функцыя (13.3) задавальняе дыферэнцыяльнаму раўнанню (13.1), г. зн. з'яўляецца яго рашэннем. Такім чынам, засталося даказаць роўнасці (13.7). Разгледзім гэтае пытанне.

Паколькі $\alpha+i\beta$ з'яўляецца коранем характарыстычнага раўнання (13.2), таму мае месца роўнасць

$$(\alpha+i\beta)^2+a_1(\alpha+i\beta)+a_2=0,$$

г. зн. $(\alpha^2-\beta^2+\alpha a_1+a_2)+\mathrm{i}(2\alpha\beta+\beta a_1)=0$.

Як вядома, камплексны лік роўны нулю тады і толькі тады, калі роўныя нулю рэчаісная і ўяўная часткі гэтага ліку, г. зн. калі маюць месца роўнасці (13.7). Даказаўшы роўнасці (13.7), мы тым самым даказалі той факт, што функцыя (13.3) з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (13.1). Аналагічна даказваецца, што і функцыя (13.4) з'яўляецца рашэннем гэтага раўнання.

Лёгка даказаць, што рашэнні (13.3) і (13.4) дыферэнцыяльнага раўнання (13.1) з'яўляюцца лінейна незалежнымі. Таму агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (13.1) у разглядаемым выпадку мае выгляд:

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

дзе C_1, C_2 — адвольныя канстанты.

Прыклад 3. Знайсці агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання

$$y''-4y'+13y=0.$$

Рашэнне. Каранямі характарыстычнага раўнання з'яўляюцца спалучаныя камплексныя лікі $k_{1,2}=2\pm i3$. Таму агульнае рашэнне зыходнага дыферэнцыяльнага раўнання мае выгляд:

$$y=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\sin 3x,$$

дзе C_1, C_2 — адвольныя канстанты.

§14. Лінейныя неаднародныя дыферэнцыяльныя раўнанні n-га парадку

Разгледзім лінейнае неаднароднае дыферэнцыяльнае раўнанне n-га парадку

$$L(y)=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=f(x), \qquad (14.1)$$

дзе $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$, $f(x)\not\equiv 0$ — функцыі, непарыўныя на інтэрвале (a, b).

Будзем займацца знаходжаннем агульнага рашэння такога раўнання. Поруч з раўнаннем (14.1) разгледзім адпаведнае яму аднароднае дыферэнцыяльнае раўнанне n-га парадку

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=0 \qquad (14.2)$$

Тэарэма 1. Сума якога-небудзь частковага рашэння неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (14.1) і агульнага рашэння адпаведнага яму аднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (14.2) ёсць агульнагае рашэнне дадзенага неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (14.1). Прычым гэта агульнае рашэнне разглядаецца ў абсягу D: $a<x<b$, $-\infty<y<+\infty$, $-\infty<y'<+\infty$, …, $-\infty<y^{(n-1)}<+\infty$.

Доказ. Няхай Y — якое-небудзь частковае рашэнне неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (14.1), а $\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$, дзе C_1, C_2, …, C_n — адвольныя канстанты, y_1, y_2, …, y_n — лінейна незалежныя рашэнні раўнання (14.2), — агульнае рашэнне раўнання (14.2). Патрэбна даказаць, што

$$y=\bar{y}+Y \tag{14.3}$$

г. зн. $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n+Y$ — ёсць агульнае рашэнне неаднароднага раўнання (14.1) у абсягу D.

Будзем карыстацца азначэннем агульнага рашэння дыферэнцыяльнага раўнання з §9 і разважаць аналагічна таму, як і пры доказе тэарэмы 5 §12.

Спачатку адзначым, што ў кожным пункце абсягу D задача Кашы мае адзінае рашэнне. Цяпер дакажам, што функцыя (14.3) задавальняе наступным дзвюм умовам:

1^0. Пры любых значэннях C_1, C_2, …, C_n функцыя (14.3) з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (14.1). Сапраўды,

$$L(\bar{y}+Y)=L(\bar{y})+L(Y)=0+f(x)=f(x).$$

2^0. Возьмем адвольныя пачатковыя ўмовы

$$\begin{aligned}&y=y_0,\\&y'=y_0',\\&\ldots\ldots\ldots\\&y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \text{ пры } x=x_0\in(a,\, b)\end{aligned}$$

і дакажам, што пры належным падборы C_1, C_2, …, C_n функцыя (14.3) абарачаецца ў рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (14.1), якое задавальняе гэтым пачатковым умовам.

