ЗАДАНИЯ К ЗАЧЕТУ ПО МАТЕМАТИКЕ 3КУРС (5ЛЕТ) 30 ГР. ЗО 2018Г.

Доцент Толстик Н.В.

Тема: Делимость целых неотрицательных чисел

Решение типовых задач

☺ **Задача 1.** Доказать, что:

1) произведение двух последовательных натуральных чисел делится на 2;

2) произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 3;

3) при $\forall n \in \mathbf{N}$ значение выражения n^3+3n^2+2n делится на 2 и на 3.

Доказательство.

1) Обозначим два последовательных натуральных числа через a и $a+1$, тогда их произведение равно $a\,(a+1)$.

Если $a \vdots 2$ $\left((\exists k \in \mathbf{N_0})(a=2k)\right)$, то $a(a+1)=(2k)((2k)+1)=2\underbrace{(k(2k+1))}_{p\in\mathbf{N}}=2p$, $2p \vdots 2$.

Если a не делится на 2 (значит, а делится на 2 с остатком 1), то

$$(\exists k \in \mathbf{N_0})(a=2q+1),$$

тогда $a(a+1)=(2q+1)(2q+2)=(2q+1)(2(q+1))=2\underbrace{((2q+1)(q+1))}_{=p\in\mathbf{N}}=2p$, 2p $\vdots$ 2.

2) Пусть даны три последовательных натуральных числа a, $a+1$, $a+2$, их произведение равно $a(a+1)(a+2)$.

Если $a \vdots 3$ $\left((\exists k \in \mathbf{N_0})(a=3k)\right)$, то

$$a(a+1)(a+2)=(3k)(3k+1)(3k+2)=3\underbrace{(k(3k+1)(3k+2))}_{=p\in\mathbf{N}}=3p,\quad 3p \vdots 3.$$

Если $\overline{a \vdots 3}$ (значит, a делится на 3 с остатком 1 или 2), то возможны два случая:

1° $(\exists q \in \mathbf{N_0})$ $(a=3q+1)$, тогда

$$a(a+1)(a+2)=(3q+1)(3q+2)(3q+3)=3\underbrace{((3q+1)(3q+2)(q+1))}_{=p\in\mathbf{N}}=3p,\quad 3p \vdots 3;$$

2° $(\exists q \in \mathbf{N_0})$ $(a=3q+2)$, тогда

$$a(a+1)(a+2)=(3q+2)(3q+3)(3q+4)=3\underbrace{((3q+2)(q+1)(3q+4))}_{=p\in\mathbf{N}}=3p,\quad 3p \vdots 3.$$

3) Разложим трехчлен на множители:

$$n^3+3n^2+2n=n\underbrace{(n^2+3n+2)}_{(n+1)((n+2)}=n(n+1)(n+2)\,.$$

Получим произведение трех последовательных чисел, которое по доказанному выше делится на 3. Кроме того, это произведение делится на 2, поскольку $n(n+1)$ (или $(n+1)(n+2)$) – произведение двух последовательных натуральных чисел.

☺ **Задача 2.** Доказать, что всякое четырехзначное натуральное число вида $\overline{7aa7}$ делится на 11.

Доказательство. Запишем данное число в следующем виде:

$$\overline{7aa7}=7\cdot 10^3+a\cdot 10^2+a\cdot 10+7=7007+110a\,.$$

Так как $7007 \vdots 11$ и $110a \vdots 11$, то по теореме о делимости суммы $(7007+110a)\vdots 11$, т. е. $(\forall a\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\})\quad(\overline{7aa7}\vdots 11)$.

☺ **Задача 3.** Доказать методом математической индукции, что $(\forall n\in\mathbf{N})$:

1. $\left(3^{2n+1}+1\right)\vdots 4$;   2. $\left(6^{n+2}+7^{2n+1}\right)\vdots 43$.

Доказательство. 1. Обозначим $A(n)$: « $(3^{2n+1}+1)\vdots 4$ ».

