Задачи с «изюминкой» (по материалам конкурсных испытаний)

В помощь абитуриентам.

Пирютко О.Н.

Для успешного решения задачи на конкурсных испытаниях необходимо знать методы и приемы решения типичных задач из курса школьной математики, иногда знание удачных алгоритмов помогают быстро получить ответ к задаче. Но, как правило, для проверки подготовленности абитуриента к деятельности по выбранной дисциплине во всех направлениях, включая и владение мыслительными операциями (анализа, синтеза, аналогии, обобщения и пр.) предлагаются, так называемые, задачи с «изюминкой».

Они могут быть несложными, но «очевидный» ответ оказывается неверным из-за отсутствия полного анализа условия задачи. Задачи могут быть и достаточно сложными, и все известные традиционные приемы их решения «не работают». Тогда можно посмотреть на конструкцию задачи «с другой точки зрения». Еще один вид задач связан с противоречием, возникшим в результате решения как будто бы стандартной задачи. Это противоречие, как правило, связано с неполным анализом условия задачи и его числовых данных. Большой класс задач, в которых есть стандартные «ловушки», задачи решаются алгоритмически, но не все шаги алгоритмического предписания выполнены точно, и поэтому возникает типичная ошибка в решении. К этому же классу задач можно отнести и необоснованное применение в решении свойств математических объектов. Рассмотрим примеры таких задач.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Задача 1

Чтобы успеть на последний электропоезд, семье из 4- х человек нужно пройти по пешеходному мосту. Одновременно по мосту могут идти не более двух человек, причем в виду темного времени суток, непременно, с фонариком. Если мост проходят двое, то они двигаются со скоростью того,

кто идет медленнее. За какое минимальное время пройдут мост все члены семьи, если известно, что в одиночку Юра может пройти этот мост за 2 минуты, Катя – за 4 минуты, Игорек – за 10 минут, а Мария Ивановна – за 16 минут? Фонарик у семьи только один.

1) 34мин. 2) 32 мин. 3) 24 мин. 4) 28 мин.**5) 30 мин.**

Решение

Типичный неправильный ответ 1) – в качестве «сопровождающего» выбирается Юра, как самый быстрый. Тогда как стратегия «быстрый – с быстрым», «медленный – с медленным» приводит к правильному ответу.

Правильный ответ 5).

Задача 2

Три хозяйки приготовили одинаковые обеды, каждая для своей семьи, на общей печке. Первая положила в топку 3 полена, вторая- 5 , а третья, не имевшая поленьев, предложила им 80 рублей. Как по справедливости хозяйки должны разделить эти деньги, если дрова прогорели полностью

1) 30 и 50 рублей; 2)20 и 60 рублей; **3) 10 и 70 рублей;** 4) 40 и 40 рублей;

5) 5 и 75 рублей.

Решение

Типичный неправильный ответ - 1), «изюминка» в том, что две хозяйки с поленьями тоже их использовали и должны получить деньги только за неиспользованные ими поленья. 8/3 полена требуется на приготовление одного обеда, что стоит 80 рублей, следовательно, одно полено стоит

30рублей: (80: 8/3= 30), тогда первой хозяйке нужно отдать

30·3 - 80=10(рублей), а второй – 50·3 – 80 =70(рублей).

Правильный ответ 3).

Задача 3

Решите неравенство $\left|x^2-6x+8\right| \le (x-2)^2$

1) $\{2\}\cup[3;+\infty)$**;** 2) $(-\infty;3]$ 3); $[2;+\infty)$;4) 5) $[3;+\infty)$.

Решение

Данное неравенство равносильно неравенству:

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

$|x-2|(|x-4|-|x-2|)\le 0$, потеря решения x =2 происходит из-за неверного применения алгоритма решения неравенств. Например, применяя обобщенный метод интервалов для решения рациональных неравенств, получим:

$$|x-2|(|x-4|-|x-2|)\le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(-2)(2x-6)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2; \\ x\ge 3 \end{array}\right.$$

Правильный ответ 1).

Задача 4

Решите уравнение:

$$\mathbf{sin}\, x = 2\cdot \mathbf{sin}\, 47^\circ \mathbf{cos}\, 44^\circ.$$

1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$ **;2) ∅;** 3) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$;4) $\frac{3\pi}{2}$ **;**5) $\frac{5-p\pi}{6}$, где p - целое.

Решение

Применение формул тригонометрии не дает результата, «взгляд с другой точки зрения»: $\sin 47^\circ > \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 44^\circ > \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тогда $\sin x = 2\sin 47^\circ \cos 44^\circ > 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$, следовательно, уравнение не имеет решения.