Гэта можна зрабіць аналагічным чынам, як пры доказе тэарэмы 5 §12.

Тэарэму 1 даказалі цалкам.

Такім чынам, паводле даказанай тэарэмы 1 агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (14.1) ўяўляе сабой суму агульнага рашэння адпаведнага аднароднага дыферэнцыяльнага раўнання і частковага рашэння неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання.

Узнікае пытанне, як знайсці частковае рашэнне дадзенага неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (14.1). Рашэнне гэтай задачы можна здейсніць метадам варыяцыі адвольных кантантаў.

Вывучым гэты метад у выпадку лінейнага неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання 2-га парадку.

Няхай дадзена лінейнае неаднароднае дыферэнцыяльнае раўнанне другога парадку:

$$L(y)=y''+a_1y'+a_2y=f(x). \tag{14.4}$$

Няхай вядома агульнае рашэнне

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \tag{14.5}$$

адпаведнага яму аднароднага дыферэнцыяльнага раўнання

$$L(y)=0. \tag{14.6}$$

У формуле (14.5) C_1, C_2 — адвольныя канстанты, y_1, y_2 — лінейна незалежныя рашэнні раўнання (14.6).

Рашэнне лінейнага неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання будзем шукаць у аналагічным выглядзе, г.зн. у выглядзе

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2, \tag{14.7}$$

дзе $C_1(x)$, $C_2(x)$ — невядомыя функцыі.

Будзем шукаць такія функцыі $C_1(x)$, $C_2(x)$, каб функцыя (14.7) была рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (14.4). У ходзе гэтых пошукаў мы будзем дыферэнцаваць функцыю (14.7). Пры гэтым мы будзем карыстацца адвольнасцю $C_1(x)$ і $C_2(x)$, каб атрымаць больш простыя выразы.

Прадэферэнцаваўшы функцыю (14.7), атрымаем:

$$y'=C_1(x)y_1'+C_2(x)y_2'+(C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2).$$

Возьмем $C_1(x)$ і $C_2(x)$ такім чынам, каб

$$C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0. \tag{14.8}$$

Тады выраз для y' прыме больш просты выгляд:

$$y'=C_1(x)y_1'+C_2(x)y_2'. \tag{14.9}$$

Адсюль вынікае, што

$$y''=C_1(x)y_1''+C_2(x)y_2''+(C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'). \tag{14.10}$$

Падставіўшы (14.7), (14.9), (14.10) у дыферэнцыяльнае раўнанне (14.4), атрымаем:

$$C_1(x)L(y_1)+C_2(x)L(y_2)+C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x),$$

г. зн.

$$C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x). \tag{14.11}$$

Такім чынам, для знаходжання $C_1(x)$ і $C_2(x)$ мы атрымалі наступную сістэму раўнанняў:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0, \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x). \end{cases} \tag{14.12}$$

Дэтэрмінант гэтай сістэмы

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

паводле тэарэмы 4 параграфа 12. Таму сістэма (14.12) мае адзінае рашэнне, якое можна знайсці па формулах Крамера:

$$C_1'=\varphi_1(x), \text{ дзе } \varphi_1(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}};$$

$$C_2'=\varphi_2(x), \text{ дзе } \varphi_2(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}.$$

Адсюль мы можам знайсці шуканыя функцыі $C_1(x)$ і $C_2(x)$:

$$C_1(x)=\int \varphi_1(x)dx + C_1,$$

$$C_2(x)=\int \varphi_2(x)dx + C_2,$$

дзе C_1, C_2 — адвольныя канстанты.

