О. Н. Пирютко, доцент кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка,
Т. А. Смирнова, магистрант кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ РАЗЛИЧНЫХ КОМПОНЕНТОВ МЫШЛЕНИЯ

Цели обучения математике в школе на различных этапах обучения в разные периоды времени в школьных программах различных государств связывают в первую очередь с развитием мышления человека.

В настоящее время в рамках смены парадигмы школьного математического образования в Республике Беларусь в контексте обучения и воспитания на II и III ступенях общего среднего образования цели изучения учащимися математики как учебного предмета связываются с формированием компетенций: социально-личностных, метапредметных, предметных. В структуру этих компетенций входят различные компоненты, в том числе касающиеся процесса мышления: «развитие логического и критического мышления, культуры устной и письменной речи с применением математической терминологии и символики, способности к эмоциональному восприятию идей математики, рассуждениям, доказательствам, мысленному эксперименту; развитие правильных представлений о характере отражения математикой явлений и процессов в природе и обществе, роли методов математики в научном познании окружающего мира и его закономерностей» [1, с. 31].

Общепризнано, что для жизни в современном обществе значимым является развитие математического стиля мышления, проявляющегося в определённых умственных навыках. В процессе математической деятельности, организуемой при изучении математики в школе, формируются методы мышления: индукция и дедукция, обобщение и конкретизация, анализ и синтез, классификация и систематизация, абстрагирование и аналогия. С помощью математических умозаключений и правил их конструирования вырабатываются навыки логических построений в рассуждениях, умения формулировать, обосновывать и доказывать утверждения, что составляет логический компонент мышления. Другим компонентом мышления, формируемым при обучении математике, является алгоритмическое мышление — умение действовать по заданным алгоритмам и конструировать новые. Творческая и прикладная стороны мышления развиваются в ходе решения задач.

С введением в школьный курс математики (в контексте модернизации образовательного процесса) элементов комбинаторики актуальным становится вопрос о методике и технологии формирования и развития комбинаторного мышления учащихся. Исследователи этого компонента мышления указывают, что комбинаторное мышление представляет собой переходную форму от образного мышления к абстрактно-логическому, а применяется в противоположной форме — от абстрактных моделей к образным. Мыслительная деятельность при решении комбинаторных задач включает в себя самые разные элементы: мотивационные, операционные, содержательные, абстрактно-логические и образные. Психологи отмечают, что активизация комбинаторного мышления состоит в том, что мозг человека занят поиском и преобразованием каких-либо одних элементов в другие, придавая им новые формы и комбинации. Особенности этого процесса заключаются в том, что механизмы, задействованные при комбинировании, включают в себя интеграцию всех операций, которые осуществляются восприятием, представлением и мышлением. Исследовательский компонент комбинаторного мышления представляется познанием обучающимся новых форм и комбинаций окружающей его действительности, в получении нового опыта, возможно, изменяющего уже имеющийся.

Решение комбинаторных задач предполагает соединение алгоритмического, эвристического, логического стилей мышления. *Эвристический* компонент определяет пути к решению задачи через составление моделей комбинаций, определяемых условием задачи. *Алгоритмический* — направлен на чёткое выполнение уже составленного алгоритма. *Логический* — необходим для выполнения тончайшего анализа ситуации задачи, разбиения её на отдельные элементы, перестройку прежних связей и установление новых, обнаружение новых отношений и зависимостей, позволяющих перейти к обобщённым приёмам решения комбинаторных задач.

Развитие алгоритмического компонента мышления при решении комбинаторных задач.

Задачи так называемого первого уровня (в шкале оценок 1—3-й уровни) требуют умения выполнять два вида *познавательных действий:*

- классифицировать объекты по признакам, соответствующим определениям основных видов комбинаций;
- конкретизировать применение правила в задаче.

Обучение распознаванию ***вида комбинации*** целесообразно *через организацию алгоритмической деятельности.*

Для реализации этой деятельности необходимо сформировать *основные правила комбинаторики:*

- ***Правило произведения.***

Если объект A может быть выбран m различными способами, причём после каждого такого выбора объект B можно выбрать n различными способами, то выбор «сначала A, а потом B» можно осуществить $m \cdot n$ способами.

