

О.Н. Пирютко, Р. А.Курилович (Минск, Беларусь)

НЕКОТОРЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Abstract

One of the aspects of the professional activity of a teacher is related to the organisation of the research activity of pupils, viewed as a base of developments of their intelligence, capacity to solve creative problems or to form their competencies. In this article we describe the organisation of the research, based on the integration of the algebraic and geometric material through stating and solving non standard problems, whose common feature is finding a minimal or a maximal value from the set of all possible minimal or maximal values.

Одно из направлений профессиональной деятельности учителя связано с организацией исследовательской деятельности школьников, как основы развития интеллектуальных способностей, выполнения заданий творческого характера, формирования компетенций, необходимых как внутри предметной, так и вне предметной деятельности.

В [2] были отмечены некоторые обобщенные приемы развития идеи задачи для организации учебного исследования: прием усиления условия задачи, динамизации ситуации условия задачи, усиления требования задачи, расширения теоретической базы исследования, рационального решения задачи, обобщения и конкретизации, изменения содержательной области исследования. Рассмотрим направление, ориентированное на возможности интеграции различных разделов школьного курса математики для организации исследовательской деятельности.

Традиционно, одним из эффективных методов решения задач является функциональный подход, основанный на применении свойств элементарных функций: области определения, множества значений, монотонности, ограниченности, четности и нечетности, периодичности и др.

В школьных учебниках и учебных пособиях иллюстрация указанного подхода реализуется на примерах следующего типа:

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{7-x} = x-1$.

Решение. Очевидно, что $x = 3$ - корень уравнения. Поскольку левая часть уравнения это – убывающая функция на всей области определения, а правая – возрастающая функция, то убеждаемся, что других корней нет.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = x^2 - 1$.

Найдем область определения уравнения $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1$. Таким

образом, область определения уравнения состоит из одного числа. Останется проверить, является ли число $x = 1$ корнем исходного уравнения.

Убеждаемся в этом, подставляя $x = 1$ в исходное уравнение: $x = 1 \Rightarrow \sqrt{1-1} + \sqrt{1-1} = 1^2 - 1$. Равенство верное, значит $x = 1$ - корень исходного уравнения.

Рассмотрение задач следующего содержания позволяет расширить возможности функциональной линии, оказывает существенное влияние как на содержание линии уравнений и неравенств, так и на стиль познавательной деятельности, связанной с привлечением графических моделей к решению и исследованию уравнений, неравенств и систем.

Уточнение: **max** и **min** в предложенных заданиях означает наибольшее и наименьшее значение выражения.

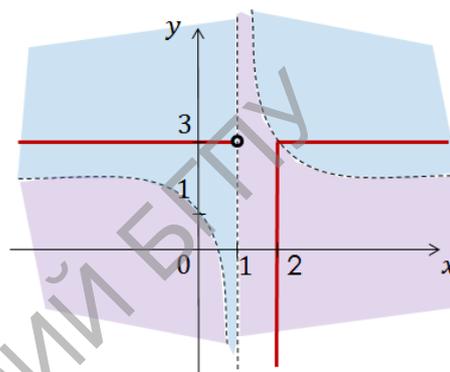
1. Решить уравнения:

а) $\max \left\{ y - 2; \frac{1}{x-1} \right\} = 1$

Решение

$$\textcircled{1} \begin{cases} y - 2 \geq \frac{1}{x-1}; \\ y - 2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} y \geq \frac{1}{x-1} + 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} y - 2 \leq \frac{1}{x-1}; \\ \frac{1}{x-1} = 1 \end{cases}; \begin{cases} y \leq \frac{1}{x-1} + 2 \\ x = 2 \end{cases}.$$



Ответ: точки, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, лежат на прямых: $y = 3$ при $x \in (-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$ и $x = 2$ при $y \in (-\infty; 3)$.

б) $\min \left\{ y - 2; \frac{1}{x-1} \right\} = 1$.

2. Построить графики:

а) $y = \max \left\{ \frac{|x|}{x^2}; |x| \right\}$; б) $f(x) = \min \left\{ \frac{|x|}{x^2}; |x| \right\}$.

3. Найдите $\max(\min \left\{ \frac{|x|}{x^2}; |x| \right\})$.

4. Найдите все значения $x > 1$ при каждом из которых наибольшее из двух чисел $a = \log_2 x + 2 \log_x 32 - 2$ и $b = 41 - (\log_2 x^2)^2$ больше, чем 5.

Задачи такого вида можно предложить учащимся на уроке по обобщению, повторению и систематизации изученного. Они носят исследовательский характер и ориентированы на формирование соответствующих познавательных операций.