Падставіўшы гэтыя выразы ў (14.7), атрымаем рашэнне неаднароднага раўнання (14.4):

$$y = C_1 y_1 + C_2 + y_1\int \varphi_1(x)dx + y_2\int \varphi_2(x)dx. \qquad (14.13)$$

Пры пэўных значэннях C_1 і C_2 функцыя (14.13) будзе частковым рашэннем лінейнага неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (14.4). Калі ж C_1 і C_2 з'яўляюцца адвольнымі канстантамі, то функцыя (14.13) будзе агульным рашэннем раўнання (14.4).

Прыклад. Знайсці агульнае рашэнне неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання

$$y''-3y'+2y=e^{3x}. \qquad (14.14)$$

Рашэнне. Спачатку разгледзім адпаведнае раўнанню (14.14) аднароднае дыферэнцыяльнае раўнанне

$$y''-3y'+2y=0 \qquad (14.15$$

і знойдзем яго агульнае рашэнне $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$, дзе C_1, C_2 — адвольныя канстанты.

Агульнае рашэнне неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (14.14) мае выгляд:

$$y=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{2x}, \qquad (14.16)$$

дзе функцыі $C_1(x)$ і $C_2(x)$ знаходзяцца з сістэмы раўнанняў:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)2e^{2x} = e^{3x}. \end{cases}$$

Калі рашыць гэтую сістэму, то атрымаем:

$$C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ e^{3x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}}=-e^{2x},$$

$$C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}}=e^x.$$

Адсюль вынікае, што

$$C_1(x)=-\frac{1}{2}e^{2x}+C_1,\ C_2(x)=e^x+C_2.$$

Такім чынам, функцыя

$$y=\mathrm{C}_1e^x+C_2e^{2x}+e^{3x}-\frac{1}{2}e^{3x}=\mathrm{C}_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x},$$

дзе C_1, C_2 — адвольныя канстанты, з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (14.14).

Дакажам яшчэ адну тэарэму, якую часта выкарыстоўваюць на практыцы.

Тэарэма 2. Няхай дадзена дыферэнцыяльнае раўнанне

$$L(y)=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=f_1(x)+f_2(x). \tag{14.17}$$

Калі функцыя y_1 з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання

$$L(y)=f_1(x), \tag{14.18}$$

а функцыя y_2 з'яўляецца рашэннем раўнання

$$L(y)=f_2(x), \tag{14.19}$$

то функцыя $y=y_1+y_2$ будзе рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (14.17).

Доказ. Па ўмове тэарэмы $L(y_1)=f_1(x)$ і $L(y_2)=f_2(x)$, бо y_1, y_2 — рашэнні раўнанняў (14.18) і (14.19) адпаведна. Адсюль атрымліваем, што $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)=f_1(x)+f_2(x)$, што сведчыць аб тым, што функцыя $y=y_1+y_2$ з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (14.17).

§15. Лінейныя неаднародныя дыферэнцыяльныя раўнанні другога парадку са сталымі каэфіцыентамі і спецыяльнай правай часткай

Няхай дадзена лінейнае неаднароднае дыферэнцыяльнае раўнанне другога парадку са сталымі каэфіцыетамі:

$$L(y)=y''+a_1y'+a_2y=f(x). \tag{15.1}$$

Разгледзім таксама адпаведнае яму аднароднае дыферэнцыяльнае раўнанне

$$L(y)=y''+a_1y'+a_2y=0. \tag{15.2}$$

Калі k_1 і k_2 — карані характарыстычнага раўнання

$$\varphi(x)\equiv k^2+a_1k+a_2=0, \tag{15.3}$$

то агульнае рашэнне у раўнання (15.2) запісваецца ў адным з наступных трох выглядаў:

1) $y=C_1(x)e^{k_1x}+C_2(x)e^{k_2x}$, калі k_1 і k_2 рэчаісныя і $k_1\neq k_2$;

2) $y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$, калі $k_1=k_2$;

3) $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$, калі $k_1=\alpha+\beta i$ і $k_2=\alpha-i\beta$ ($\beta\neq 0$).

Разгледзім пытанне знаходжання агульнага рашэння лінейнага неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (15.1). Гэта можна зрабіць пры дапамозе метаду варыяцыі адвольных канстантаў. Калі правая частка дыферэнцыяльнага раўнання (15.1) мае спецыяльны выгляд, то гэта можна зрабіць і іншымі шляхамі.