- ***Правило суммы.***

Если объект A может быть выбран m различными способами, а другой объект B можно выбрать n различными способами, причём ни один из способов выбора объекта A не совпадает ни с одним из способов выбора объекта B, то выбор «либо A, либо B» можно осуществить $m + n$ способами.

- ***Замечание (правило суммы 2).***

Если некоторые способы выбора объектов A и B совпадают и число совпадений равно k, то общее число различных способов выбора либо объекта A, либо B равно $m + n - k$.

Таблица формул для вычисления числа комбинаций (наборов) из данных элементов

Название комбинации	Перестановки из n элементов	Размещения из n различных элементов по m	Сочетания из n различных элементов по m
Формула подсчёта числа комбинаций без повторений	$P_n = n!$	$A_n^m = n(n-1)\ ...\ (n-m+1)$	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$
Формула подсчёта числа комбинаций с повторениями	$P_n(n_1, n_2, ... n_k) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$	$\overline{A_n^m} = n^m$	$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$

Алгоритм выбора вида соединения

Проиллюстрируем использование алгоритма, позволяющего учащимся отнести задачу к определённому классу и реализовать математическую модель задачи, соответствующую выбору.

Комбинации, составляемые из элементов, определяемых условием задачи, могут называться наборами, способами, соединениями.

Задача 1.

Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 8, 9 так, чтобы все цифры участвовали в записи?

Решение. В соответствии с алгоритмом проверим, все ли элементы участвуют в одном наборе. Так как всего цифр 4 и все они используются в записи числа, то различные четырёхзначные числа представляют собой перестановки из 4 элементов. Применяем формулу числа перестановок из n элементов, будем иметь:

$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

Задача 2.

Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице 10 футбольных команд, если известно, что никакие две команды не набрали очков поровну. (Уровень подготовленности команд не учитывается).

Решение. В соответствии с алгоритмом проверим, все ли элементы участвуют в одном наборе. Так как каждый из способов расположения команд в таблице содержит все 10 команд и будет отличаться от другого только порядком расположения команд в турнирной таблице, то количество способов расположения будет равно числу перестановок из 10 элементов. По формуле числа перестановок из n элементов получим:

$P_{10} = 10!$

Задача 3.

У филателиста 9 новых марок. Сколькими способами он может наклеить четыре из них на 4 пронумерованных места?

Решение. В соответствии с алгоритмом проверим, все ли элементы участвуют в одном наборе. Так как всего марок 9, а выбрать нужно 4, то в одном наборе марок используются **не все данные** элементы. Значит, рассматриваемые комбинации — это сочетания или размещения. Так как места расположения марок пронумерованы, то порядок расположения элементов в наборе имеет значение. Следовательно, для ответа на вопрос задачи применяем формулу числа размещений из 9 элементов по 4:

$A_9^4 = 9\cdot 8 \cdot 7\cdot 6 = 3024.$

Задача 4.

Учитель проверил четыре не подписанные учащимися работы и раздал их этим учащимся. В скольких возможных случаях не все учащиеся получат свои работы?

Решение. В соответствии с алгоритмом проверим, все ли элементы участвуют в одном наборе. Набор элементов представляет собой 4 работы учащихся, взятых в произвольном порядке. Все элементы (4 работы) присутствуют в одном наборе. Число различных способов раздать работы соответствует числу перестановок из 4 элементов:

$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

Очевидно, что только в одном из этих способов работы будут розданы в правильном порядке, т. е. каждый из учащихся получит свою работу. Следовательно, в 23 случаях не все учащиеся получат свои работы.

Задача 5.

Сколькими способами можно составить команду из четырёх человек для соревнований по плаванию из семи пловцов?

Решение. В соответствии с алгоритмом: так как различные команды содержат 4 пловца из 7 и команды пловцов различаются только лишь элементами (порядок выбора не имеет значения), то рассматриваются сочетания из 7 элементов по 4.