1) Проверим истинность $A(1)$:

$A(1)$: « $\left(3^{2\cdot1+1}+1\right)\vdots 4$ » – «и», так как $3^{2\cdot1+1}+1=28=4\cdot 7$.

2) Докажем импликацию $A(k)\Rightarrow A(k+1)$.

Допустим, что высказывание $A(k)$: « $\left(3^{2\cdot k+1}+1\right)\vdots 4$ » – истинно, и докажем истинность высказывания $A(k+1)$: « $\left(3^{2\cdot(k+1)+1}+1\right)\vdots 4$ ». Действительно:

$$3^{2\cdot(k+1)+1}+1=3^{2k+3}+1=3^2\cdot 3^{2k+1}+1=(8+1)\cdot 3^{2k+1}+1=\underbrace{\underbrace{8\cdot 3^{2k+1}}_{\vdots 4\text{ по теор.6}}+\underbrace{3^{2k+1}+1}_{\vdots 4\text{ по доп.}}}_{\text{сумма делится на 4}}.$$

Оба положения метода математической индукции выполняются, поэтому $(3^{2n+1}+1)\vdots 4$, при $\forall n\in\mathbf{N}$.

2. Обозначим $A(n)$: « $(6^{n+2}+7^{2n+1})\vdots 43$ ».

1) Проверим истинность $A(1)$: $6^3+7^3=599=43\cdot 13$, т.е. $\left(6^3+7^3\right)\vdots 43$.

2) $A(k)\Rightarrow A(k+1)$. Допустим, что высказывание $A(k)$: « $(6^{k+2}+7^{2k+1})\vdots 43$ » – истинно, и докажем истинность высказывания $A(k+1)$: « $(6^{k+3}+7^{2k+3})\vdots 43$ ».

На самом деле:

$$6^{k+3}+7^{2k+3}=6\cdot 6^{k+2}+49\cdot 7^{2k+1}=(5+1)\cdot 6^{k+2}+(48+1)\cdot 7^{2k+1}=$$
$$=(6^{k+2}+7^{2k+1})+5\cdot 6^{k+2}+48\cdot 7^{2k+1}=\underbrace{(6^{k+2}+7^{2k+1})}_{\substack{\text{делится на 43}\\ \text{по допущению}}}+\underbrace{5\cdot(6^{k+2}+7^{2k+1})}_{\substack{\text{делится на 43}\\ \text{по доп. и теор. 6}}}+\underbrace{43\cdot 7^{2k+1}}_{\substack{\text{делится на 43}\\ \text{по теор. 6}}}.$$

Поэтому по теореме о делимости суммы вся сумма будет делиться на 43.

Оба положения метода математической индукции выполнены, поэтому $(6^{n+2}+7^{2n+1})\vdots 43$ при $\forall n\in\mathbf{N}$.

☺ **Задача 4.** Число 28 делится на 4, 30 делится на 5, поэтому произведение 28 · 30 (равное 840) делится на произведение 4 · 5 (равное 20):

840 : 20 = 42.

☺ **Задача 5.** Доказать: $(\forall n\in\mathbf{N})$ $(((n^3+2n^2)(n^2-1))\vdots 6)$.

Доказательство. Заметим, что 6 = 2 · 3. Далее:

$$(n^3+2n^2)(n^2-1)=n^2(n+2)(n-1)(n+1)=(\underbrace{(n-1)\cdot n)}_{=a}\cdot\underbrace{(n\cdot(n+1)(n+2))}_{=b}=ab.$$

В произведении *ab*:

множитель $a\vdots 2$ (как произведение двух последовательных натуральных чисел),
множитель $b\vdots 3$ (как произведение трех последовательных натуральных чисел),
поэтому произведение $ab=(n^3+2n^2)(n^2-1)$ делится на произведение 2 · 3 = 6.

Значит, $((n^3+2n^2)(n^2-1))\vdots 6$ при $(\forall n\in\mathbf{N})$.