Як было паказана ў тэарэме 1 параграфа 14, агульнае рашэнне неаднароднага раўнання (15.1) знаходзіцца па формуле

$$y=\bar{y}+Y,$$

дзе $\bar{y}$ — агульнае рашэнне адпаведнага аднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (15.2), Y — якое-небудзь частковае рашэнне неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (15.1). Агульнае рашэнне $\bar{y}$ аднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (15.2) мы знаходзіць умеем. Яно вызначаецца адной з формулаў 1)–3). Функцыю Y можна знайсці метадам нявызначаных каэфіцыентаў у наступных выпадках:

1. $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, дзе $P_n(x)$ — мнагасклад ступені n.

Калі α не з’яўляецца коранем характарыстычнага раўнання (15.3), то мяркуюць $Y=e^{\alpha x}Q_n(x)$ дзе $Q_n(x)$ — мнагасклад ступені n з нявызначанымі каэфіцыентамі.

Калі α з’яўляецца коранем характарыстычнага раўнання (15.3), то $Y=x^r e^{\alpha x}Q_n(x)$ дзе r — кратнасць кораня α ($r=1$ або $r=2$).

2. $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$, дзе $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ — мнагасклады ступеняў n і m адпаведна.

Калі $\varphi(\alpha\pm\beta i)\neq 0$, то мяркуюць

$$Y=e^{\alpha x}(S_N(x)\cos\beta x+T_N(x)\sin\beta x),$$

дзе $S_N(x)$ і $T_N(x)$ — мнагасклады ступені $N=\max(n, m)$.

Калі $\varphi(\alpha\pm\beta i)=0$, то

$$Y=xe^{\alpha x}(S_N(x)\cos\beta x+T_N(x)\sin\beta x).$$

Прыклад. Знайсці агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання

$$y''-7y'+10y=x^2. \qquad (15.4)$$

Рашэнне. Характарыстычнае раўнанне $k^2-7k+10=0$ мае карані $k_1=2$ і $k_2=5$.

Агульнае рашэнне адпаведнага аднароднага дыферэнцыяльнага раўнання вызначаецца формулай

$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$$

Правая частка (15.4) мае выгляд: $f(x)=x^2\equiv e^{\alpha x}P_n(x)$. Тут $\alpha=0$, $n=2$. Значыць, $Y=Ax^2+Bx+C$.

Прадыферэнцаваўшы функцыю Y два разы і падставіўшы ў дадзенае раўнанне выразы для Y, Y', Y'', атрымаем:

$$10Ax^2+(10B-14A)x+(2A-7B+10C)=x^2,$$

адкуль $10A=1$, $10B-14A=0$, $2A-7B+10C=0$. Рашыўшы атрыманую сістэму раўнанняў, знаходзім:

$$A=0{,}1,\ \ B=0{,}14,\ \ C=0{,}078,$$

таму

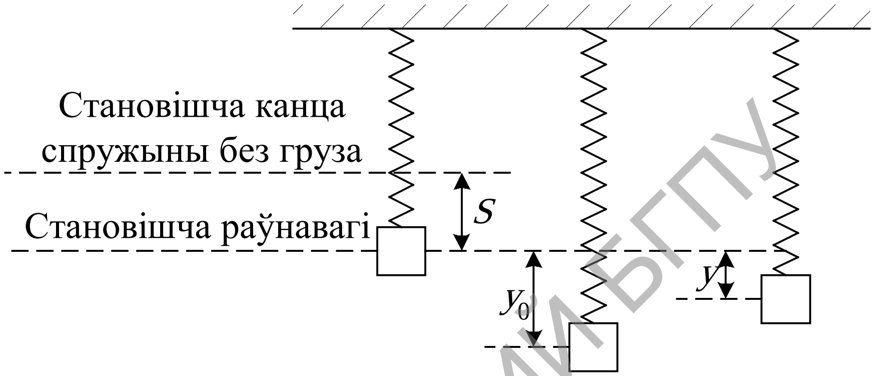
$$Y=0{,}1x^2+0{,}14x+0{,}078.$$

Агульнае рашэнне дадзенага дыферэнцыяльнага раўнання (15.4) мае наступны выгляд:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}+0{,}1x^2+0{,}14x+0{,}078,$$

дзе C_1, C_2 — адвольныя канстанты.