Число сочетаний вычислим по формуле:

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!3!} = 35.$$

Развитие эвристического и логического компонентов мышления при решении комбинаторных задач

Другой уровень комбинаторных задач отличен от задач алгоритмического характера, он связан с трудностями выбора типа комбинации, а применение алгоритма уже не приводит к однозначному решению. Необходимы новые эвристические и логические приёмы поиска решения, такие как применение правила «решета», составление математической модели комбинации с использованием динамических презентаций, которые позволяют представить наборы, удовлетворяющие условию, наглядно. Задачи такого типа предлагаются для заданий 4-го и 5-го уровней, их решение формирует логическое мышление на основе приёмов анализа, моделирования, поиска эвристик.

Задача 6.

Сколько различных нечётных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 7, 8 так, чтобы все цифры участвовали в записи?

Решение. Анализ: рассмотрим несколько комбинаций, удовлетворяющих условию: 1783, 8173, 8713. Ясно, что можно подсчитать количество чисел, у которых последняя цифра 3. Их будет столько, сколькими способами можно поменять местами три другие цифры — 1, 8, 7, т. е. найдём количество перестановок из 3 элементов:

$P_3 = 3! = 6.$

Значит, нечётных чисел, оканчивающихся цифрой 3 и составленных из данных цифр, равно 6.

Такое же количество нечётных чисел будет с последней цифрой 1 и цифрой 7. Таким образом, общее количество нечётных чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно $6 \cdot 3 = 18$.

После провёденного анализа, приводящего к решению, можно заметить, что проще подсчитать сначала количество всех четырёхзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 3, 7, 8. Их число будет равно P_4. А затем из общего числа следует вычесть количество чётных чисел («просеиваем» ненужные). Их будет столько, сколько различных перестановок можно сделать из 3 нечётных цифр из имеющихся (цифра 8 помещается на последнее место):

$P_4 - P_3 = 24 - 6 = 18.$

Задача 7.

Сколькими способами можно составить пятизначное число из цифр 1, 2, 4, 5 так, чтобы в нём было две цифры 5, а цифры 1 и 2 стояли рядом?

Решение. Анализ: рассмотрим несколько комбинаций, удовлетворяющих условию: 12455, 12545, 51254. Пара чисел (1; 2), передвигаясь в комбинации, занимает одно место, если рассматривать 4 места для цифр, а эту пару принять за «одну цифру». Таким образом, можно рассматривать перестановки из 4 различных элементов, если две цифры 5 принять за разные, тогда «пятизначных чисел» будет столько, сколькими способами можно переставить 4 элемента, т. е. $P_4 = 4! = 24$.

Далее учтём, что «две цифры» 5 уменьшат общее количество комбинаций в два раза, так как перемена их мест в каждом наборе не изменит набор:

$24 : 2 = 12.$

Вернёмся к условию задачи: две цифры 1 и 2 должны стоять рядом, значит, наряду с парой (1; 2) можно рассматривать пару (2; 1), поэтому общее количество комбинаций увеличится вдвое. Окончательно:

$12 \cdot 2 = 24.$

Задача 8.

Найдите количество всех четырёхзначных чисел, у которых только одна из цифр есть натуральное число, которое делится на 3.

Решение. Анализ: цифра, которая делится на 3, может стоять на любом из 4 мест (в любом разряде четырёхзначного числа). Поэтому можно подсчитать количество различных трёхзначных чисел без цифр 3, 6 и 9, а затем из каждого трёхзначного числа получить 4 четырёхзначных, подставляя цифру 3 (затем 6 и 9) на каждое из 4 мест. Например, трёхзначное число 240. Из него получается: 3240, 2340, 2430, 2403 — 4 четырёхзначных числа.

Итак, из всех наборов из 7 цифр по 3 с повторениями вычитаем те, у которых цифра 0 на первом месте $\overline{A_7^3} - \overline{A_7^2} = 294$ — всего трёхзначных чисел без цифр 3, 6 и 9. Тогда $294 \cdot 12 = 3528$ — всего четырёхзначных чисел, у которых только одна из цифр делится на 3.

Задача 9.