☺ **Задача 6.** Проверить при помощи признака делимости Паскаля: действительно ли, что:
а) число 2592 делится на 8; б) число 1234 делится на 7?

Решение.

а) $10^3=125\cdot 8+0$;

$10^2=12\cdot 8+4$;

$10=1\cdot 8+2$;

$2\cdot 0+5\cdot 4+9\cdot 2+2=40$;

$40\vdots 8$, так как $40=8\cdot 5$.

б) $10^3=142\cdot 7+6$;

$10^2=14\cdot 7+6$;

$10=1\cdot 7+3$;

$1\cdot 6+2\cdot 6+3\cdot 3+4=31$;

$\overline{31\vdots 7}$, так как не существует число $c\in\mathbf{N}_0$ такое, что $31=7\cdot c$.

Ответ: а) число 2592 делится на 8; б) число 1234 не делится на 7.

☺ **Задача 7.** Определить, простым или составным является число 187, 151, 381.
Решение. Легко видеть, что $\sqrt{187}<14$. Теперь проверим делимость числа 187 на простые числа, меньшие 14 (т. е. на 2, 3, 5, 7, 11, 13): на 2, 3, 5, 7 число 187 не делится, а на 11

делится. Значит, число 187 имеет третий делитель 11, кроме делителей 1 и 187. Поэтому число 187 является составным.

Так как $\sqrt{151} < 13$, то проверяем делимость 151 на 2, 3, 5, 7, 11. Поскольку 151 не делится ни на одно из указанных чисел, то 151 – простое число.

Число 381 – составное, поскольку делится на 3 по признаку делимости.

☺ **Задача 2.** Составить таблицу простых чисел от 2 до 40.
Решение. Запишем последовательность натуральных чисел от 2 до 40.

2	3	~~4~~	~~5~~	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~
~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~
~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~

Первое простое число – 2. Зачеркнем все числа, которые делятся на 2, кроме самого числа 2. Первым незачеркнутым после 2 является число 3.

Зачеркиваем все числа, которые делятся на 3, кроме самого числа 3. Числа, которые остались незачеркнутыми, не делятся ни на 3, ни на 2.

Теперь зачеркиваем все числа, которые делятся на 5, кроме самого числа 5. Числа, которые остались, не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, т. е. их делителем может быть число 6 или 7. Но наименьший простой множитель числа 40 должен удовлетворять условию $\sqrt{40} < 7$.

Таким образом, среди незачеркнутых чисел нет составных – все они простые, а именно: 2, 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

☺ **Задача 3.** Найти НОД(6188, 4709) при помощи алгоритма Евклида.
Решение. Делим большее число на меньшее:

$$\begin{array}{r|l} 6188 & 4709 \\ \cline{2-2} 4709 & 1 \\ \cline{1-1} 1479 & \end{array}$$

Далее: делим 4709 на полученный остаток 1479:

$$\begin{array}{r|l} 4709 & 1479 \\ \cline{2-2} 4437 & 3 \\ \cline{1-1} 272 & \end{array}$$

делим первый остаток 1479 на второй остаток 272:

$$\begin{array}{r|l} 1479 & 272 \\ \cline{2-2} 1360 & 5 \\ \cline{1-1} 119 & \end{array}$$

делим второй остаток 272 на третий остаток 119:

$$\begin{array}{r|l} 272 & 119 \\ \cline{2-2} 238 & 2 \\ \cline{1-1} 34 & \end{array}$$

делим остаток 119 на следующий остаток 34:

$$\begin{array}{r|l} 119 & 34 \\ \cline{2-2} 102 & 3 \\ \cline{1-1} \mathbf{17} & \end{array}$$

делим остаток 34 на следующий остаток 17:

$$\begin{array}{r|l} 34 & 17 \\ 34 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