§16. Свабодныя і вымушаныя ваганні. Рэзананс



Рыс. 8

Няхай цела масы m падвешана на спружыне, адзін канец якой нярухома замацаваны. У становішчы раўнавагі вага цела ўраўнаважваецца пругкай сілай спружыны, якая па закону Гука прапарцыйная даўжыні адрэзка S, на які расцягнулася спружына пад дзеяннем вагі цела:

$$mg=cS. \tag{16.1}$$

Каэфіцыент прапарцыйнасці c называецца каэфіцыентам жорсткасці спружыны.

Выведзем цела са становішча раўнавагі, надаўшы яму перамяшчэнне, і адпусцім яго. Цела пачне рухацца (чыніць свабодныя ваганні). Складзем раўнанне руху.

Няхай y — адхіленне цела ад становішча раўнавагі ў момант часу t. У кожны момант часу t на цела будуць дзейнічаць наступныя сілы:

1) вага цела mg;

2) пругкая сіла спружыны $-c(y+S)$;

3) сіла супраціўлення асяроддзя, прапарцыйная хуткасці руху: $-\bar{c}\,y'$.

Такім чынам, у кожны момант часу t на цела дзейнічае сіла

$$F=mg-c(y+S)-\bar{c}\,y'. \tag{16.2}$$

Паводле другога закона Ньютана

$$F=my'', \tag{16.3}$$

дзе y'' — паскарэнне. З роўнасцяў (16.2) і (16.3) атрымліваем:

$$my''=mg-c(y+S)-\bar{c}\,y',$$

г. зн.

$$my''+\bar{c}\,y'+cy=0. \tag{16.4}$$

Дыферэнцыяльнае раўнанне (16.4) называецца дыферэнцыяльным раўнаннем свабодных ваганняў. Шуканай функцыяй з'яўляецца адхіленне $y(t)$.

Калі на цела, акрамя адзначаных вышэй сіл, дзейнічае яшчэ некаторая знешняя сіла $F_1(t)$, якая залежыць ад часу, то атрымаем наступнае раўнанне:

$$my''+\bar{c}\,y'+cy=F_1. \tag{16.5}$$

Дыферэнцыяльнае раўнанне (16.5) называецца дыферэнцыяльным раўнаннем вымушаных ваганняў.

Вывучым спачатку дыферэнцыяльнае раўнанне свабодных ваганняў (16.4). Падзяліўшы абедзве часткі гэтага раўнання на m, атрымаем:

$$y''+2py'+\omega^2y=0, \tag{16.6}$$

дзе $2p=\dfrac{\bar{c}}{m}$, $\omega^2=\dfrac{c}{m}$. Дыферэнцыяльнае раўнанне (16.6) ёсць лінейнае аднароднае дыферэнцыяльнае раўнанне другога парадку са сталымі каэфіцыентамі. Праінтэгруем яго.

Запішам характарыстычнае раўнанне

$$k^2+2pk+\omega^2=0$$

і знойдзем карані $k_{1,2}=-p\pm\sqrt{p^2-\omega^2}$ гэтага раўнання.

1. Няхай $p^2<\omega^2$, г. зн. супраціўленне асяроддзя малое. Гэты выпадак найбольш часта сустракаецца ў механіцы.

Абазначыўшы $\omega_1=\sqrt{\omega^2-p^2}$, тады $k_{1,2}=-p\pm\omega_1 i$. Агульнае рашэнне раўнання (16.6) буддзе мець выгляд:

$$y=e^{-pt}(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t)=\sqrt{C_1^{\,2}+C_2^{\,2}}\,e^{-pt}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^{\,2}+C_2^{\,2}}}\cos\omega_1 t+\frac{C_2}{\sqrt{C_1^{\,2}+C_2^{\,2}}}\sin\omega_1 t\right).$$

Абазначым $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$, $\sin\alpha=\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$. Тады адзінае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (16.6) можна запісаць так:

$$y=Ae^{-pt}(\sin\alpha\cos\omega_1 t+\cos\alpha\sin\omega_1 t),$$

г. зн.

$$y=Ae^{-pt}\sin(\omega_1 t+\alpha). \tag{16.7}$$

Адзначым, што A і α вызначаюцца пачатковымі ўмовамі.