На некоторой прямой отмечено 15 точек, а на параллельной ей прямой — 18. Сколько различных треугольников с вершинами в этих точках можно построить?

Решение. Анализ: число треугольников с вершинами в этих точках равно числу способов выбрать одну точку на одной прямой и две точки – на другой.

Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1C_1B_1$ будем считать одним треугольником.

Пусть a — это прямая, на которой отмечено 15 точек, b — это прямая, на которой отмечено 18 точек. Тогда — для каждой точки прямой a — первую точку на прямой b можно выбрать 18 способами, а вторую точку — 17.

По правилу произведения найдём число треугольников с одной вершиной на прямой a: $15 \cdot 18 \cdot 17 = 4590$. Среди них будут такие, которые при выборе первой вершины отличаются порядком следования двух других вершин. Например, AMN при выборе второй вершиной — точку M, а третьей — N и ANM при выборе второй вершиной — точку N, а третьей — M. Поэтому общее количество разных треугольников равно: $4590 : 2 = 2295$.

Аналогично предыдущему: для каждой точки прямой b — первую точку на прямой a можно выбрать 15 способами, а вторую точку — 16. Всего треугольников с одной вершиной на прямой b и двумя — на прямой a можно выбрать $18 \cdot 15 \cdot 14 = 3780$ способами. Общее количество разных треугольников с одной вершиной на прямой b равно:

$3780 : 2 = 1890$.

По правилу суммы общее количество треугольников равно:

$2205 + 1890 = 4095$.

Задача 10.

Укротитель хочет вывести на арену цирка 5 различных тигров и 4 различных льва. При этом нельзя, чтобы два льва шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить своих зверей?

Решение. Анализ. Составим модель распределения львов между тиграми. Для произвольного расположения пяти различных тигров львы могут располагаться на шести местах: четыре – между пятью тиграми, одно — в начале и одно — в конце. Например, $Т_1Л_1Т_2Л_2Т_3Л_3Т_4Л_4Т_5$ или $Л_1Т_1Т_2Л_2Т_3Л_3Т_4Т_5Л_4$ и т. д. Определяем, что пять различных тигров можно вывести на арену 5! способами. А на шесть мест между ними в каждом из вариантов четыре льва можно распределить (при том, что львы разные) A_6^4 способами.

По правилу произведения получим общее число способов:

$5!\,A_6^4 = 43200$.

Задача 11.

Три друга на рыбалке поймали 6 различных рыб. Сколькими способами можно распределить этих рыб между тремя друзьями, если:

а) не каждый из них получит хотя бы одну рыбу;

б) один или два рыбака не получат ни одной рыбы;

в) каждый получит хотя бы одну рыбу?

Решение

а) Анализ. Рассмотрим несколько различных вариантов распределения шести рыб между тремя друзьями. Щука, окунь, карась, сазан, налим, линь.

1 1 2 3 3 3

1 1 2 2 2 2

Первый набор означает, что первому рыбаку достались две рыбы, второму — одна рыба, третьему — три. Во втором наборе две рыбы достаются первому, а четыре рыбы — второму. Каждый набор представлен шестью элементами, составленными из трёх данных. Порядок расположения элементов имеет значение, так как рыбы различные. Значит, комбинации представляют собой размещения из трёх элементов по 6 с повторениями: $\overline{A_3^6} = 3^6 = 729$.

Можно построить и другую модель для распределения рыб: рыбы будут «выбирать» рыбаков. Тогда первая рыба может выбрать любого из трёх рыбаков, вторая — также любого из трёх и т. д. до шестой рыбы. По правилу произведения получим тот же результат: 3^6.

б) Рассмотрим случай, когда два рыбака не получат рыб. Тогда все рыбы попадут к одному из трёх, т. е. в трёх случаях. Если какой-то один из рыбаков не получит рыб, значит 6 рыб распределятся между двумя оставшимися рыбаками 2^6 способами. А поскольку на месте рыбака, не получившего рыб, может быть любой, то всего $3 \cdot 2^6$ способов. Всего

$3 \cdot 2^6 + 3 = 195$ способов.