Правильный ответ 2).

Задача 5

Сколько корней имеет уравнение $\mathbf{cos}\, x = \frac{x}{10}$?

1)7; 2) 8;3) 3;4) 6;5)1.

Решение

Типичная ошибка в применении неверной аналогии (неверный ответ № 4). Рассматривая промежуток $x\in[0;3\pi]$, где графики функций y= cosx и y=x/10 могут иметь точки пересечения, выделяем два промежутка, функция y = cos x неотрицательна. На этих промежутках есть три точки пересечения. Но аналогия с рассмотренным промежутком и промежутком $[-3\pi;0]$ неверна,

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

на нем будет четыре точки пересечения графиков, по две на каждом из промежутков, где функция y= cosx принимает отрицательные значения. Правильный ответ 1).

Задача 6

Найдите множество значений функции

$$y=\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\sin x}$$

1.[2;+∞); 2.(0;1/4]∪[4;+∞)3**.** (-∞;1/4] ∪[4;+∞) **4.[2;4];** 5. $\left[2;2\sqrt{3}\right]$

Решение

Заметим, что $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}=2-\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}+2}$, а данная функция примет вид y= $(\sqrt{3}+2)^{\sin x}+\frac{1}{\left(\sqrt{3}+2\right)^{\sin x}}$. Далее, из свойства $a+\frac{1}{a}\geq 2, a>o$ делается неверный вывод о множестве значений – №1). Полный анализ всех условий позволяет получить верный ответ. Эта функция четная и периодическая, поэтому можно рассмотреть множество значений данной функции при изменении sinx от нуля до 1 для $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$. При этих условиях функция $y=t+\frac{1}{t}$ ($t=(\sqrt{3}+2)^{\sin x}$) возрастающая, непрерывная, поэтому ее наименьшее значение равно 2, а наибольшее 4, поэтому множество значений данной функции промежуток **[**2;4].

Правильный ответ 4).

Задача 7

Решите уравнение $2^x\,5^{1/x}=2\cdot5$.

1.1, $\log_2 5$; 2.1; 3. $\log_2 5$; 4. ±1; 5.2$\log_2 5$.

Решение

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Типичный неверный ответ № 2) получен из-за неправильного применения свойств степеней: из равенства произведений степеней не следует равенство показателей этих степеней, например, $2^{\log_2 8}5^{\log_5 1{,}125} = 2\cdot 5$

Верное решение:

Прологарифмируем левую и правую части уравнения $2^x 5^{1/x} = 2\cdot 5$

по основанию 2, получим уравнение, равносильное данному:

$$\log_2 2^x 5^{\frac{1}{x}} = \log_2 2\cdot 5 \Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 5^{\frac{1}{x}} = \log_2 2 + \log_2 5 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x}\log_2 5 = 1 + \log_2 5$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 - x(1+\log_2 5) + \log_2 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \log_2 5 \end{array}\right.$$

Правильный ответ 1).

Задача 8

В цилиндрическую банку с водой поместили шарик радиуса $2\sqrt{6}$. Радиус основания цилиндра равен 6. Шарик опустился на дно, а поверхность воды оказалась касательной к шарику. Может ли произойти то же самое, если радиус шарика будет равен:

1. $\sqrt{6}$; **2.** $6-\sqrt{6}$; 3**.4;** 4. $\sqrt{6}-2$;5.Не может быть ни при каком значении r.

Решение

Довольно часто выбирается неверный ответ 5)

Объем воды в банке без шариков – один и тот же. Его можно найти дважды: с первым и со вторым шариками: $36\pi\cdot 2r_1 - \frac{4}{3}\pi r_1^3 = 36\pi\cdot 2r_2 - \frac{4}{3}\pi r_2^3$. Поскольку радиусы шариков не равны, то из предыдущего равенства будем иметь:

$18 = \frac{1}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ или

$r_2^2 + 2\sqrt{6}r_2 - 30 = 0$, откуда $r_2 = 6-\sqrt{6}$. Правильный ответ 2).