На практике процесс деления обычно записывают в более удобной форме:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & & & -6188 & |\,4709 \\
 & & & & & 4709 & |\,1 \\
 & & & & -4709 & |\,1479 & \\
 & & & & 4437 & |\,3 & \\
 & & & -1479 & |\,272 & & \\
 & & & 1360 & |\,5 & & \\
 & & -272 & |\,119 & & & \\
 & & 238 & |\,2 & & & \\
 & -119 & |\,34 & & & & \\
 & 102 & |\,3 & & & & \\
-34 & |\,\mathbf{17} & & & & & \\
34 & |\,2 & & & & & \\
0 & & & & & &
\end{array}$$

Ответ: НОД(6188, 4709)=17.

✍ ***Задачи для самостоятельного решения***

1. Методом полной индукции докажите, что $\forall n \in \mathbf{N}$ значение выражения $(n^2 - n)(n^2 + 5)$ делится на 6.
2. Дано подмножество А множества натуральных чисел, в котором 38 чисел, кратных числу 2; 41 число, кратное числу 5; 43 числа, кратных числу 7; 11 чисел, кратных числу 10; 12 чисел, кратных числу 14; 13 – кратных числу 35; 5 – кратных числу 70. Сколько элементов во множестве А?
3. Найдите все натуральные пятизначные числа вида $\overline{43a2b}$, которые делятся на 36.
4. Какие числа являются взаимно простыми:
   а) 18 и 24; б) 11 и 13; в) 467 и 468; г) 51 и 300;
   д) 117 и 120; е) 38 и 51; ж) 143 и 176; з) 110 и 130?
5. Может ли сумма двух простых чисел быть простым числом?
6. Может ли сумма двух простых чисел, каждый из которых больше 2, быть простым числом?
7. Может ли сумма двух составных чисел быть простым числом?
8. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное следующих чисел разложением их на простые множители:
   а) 24 и 30; б) 32 и 16; в) 12 и 13; г) 200 и 180;
   д) 24, 30 и 144; е) 110 и 240; ж) 187 и 1771; з) 135 и 108;
   и) 144 и 360; к) 56 и 351; л) 180, 240, и 4000;
   м) 36, 480 и 712; н) 225, 300, 405; о) 405, 448, 493;
   п)117, 234, 486; р) 24, 108, 135, 432; с) 30, 45, 60,125;
   т) 11, 12, 13; у) 3, 6, 9, 12, 15; ф) 4, 5, 6, 7, 8.
9. Найдите наибольший общий делитель следующих чисел с помощью алгоритма Евклида:
   а) 1860 и 1875; б) 32 и 16; в) 115 и 138; г) 246 и 846;
   д) 480 и 1200; е) 375 и 645; ж) 12345 и 7565; з) 588 и 1960;
   и) 588 и 3920; к) 3762 и 4446; л) 15283 и 10013; м) 2585 и 7975.
10. Вычислить:
    1) с помощью канонического разложения чисел:
    а) НОД(396, 600) и НОК(396, 600); б) НОД(528, 918) и НОК(528, 918);
    в) НОД(294, 2520) и НОК(294, 2520); г) НОД(132, 432) и НОК(132, 432);

д) НОД(720, 216) и НОК(720, 216); е) НОД(320,1008) и НОК(320, 1008);
ж) НОД(360, 756) и НОК(360, 756); з) НОД(504, 693) и НОК(504, 693).

2) с помощью алгоритма Евклида:

а) НОД(527, 868) и НОК(527, 868); б) НОД(6188, 4709) и НОК(6188, 4709);
в) НОД(6188, 4709); г) НОД(1188, 2684); д) НОД(481,1406);
е) НОД(1802, 2278); ж) НОД(462,1050); з) НОД(2812, 962);

11. Справедливы ли равенства:
а) НОД(816, 323) = 17; б) НОД(2956, 13302) = 1478?

12. Найдите натуральные числа x и y такие, что:

а) $xy = 750$, НОК$(x, y) = 150$; б) НОК$(x, y) = 432$, НОД$(x, y) = 12$;

в) $xy = 288$, НОД$(x, y) = 4$; г) $xy = 972$, $x : y = 3$.