Калі $p>0$, г. зн. супраціўленне асяроддзя маецца, то з (16.7) відаць, што $y\to 0$, калі $t\to+\infty$. Гэта сведчыць аб тым, што цела ажыццяўляе затухаючыя ваганні.

Калі $p=0$, г. зн. супраціўленне асяроддзя адсутнічае, то з (16.7) атрымліваем, што

$$y=A\sin(\omega t+\alpha). \tag{16.7'}$$

З (16.7') бачым, што адхіленне y з цягам часу змяняецца па сінусаідальнаму закону. ω называецца частатой ваганняў, α — пачатковай фазай.

2. Няхай $p^2>\omega^2$, г. зн. супраціўленне асяроддзя вялікае. У гэтым выпадку карані характарыстычнага раўнання з'яўляюцца рэчаіснымі:

$$k_{1,2}=-p\pm\sqrt{p^2-\omega^2}=-p\pm h,$$

дзе $h=\sqrt{p^2-\omega^2}$. Агульнае рашэнне раўнання (16.6) у гэтым выпадку будзе такім:

$$y=C_1e^{-(p-h)t}+C_2e^{-(p+h)t}, \tag{16.8}$$

дзе C_1 і C_2 вызначаюцца пачатковымі ўмовамі.

З (16.8) відаць, што цела не ажыццяўляе ваганняў. Яно паступова вяртаецца ў становішча раўнавагі, бо $y\to 0$ пры $t\to+\infty$.

3. $p^2=\omega^2$. У гэтым выпадку $k_{1,2}=-p$ — карані характарыстычнага раўнання. Агульнае рашэнне раўнання (16.6) мае выгляд:

$$y=C_1e^{-pt}+tC_2e^{-pt}. \tag{16.9}$$

Мы атрымалі карціну, аналагічную разгледжанай вышэй. Пры $t\to+\infty$ y імкнецца да нуля.

Вывучым раўнанне вымушаных ваганняў (16.5). Разгледзім выпадак, калі вонкавая сіла залежыць ад часу сінусаідальна:

$$F_1=D\sin qt.$$

Тады раўнанне (16.5) прыме выгляд:

$$my''+\bar{c}\,y'+cy=D\sin qt.$$

Падзяліўшы на m атрымаем:

$$y''+2py'+\omega^2y=H\sin qt, \tag{16.10}$$

дзе $2p=\dfrac{\bar{c}}{m},\ \omega^2=\dfrac{c}{m},\ H=\dfrac{D}{m}$.

Запішам характарыстычнае раўнанне

$$k^2+2pk+\omega^2=0 \tag{16.11}$$

і знойдзем яго карані $k_{1,2}=-p\pm\sqrt{p^2-\omega^2}$.

Разгледзім выпадак, які найбольш часта сустракаецца на практыцы:

$$p^2<\omega^2,$$

г. зн. калі супраціўленне асяроддзя маленькае.

Агульнае рашэнне неаднароднага раўнання (16.10) знаходзім па формуле

$$y=\bar{y}+Y, \tag{16.12}$$

дзе $\bar{y}$ — агульнае рашэнне адпаведнага аднароднага раўнання (16.6), Y — якое-небудзь частковае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (16.10). Агульнае рашэнне аднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (16.6) знаходзіцца па формуле (16.7):

$$\bar{y}=Ae^{-pt}\sin(\omega_1t+\alpha). \tag{16.13}$$

Знойдзем частковае рашэнне Y неаднароднага дыферэныяльнага раўнання (16.10). Будзем разважаць так, як адзначана ў параграфе 15.