Задача 9

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

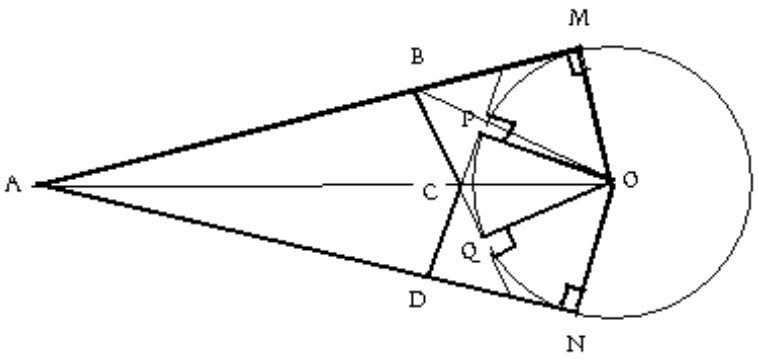
В основании четырехугольной пирамиды лежит выпуклый четырехугольник, две стороны которого равны 6 , а две другие 10. Высота пирамиды равна 7. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45º. Найдите объем пирамиды (в см ^{3}).

1.784; 2. 392;**3. 196;** 4.98;5.Такой пирамиды не существует.

Решение

Стандартное «решение» (возможно даже и без чертежа): «из того условия, что углы наклона граней равны следует, что высота проектируется в центр вписанной в четырехугольник окружности, радиус который находится из прямоугольного треугольника с катетами, равными высоте пирамиды и радиусу вписанной окружности и равен 7 см, но тогда площадь основания равна 16·7 = 112(см^2), что больше наибольшей возможной площади основания 6·10=60(см^2)».Противоречие. Причина в том, что боковые грани пирамиды к плоскости основания могут быть наклонены под углом 45º, а к основанию пирамиды – под углом 135º. Рассмотрим этот случай. Для решения задачи изобразим основание ABCD такой пирамиды. Двугранные углы пирамиды при ребрах CD и CB – равны по 135º, а при ребрах AD и AB равны по 45º.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ



Откуда следует, что высота пирамиды проектируется в центр окружности, касающейся продолжения сторон четырехугольника ABCD. Тогда площадь основания пирамиды равна удвоенной разности площадей треугольников OBA и OBC, а именно AB·OM - OQ·BC = (10- 6)·7=28(см^2). Объем пирамиды равен 196см^3. Правильный ответ 3).

Задача 10

Центры двух кубов, с ребром, равным единице, совпадают. Объем их общей части:

1) больше π/6; 2) меньше π/6;3) равен π/6; 4) больше π/3; 5) равен π/3.

Решение

Построение общей части двух кубов требует рассмотрения различных случаев расположения их вершин относительно общего центра и соответственно громоздких вычислений.

Посмотрим на эту конструкцию «с другой точки зрения»:

Каждый из кубов содержит один и тот же шар диаметра 1, объем которого равен π/6. Поэтому правильный ответ 1).

Задача 11

Решите уравнение:

$$2\sqrt{3}\sin 5x - \sqrt{3}\sin x = \cos 24x \cos x + 2\cos 5x - 6$$

1. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ 2. $\frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ 3. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ 4. π/2 + πn, n∈Z;

5. $(-1)^n \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + \pi n, n \in Z.$

Решение

Нетрадиционный подход или другой взгляд на применение формулы $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi)$, где $tg\varphi = \frac{b}{a}, a > 0$ позволяет привести данное уравнение к виду: $4\sin(5x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3 + \cos^2 24x}\sin(x + \delta) - 6$, где $tg\delta = \frac{\cos 24x}{\sqrt{3}}$.

Поскольку левая часть полученного уравнения не меньше -4, а правая – не больше, то равенство возможно только в случае выполнения условий:

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

$\begin{cases}\cos^2 24x = 1,\\ 5x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z\\ \sin(x+\delta) = 1\end{cases}$. Решение системы $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in Z$ и будет решением данного уравнения. Правильный ответ 1).

Задача 12

Найдите сумму действительных корней уравнения:

$x^2 + 4x - 9 - 2\sqrt{x^2+4x} + 4\sqrt[4]{x^2+4x} = 6(2\sqrt[4]{x^2+4x} - 1)$

1.4; 2.8; **3. -4;** 4.- 8; 5.-2

Решение

Очевидная замена $\sqrt[4]{x^2+4x} = t$ приводит к уравнению

$t^4 - 2t^2 - 8t - 3 = 0$, можно догадаться, как разложить многочлен в левой части на множители и получить:

$t^4 + 2t^2 + 1 - 4t^2 - 8t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t^2+1)^2 - 4(t+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 2t - 1)(t^2 + 2t + 3) = 0$

Дальнейшее решение очевидно и приводит к правильному ответу 3).

Задача 13

Найдите высоту правильной пирамиды, вписанной в шар радиуса 5, если радиус окружности, описанной около основания пирамиды, равен 4.

1.3; 2.8; **3.2 или 8;** 4.3; 5.10.