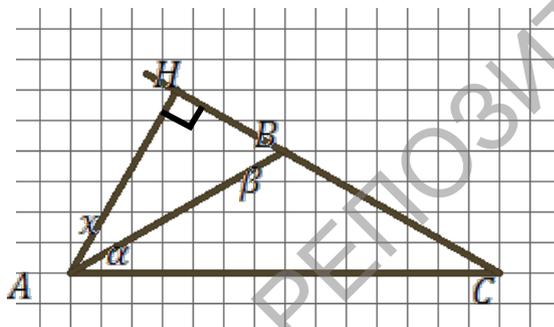
Следующий блок задач позволит внести уже знакомую идею на вычисление **max** и **min** от **max** или **min** в геометрический материал. С другой стороны, формируется способность в знакомых, традиционных и часто используемых понятиях находить новое, не исследованное. Таким понятием, которое используется в большинстве задач «на треугольник», является понятие произвольного треугольника. Как правило, результатом

требования «построить произвольный треугольник», у учащихся в тетрадах появляется изображение почти правильного треугольника. Вопрос отыскания наиболее произвольного из всех произвольных треугольников является исследовательским и обсуждается в [1]. Его развитие может быть предложено для организации исследовательской деятельности, как на уроке, так и на факультативных занятиях.

Основой исследования является определение наибольшего значения из минимальных разностей углов треугольника. Например, для прямоугольного треугольника, это будут разности $\beta - \alpha$ и $90 - \beta$, $90 - \alpha$, где величины острых углов прямоугольного треугольника α и β . Тогда, поскольку $90 - \beta = \alpha$, а $90 - \alpha = \beta$ и $\alpha \leq \beta$, то наименьшими разностями будут $\beta - \alpha$ и $90 - \beta$. Значит, следует искать наибольшее значение из наименьших из этих разностей, т.е. $\max(\min(\beta - \alpha, 90 - \beta))$ или определять $\max \min(\alpha, 90 - 2\alpha)$. А это задача уже знакома в рамках рассмотренных алгебраических задач.

Нами рассматривается развитие этой идеи через систему упражнений вида:

1. Из всех тупоугольных равнобедренных треугольников ABC с вершиной B высотой $АН$ найдите тот, в котором наименьший из углов BAC и $ВАН$ будет наибольшим.



Решение:

Пусть α – угол при основании, $\beta = 180 - 2\alpha$ — угол при вершине, причем $\beta > 90$, $0 < \alpha < 45$. Нужно найти $\max(\min(\alpha, x))$.

Сумма углов $\triangle ABC$:

$$2\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Сумма углов $\triangle AHB$:

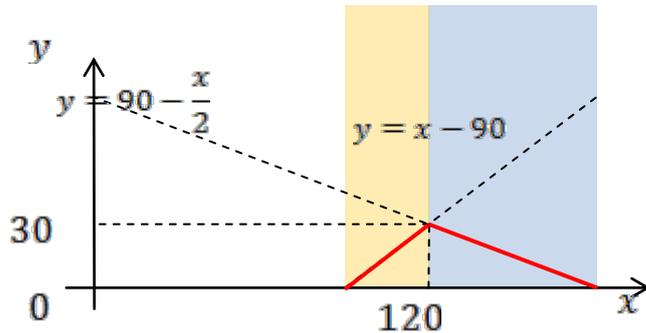
$$x + (180^\circ - \beta) + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = \beta - 90^\circ.$$

Таким образом, нужно найти такое $\beta \in (90; 180)$, чтобы наименьшая из величин $\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ и $x = \beta - 90^\circ$ была как можно больше. Формулой это записывается так: $\max_{90 < \beta < 180} \min(90^\circ - \frac{\beta}{2}, \beta - 90^\circ)$.

Построим $y = \min(90 - \frac{x}{2}, x - 90)$.

$$\textcircled{1} \begin{cases} 90 - \frac{x}{2} \leq x - 90 \\ y = 90 - \frac{x}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x \geq 120 \\ y = x - 90 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 90 - \frac{x}{2} \geq x - 90 \\ y = x - 90 \end{cases} \begin{cases} x \leq 120 \\ y = x - 90 \end{cases}$$



Максимум достигается при $x = 120$.

2. Из всех остроугольных равнобедренных треугольников с углом $\gamma \in [90^\circ; 180^\circ)$ образованным между прямой, выходящей из угла при основании, и боковой стороной треугольника найти тот, у которого наименьший из углов $\gamma - \alpha$ и $\gamma - \beta$ будет наибольшим, где α - величина угла при вершине треугольника, β - величина угла при основании треугольника.

Дальнейшее исследование связано с поиском способов построения выявленных видов треугольников без транспортира. Один из подходов, который также выводит на интеграцию различных разделов математики, связан с изучением цепных дробей: например, произвольный прямоугольный треугольник ($30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$). Отношение его катетов равно

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} &= 1 + \sqrt{3} - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{2+\sqrt{3}-1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}} \\ &= \dots \end{aligned}$$

«Обрывая» эту дробь в разных местах, получаем все более точные приближения числа $\sqrt{3}$ обыкновенными дробями:

$$1 + \frac{1}{1} = 2 ; 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}.$$

Таким образом, построение указанного

треугольника по его катетам (5 и 3) будет достаточным приближением к произвольному.

Мы рассматриваем возможность применения цепных дробей к построению равнобедренных треугольников с углами при вершине 108° и 36° с достаточной степенью точности.

1. В равнобедренном треугольнике с углом при вершине 108° найти отношение основания к боковой стороне.