в) Если из всех способов распределения рыб вычесть те, в которых один или два рыбака не получат ни одной рыбы: $729 - 195 = 534$, то получится число способов распределения рыб, когда каждый получит хотя бы одну рыбу.

Задача 12.

Сколькими различными способами можно разложить 12 различных конфет по трём коробкам?

Решение. Используем приём составления математической модели комбинации, по которой можно увидеть ожидаемый результат. Такой моделью будет набор из 12 компонентов, составленный из 3 цифр (или других символов, соответствующих коробкам). Например, наборы 113332221133, 111111112222 вполне определённо объясняют, как располагаются конфеты в коробках. Первый набор показывает, что первую, вторую, девятую и десятую конфету поместили в первую коробку; шестую, седьмую, восьмую — во вторую, остальные — в третью. Второй набор указывает, что первые восемь конфет — в первой коробке, последние четыре — во второй, а в третьей коробке нет конфет. Очевидно, что эти наборы иллюстрируют размещение из 3 элементов с повторениями по 12. Число таких наборов вычисляется по формуле:

$\overline{A_3^{12}} = 3^{12}$.

Задача 13.

В соревнованиях по гимнастике участвуют 10 спортсменов. Трое судей должны их расположить по местам в зависимости от баллов, поставленных каждым из судей независимо друг от друга. Победителем становится тот, кого поставят на первое место по крайней мере двое из трёх судей.

а) Сколькими способами трое судей могут назвать спортсмена, занявшего первое место?

б) Сколько способов таких, когда победителя определить нельзя?

в) Сколько способов таких, когда победитель определён?

Решение.

а) Анализ: первый из судей имеет 10 вариантов определить первое место, второй и третий — тоже по 10 вариантов. По правилу произведения получим всего $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ способов.

Другой подход в анализе: имеется 10 элементов, из которых нужно выбрать 3 (тремя судьями), при этом порядок имеет значение, а элементы в тройке могут повторяться. Значит, эти комбинации есть размещения из 10 элементов по 3 с повторениями:

$\overline{A_{10}^3} = 10^3 = 1000$.

б) В этом случае рассуждения повторяют предыдущие, только комбинации рассматриваются без повторений, всего способов определить спортсмена, занявшего первое место, тремя судьями будет равно:

$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$

в) Из всех способов вычитаем те, которые не определяют победителя (просеиваем), получаем 1000 − 720 = 280.

Список использованных источников

1. Учебная программа для учреждений общего среднего образования с русским языком обучения и воспитания. Математика (V—XI классы, проект) // Матэматыка. — 2016. — № 2. — С. 3—31.

2. *Евдокимова, Л. В.* Формирование комбинаторного мышления у младших школьников и подростков : дис. канд. психол. наук: 19.00.13 / Л. В. Евдокимова Москва, 2006. — 201 с. РГБ ОД, 61:06-19/451/КиберЛенинка: https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-kombinatornogo-myshleniya-studentov-v-protsesse-obucheniya-matematike.

Да ведама аўтараў

Рэдакцыя прымае да разгляду матэрыялы аб'ёмам да 20 старонак (можна дасылаць электроннай поштай).

Фотаздымкі прымаюцца чорна-белыя і добрай якасці. Малюнкі і графікі выконваюцца асобна ў фармаце, які забяспечвае выразнасць перадачы ўсіх дэталяў.

Неабходна пазначыць прозвішча, імя і імя па бацьку аўтара, месца працы, пасаду, вучоную ступень, вучонае званне, хатні адрас, тэлефоны, пашпартныя звесткі (серыя, нумар, калі і кім выдадзены, асабісты нумар, адрас прапіскі). Без гэтых звестак матэрыялы разглядацца не будуць.

Дасылаючы ў часопіс распрацоўкі ўрокаў, аўтар павінен абавязкова пазначаць клас, чвэрць і месяц, калі тэма вывучаецца ў школе.

Рэдакцыя не заўсёды падзяляе думкі аўтараў. Апошнія нясуць адказнасць за ўсю інфармацыю, якая ўтрымліваецца ў артыкуле.

Рукапісы аўтарам не вяртаюцца.