Решение

Как правило, дается только один ответ № 2). Он соответствует случаю расположения вершины пирамиды и ее основания по разные стороны от центра шара.

Возможен и второй случай – вершина пирамиды и ее основание расположены по одну сторону от центра. Тогда получаем правильный ответ 3)

Задача 14

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Числа $\sqrt{2}\cos x, \sqrt{\cos 2x}, 1/2\cos(x+\frac{\pi}{4})$ являются членами арифметической прогрессии с номерами k, k+1, k+2 соответственно. Найдите все значения x и k, при которых пятый член этой прогрессии равен $\frac{16}{\sqrt{5}}$.

1. k= 5, $\frac{\pi}{3}+2\pi m, n\in Z$ 2.k=16, $\frac{3\pi}{4}+\pi m, n\in Z$ 3. ни при каких значениях x и k.

4. k=10, $\pi/2 + \pi n$, $n\in Z$; **5. k= 18,** $x=\pm\arccos(\frac{3}{\sqrt{10}})+2\pi m, n\in Z$ **.**

Решение

По характеристическому свойству арифметической прогрессии будем иметь:

$$\sqrt{\cos 2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos(x+\frac{\pi}{4})(1)$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos(x+\frac{\pi}{4})=$$

$$=\frac{1}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{4}\cos(x+\frac{\pi}{4})=$$

$$\frac{1}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\frac{3}{4}\cos(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{\cos 2x}$$

$$\left(\frac{1}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\frac{3}{4}\cos(x+\frac{\pi}{4})\right)^2=\left(\sqrt{\cos 2x}\right)^2$$

$$\frac{9}{32}(1+\cos(2x+\frac{\pi}{2}))+\frac{1}{8}(1+\cos(2x-\frac{\pi}{2}))+\frac{3}{4}\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})=\cos 2x$$

$$\frac{13}{32}-\frac{5}{32}\sin 2x+\frac{3}{8}\cos 2x=\cos 2x$$

$$13 = 5\sin 2x - 20\cos 2x$$

$$33\sin^2 x-10\sin x\cos x-7\cos^2 x=0$$

$$33\mathrm{tg}^2 x - 10\,\mathrm{tg}x - 7 = 0$$

$$\mathrm{tg}x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 x=\frac{9}{10}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{3}{\sqrt{10}}\\ \cos x=-\frac{3}{\sqrt{10}}\end{array}\right.$$

$$\mathrm{tg}x=\frac{7}{11}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{11}{\sqrt{170}}$$

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Проверка показывает, что все найденные значения cosx удовлетворяют уравнению (1). Найдем k- ый, (k +1)- ый члены и разность прогрессии для всех найденных значений cosx:

$$\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow d=-\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{или} \quad \frac{11}{\sqrt{85}},\frac{6}{\sqrt{85}} \Rightarrow d=\frac{-5}{\sqrt{85}}$$

$$-\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow d=\frac{5}{\sqrt{5}} \qquad -\frac{11}{\sqrt{85}},\frac{6}{\sqrt{85}} \Rightarrow d=\frac{17}{\sqrt{85}}$$

Для первого случая

$a_5 = a_1 - \frac{4}{\sqrt{5}}$, $a_k = a_1 - \frac{k-1}{\sqrt{5}}$, откуда $a_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{k}{\sqrt{5}}$, k= 18, $x = \pm\arccos(\frac{3}{\sqrt{10}}) + 2\pi n, n \in Z$.

Проверка остальных значений решения не дает.

Трудность в решении этой задачи связана с тригонометрическими преобразованиями, «ключ» к приведению уравнения(1) к «удобному виду» - замена числа $\frac{\sqrt{2}}{2}$ значением $\frac{\pi}{4}$. Правильный ответ 5).