13. Может ли НОК двух чисел быть больше их произведения?

14. Найти числа m и n, если:

а) НОК$(m, n) = 105$; НОД$(m, n) = 5$; б) $m : n = 11 : 13$; НОД$(m, n) = 5$;

в) $m : n = 8 : 7$; НОК$(m, n) = 224$; г) $m \cdot n = 294$; НОК$(m, n) = 105$;

д) $m \cdot n = 294$; НОД$(m, n) = 7$; е) $m \cdot n = 375$; НОК$(m, n) = 75$;

ж) $m : n = 17 : 14$; НОД$(m, n) = 7$; з) $m \cdot n = 1470$; НОД$(m, n) = 7$;

и) НОК$(m, n) = 240$; НОД$(m, n) = 8$; к) $m \cdot n = 1470$; $m : n = 3$;

л) НОК$(m, n) = 915$; НОД$(m, n) = 3$; м) НОК$(m, n) = 693$; $m : n = 14 : 9$.

15. Найти НОД двух чисел, если известно, что НОК этих же чисел равно их произведению.

16. Числа 4373 и 826 разделили на одно и то же натуральное число и получили в остатках соответственно 8 и 7. На какое число делили?

17. Напишите пятизначное число, которое делится:

а) на 3; б) на 4; в) на 9; г) на 4 и 5; д) на 2 и 3; е) на 4, 5 и 6.

18. Какую цифру нужно поставить вместо звездочки в число:

а) 5471*6, чтобы оно делилось:

1) на 2; 2) на 4; 3) на 3; 4) на 9; 5) на 4 и 9; 6) на 3 и 4;

б) 7142*, чтобы оно делилось на 4;

в) 3543*, чтобы оно делилось на 9?

19. Найти наименьшее натуральное число, при делении которого на 2, 3, 4, 5 и 6 в остатке получится 1.

20. Найти наименьшее натуральное число, при делении которого на 4, 5, 6, 7 и 8 в остатке получается 3.

21. По делимому *a* и делителю *b* найдите неполное частное *q* и остаток *r*, если:
а) $a = 1347$, $b = 25$; б) $a = 918$, $b = 34$; в) $a = 2965$, $b = 3101$.

22. По делимому *a* и остатку *r* найдите неполное частное *q* и делитель *b*, если:
а) $a = 147$, $r = 7$; б) $a = 131$, $r = 10$; в) $a = 147$, $r = 15$.

23. По делимому *a* и неполному частному *q* найдите делитель *b* и остаток *r*, если:
а) $a = 294$, $q = 13$; б) $a = 115$, $q = 18$; в) $a = 748$, $q = 0$.

24. При делении чисел *a, b* и *c* на 7 получили остатки 1, 4, 5 соответственно. Какой остаток при делении на 7 даст сумма $a + b + c$?

25. Докажите, что:
а) сумма трех последовательных натуральных чисел делится на 3;
б) сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 3;
в) сумма трех последовательных натуральных степеней числа 3 делится на 13;
г) если два натуральных числа при делении на третье дают одинаковые остатки, то их разность делится на это третье число;
д) разность квадратов двух последовательных нечетных натуральных чисел делится на 8;
е) произведение двух последовательных натуральных чисел при делении на 3 дает остаток 0 или 2;
ж) если числа *m* и *n* не делится на 7, но дают одинаковые остатки при делении на 7, то разность квадратов этих чисел делится на 7;
з) всякое трехзначное натуральное число, записанное одинаковыми цифрами, делится на 37.

26. Определите, будут ли справедливыми высказывания:
а) $(17^3 + 17^4) \vdots 18$; б) $(71^6 - 71^5) \vdots 35$;
в) $(23^{n+1} - 23^n) \vdots 22$; г) $(41^{n+1} - 41^{n+2}) \vdots 42$.