Разгледзім лік

$$a\pm bi=0\pm qi \tag{16.14}$$

і высветлім, ці з’яўляецца ён коранем характарыстычнага раўнання (16.11).

1. Няхай $p>0$, г. зн. супраціўленне асяроддзя маецца. У гэтым выпадку лік (16.14) не з’яўляецца коранем характарыстычнага раўнання (16.11). Таму частковае рашэнне Y знаходзіцца ў наступным выглядзе:

$$Y=M\cos qt+N\sin qt.$$

Пераўтворым гэтае рашэнне аналагічным чынам, як і пры атрыманні (16.7). Будзем мець:

$$Y=B\sin(qt+\delta). \tag{16.15}$$

Падставіўшы (16.13) і (16.15) у (16.12), атрымаем агульнае рашэнне неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (16.10):

$$y=Ae^{-pt}\sin(\omega_1 t+\alpha)+B\sin(qt+\delta). \tag{16.16}$$

Такім чынам, выніковыя ваганні складаюцца з затухаючых ваганняў і ваганняў з частатой вонкава сілы q. Паколькі першы складнік з нарастаннем t даволі хутка імкнецца да нуля, то праз некаторы час рух будзе апісвацца толькі другім складнікам.

Вывучым больш падрабязна вымушаныя ваганні ў выпадку адсутнасці супраціўлення асяроддзя, г. зн. $p=0$.

2. Няхай $p=0$, але $q\neq\omega=\omega_1$. Тады лік (16.14) не з’яўляецца коранем характарыстычнага раўнання (16.11).

Агульнае рашэнне неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (16.10) у гэтым выпадку мае наступны выгляд:

$$y=A\sin(\omega t+\alpha)+B\sin(qt+\delta).$$

Такім чынам, рух складаецца з гарманічных ваганняў з рознымі частотамі ω і q.

3. Няхай $p=0$, $q=\omega=\omega_1$. Тады лік (16.14) будзе коранем характарыстычнага раўнання (16.11).

У гэтым выпадку агульнае рашэнне неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання (16.10) будзе такім:

$$y=A\sin(\omega t+\alpha)+Bt\sin(qt+\delta).$$

Як бачым з гэтай формулы, рух у разглядаемым выпадку складаецца з двух ваганняў з аднолькавымі частотамі, прычым размахі другога вагання нарастаюць з цягам часу.

Такая з’ява, калі размахі ваганняў пры $t\to+\infty$ неабмежавана нарастаюць, называецца рэзанансам.

Можна паказаць, што ў выпадку наяўнасці супраціўлення асяроддзя з’ява рэзанансу адбываецца пры частаце вонкавай сілы q, блізкай да частаты свабодных ваганняў ω.

Літаратура

1. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. М.: Просвещение, 1998.
2. Гутер Р.С., Янпольский. Дифференциальные уравнения. М.: Высшая школа, 1976.
3. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Высшая школа, 1989.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. М.: ГИТТЛ, 1957.
5. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Мн.: Наука и техника, 1972.
6. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Мн.: Вышэйшая школа, 1987.
7. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. Мн.: Вышэйшая школа, 1973.

Змест

Вучэбнае выданне

БАГДАНОВІЧ Сяргей Адамавіч

ВАСІЛЕЦ Сяргей Іванавіч

ШЫЛІНЕЦ Уладзімір Адамавіч

З В Ы Ч А Й Н Ы Я Д Ы Ф Е Р Э Н Ц Ы Я Л Ь Н Ы Я Р А Ў Н А Н Н І

Вучэбны дапаможнік

Рэдактар: Сідарэнка А. В.

Падпісана ў друк .2003. Фармат 60x84 1/16. Папера пісчая.
Гарнітура "Таймс". Афсетны друк. Ум. друк. арк. Ул.–выд. арк.
Тыраж 100 экз. Заказ Цана

Выдавецтва і паліграфічнае выкананне:
Вучэбна–выдавецкі цэнтр
Беларускі дзяржаўны педагагічны універсітэт імя Максіма Танка
Ліцэнзія ЛВ № 196 ад 04.02.98 г.

Ратапрынт БДПУ імя М. Танка. 220050, Мінск, вул. Савецкая, 18