Задача 15

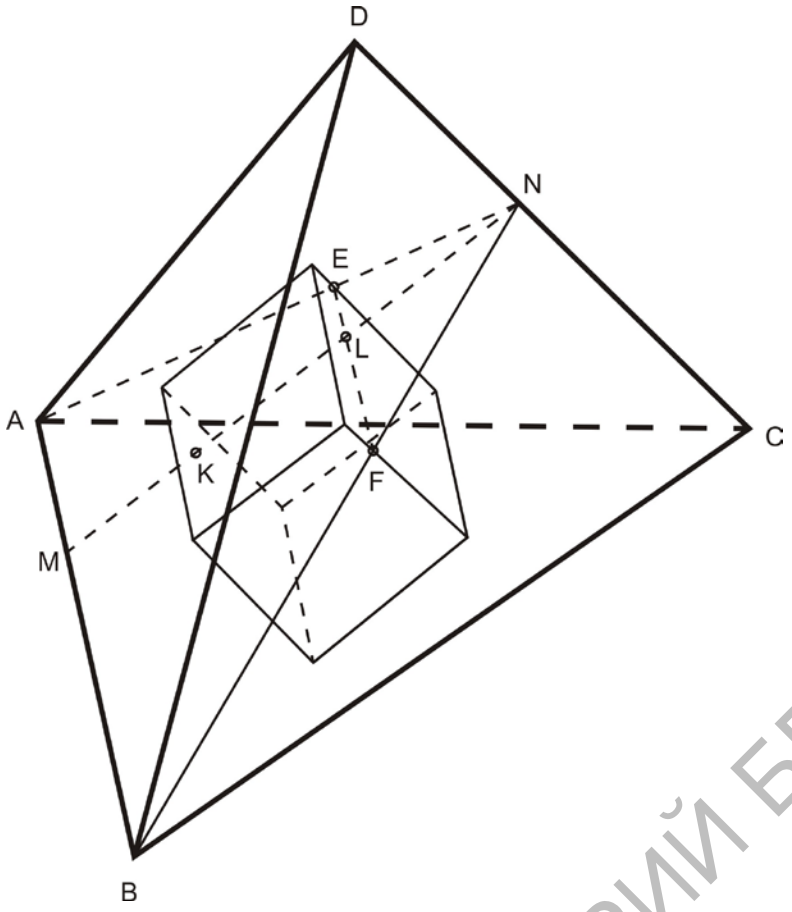
В треугольной пирамиде *ABCD* ребра *AB* и *CD* взаимно перпендикулярны и соответственно равны *a* и *b*. Общий перпендикуляр к этим ребрам пересекает ребро *AB* в точке *M* и ребро *CD* в точке *N*, *MN* = *c*. В пирамиду вписан куб так, что четыре ребра куба параллельны *MN* и на каждой грани пирамиды лежат ровно две вершины куба. Найти ребро куба.

1. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-2}$; 2.(a + b+ c)/2; 3.a – b+ c; 4.a + b- c; **5.** $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}$.

Решение

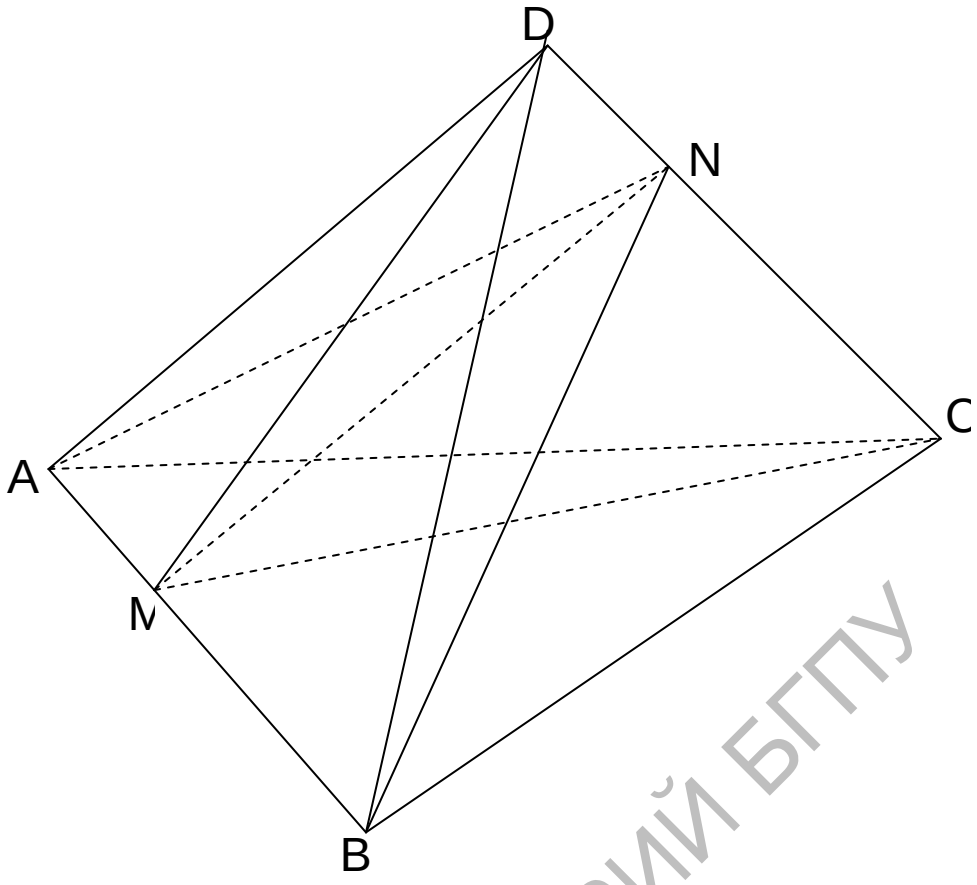
Конечно, довольно сложно построить конструкцию, описанную в условии задачи:

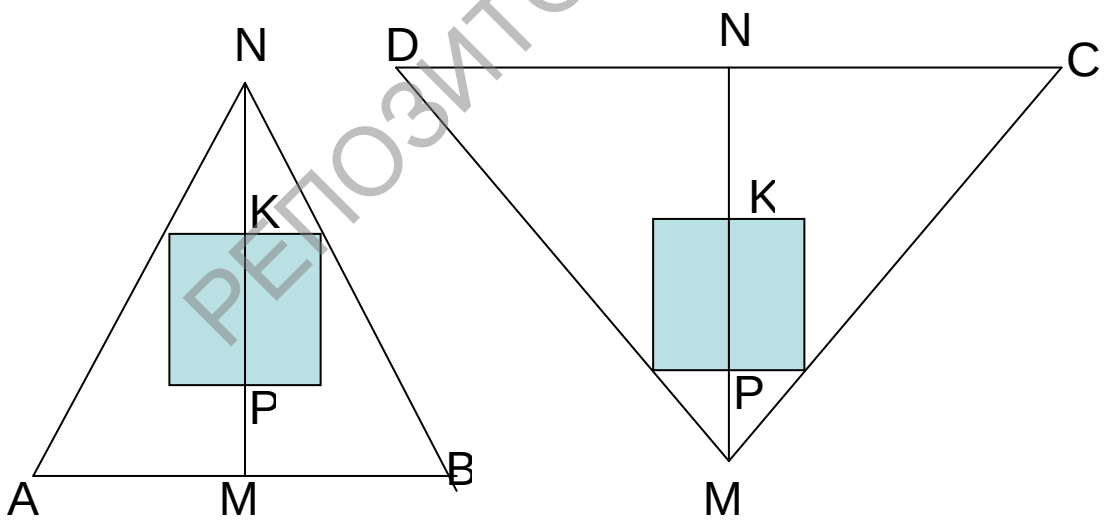
РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ



Но это делать необязательно. Достаточно провести полный анализ условия задачи. Общий перпендикуляр MN двух скрещивающихся перпендикулярных прямых AB и CD лежит в плоскости, проходящей через одну из них и перпендикулярной другой, т.е. на пересечении двух плоскостей ANB и DMC. Так как прямые MN, DC, AB – попарно перпендикулярны, а одно из ребер куба параллельно прямой MN, то прямые DC, AB задают направления двух других перпендикулярных ребер. Следовательно, каждая из плоскостей ANB и DMC параллельна двум перпендикулярным граням куба, а, следовательно, сечения куба этими плоскостями – квадраты, которые содержат часть отрезка MN – отрезок PK.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ





РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Обозначив сторону квадрата через x, из подобия двух пар треугольников получаем:

$\frac{x}{a}=\frac{NK}{c}$, $\frac{c-x-NK}{c}=\frac{x}{b}$. Сложим эти равенства, получим: $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=1$, откуда

Ребро куба равно $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}$.

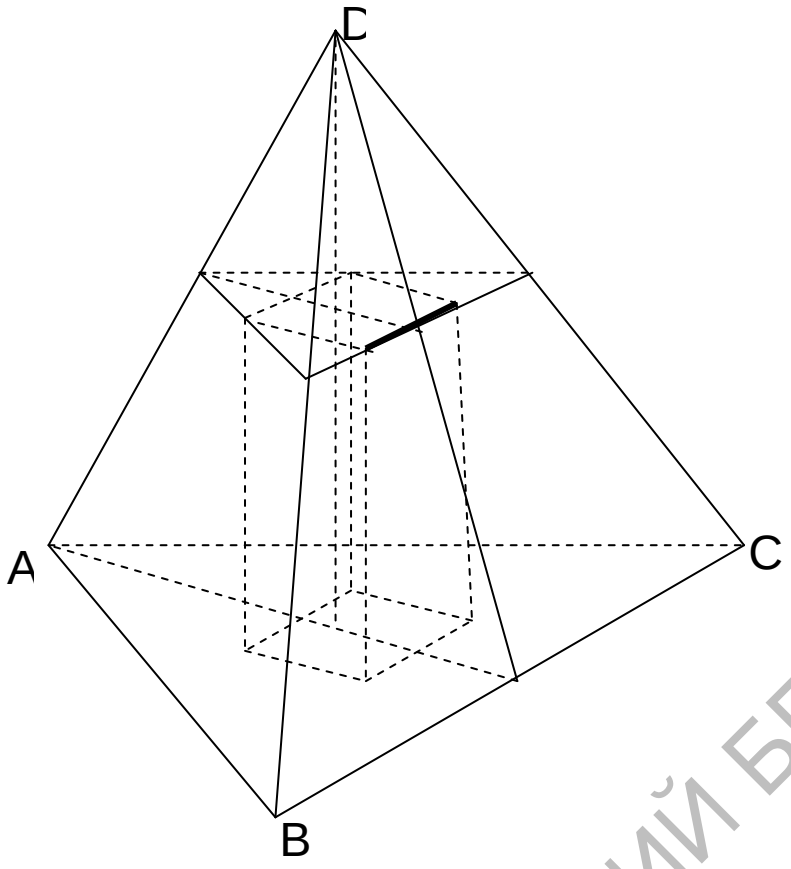
Задача 16

В правильную треугольную пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед, основание которого – квадрат. Основание параллелепипеда лежит на основании пирамиды, две вершины верхнего основания лежат в одной боковой грани пирамиды, а две другие – по одной в двух других боковых гранях. Найдите сторону основания прямоугольного параллелепипеда, если высота параллелепипеда в два раза больше стороны основания, боковое ребро пирамиды наклонено к основанию под углом 60º, сторона основания пирамиды равна 2.

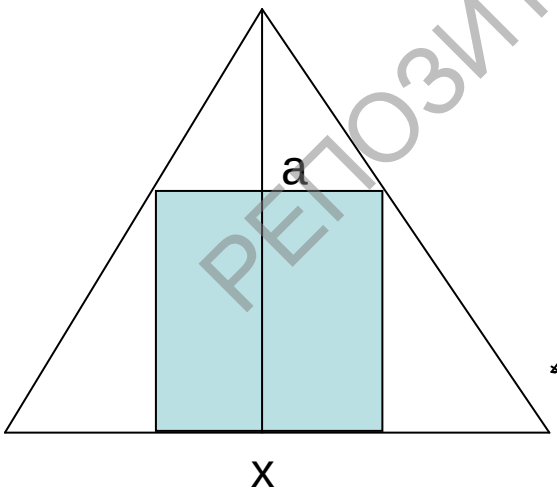
Решение

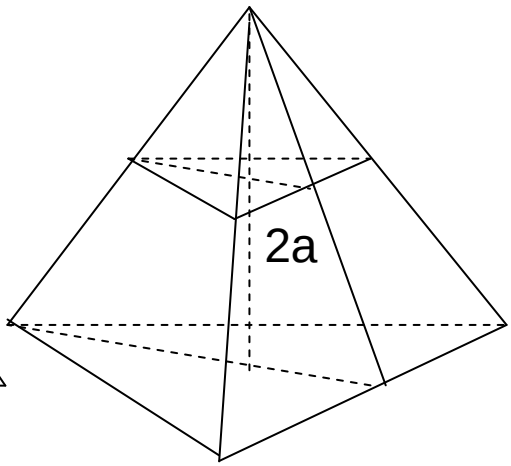
Можно выполнить изображение конструкции, при этом лучше начать с сечения пирамиды плоскостью, содержащей верхнее основание параллелепипеда. Ясно, что в изображение сечения (правильный треугольник) будет вписан квадрат (верхнее основание параллелепипеда) так, что две его соседние вершины лежат на стороне треугольника, а две другие – на двух других его сторонах. Нижнее основание будет ортогональной проекцией верхнего на плоскость основания пирамиды.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ



Но после предварительного анализа конструкции становится ясно, что можно не выполнять все изображение, а изобразить правильный треугольник





с вписанным в него квадратом и правильную пирамиду с сечением, параллельным основанию.

Обозначим сторону треугольника- сечения через x, а сторону квадрата через a,тогда из подобия треугольников получим:

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

$$\frac{a}{x}=\frac{x\frac{\sqrt{3}}{2}-a}{x\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow a=\frac{x}{\sqrt{3}+2}(1).$$

По углу наклона бокового ребра к основанию найдем высоту пирамиду

$h=\frac{2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}=2$.

Коэффициент подобия треугольника - сечения и основания пирамиды равен отношению расстояний от вершины до сечения и до плоскости основания, т.е.k= $\frac{2-2a}{2}=1-a$, поэтому x =2(1-a). Подставляя это значение в равенство (1), получим a = $\frac{2}{\sqrt{3}+4}$.

1. $\frac{2}{\sqrt{3}+4}$; 2. $\frac{3}{\sqrt{3}+5}$.; 3. $\sqrt{3}+1$**;** 4. $\sqrt{3}+1$; 5.1.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Цену на одну книгу сначала повысили на 50 %, а потом понизили на 50 %, а на вторую книгу - сначала понизили на 50 %, а потом повысили на 50 %. В результате разность цен между ними составила 600 рублей. Первоначальная разность цен (в рублях) равна:

1.600; 2.0;**3.800;** 4.1200; 5. Невозможно определить.

Задача 2

В результате применения новой технологии скорость выполнения задания увеличилась на 25 %. Тогда время выполнения задания снизилось на:

1) 25%. 2)50%. **3) 20 %.**4) 40% 5) 30 %.

Задача 3

Книга – двухтомник стоит 480 рублей, при этом первый том дешевле второго на 40%.Сколько рублей стоит первый том?

1)200; **2) 180;** 3) 160; 4) 240; 5) 360.

Задача 4

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

В судне возникла течь, и один из отсеков судна был затоплен. Команда их 10 матросов откачает воду из отсека за 6 часов, команда матросов из 14 – за 4 часа. За сколько часов откачают воду 18 матросов?

1.7;2.8;**3.3;**4.9;5.Нет решения.

Задача 5

Одну из сторон прямоугольника увеличили на 25%. На сколько процентов нужно уменьшить другую сторону, чтобы вернуть площадь к прежнему значению?

1) 25%. 2)50%. **3) 20 %.**4) 40% 5) 30 %.

Задача 6

Решите уравнение: $(\sin x)^{x^2-x} = (\cos x)^{x^2-x}$

1. $0;\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2};2\pi$. 2. 1;π;3. 2π; π;4. 0;1. **5.** $1;\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$.

Задача 7

Найдите сумму действительных корней уравнения

($x^2-x-1)^2-x^3=5$

1.4; 2.8; 3. -4; 4.- 8; **5. 2**

Задача 8

Найдите сумму действительных корней уравнения $x^4+8x-7=0$

1.- $\sqrt{2}$; **2.** $\sqrt{2}$ **;** 3. -4; 4.- 8; 5. $\sqrt{3}$

Задача 9

Решите неравенство:

$(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}\geq 0$

1. $\{1\}\cup[2;+\infty)$2. [2;+∞)3. [-2; 2) 4.(-2+∞).[-2;+∞)

Задача 10

Решите неравенство $\sqrt{\cos x}\geq\sqrt{cox2x}$

1. $x\in\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right], n\in Z$ 2.-π/2+πn/2,n∈Z 3. π+ πn, n∈Z;4. π+4πn, n∈Z.5 $x\in\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right], n\in Z$

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Задача 11

Решите неравенство:

lg sinx + lg cosx < 0

1.(2πn;π/2+2πn), n∈ *Z* 2. (4; 5π/)3. (π/2; 5π/2).4. 5π/2.5.(1;π/2).

Задача 12

Найдите множество значений функции

$y = 2\sin^2 x - \sin x$

1.(2;+∞);2.(0;1/4]∪[4;+∞)3. (-∞;1/4] ∪[4;+∞) **4.[-1/8;3];** 5. $[2;2\sqrt{3}]$.

Задача 13

Внутри треугольника имеются две точки. Расстояния от одной из них до сторон треугольника равны 1,3 и 15, а до другой (в том же порядке) 4,5, и 11.

Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

1.4; 2.8; 3. 7; 4.9; 5.5.

Задача 14

В четырехугольной пирамиде SABCD (четырехугольник ABCD выпуклый) боковые ребра SA,SB, SC попарно перпендикулярны и имеют длину 3. Боковое ребро SD равно 9. Найдите наибольший возможный объем пирамиды SABCD.

1.27; **2.3**$\left(\sqrt{13}+1\right)$**;** 3. $\left(\sqrt{13}+1\right)$**;** 4.9; 5.5$3\sqrt{6}$.

Задача 15

Найдите количество корней уравнения $\cos 4x \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = -1$ на $\left[-\frac{7\pi}{2};3\pi\right]$

1.4**; 2.3;** 3. 7; 4.9; 5.5.

В подборке задач использованы задачи вступительных экзаменов в МГУ, МФТИ, ИКСИ, материалы ЦТ.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