Рубрика: Обратная связь

ПРОДОЛЖЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ЕГО БИССЕКТРИСАМ

О.Н. Пирютко,

Белорусский государственный педагогический университет им М.Танка

(Минск)

e-mail: Elena @ mail. By

В статье продолжается обсуждение вопроса о существовании и единственности треугольника, заданного своими высотами, медианами, биссектрисами, затронутого в предыдущих публикациях журнала. Предложены доказательства равенства треугольников по двум его сторонам и биссектрисе, а в случае остроугольного треугольника – по двум биссектрисам и стороне.

Ключевые слова: треугольник, биссектрисы треугольника, признаки равенства треугольников.

В статье А. Жукова, И. Акулича «Однозначно ли определяется треугольник?» («Квант», 2003, № 1, с. 29 –31) и недавней статье А. Жукова «Биссектрисы задают треугольник» («Математика в школе», 2010, № 5, с. 64-65) обсуждался вопрос о существовании и единственности треугольника, заданного своими высотами, медианами, биссектрисами. Наибольшие трудности были связаны с рассмотрением биссектрис. Нам представляется интересным продолжение исследований, в частности, доказательство существования и единственности треугольника по комбинациям его сторон, медиан, высот, биссектрис.

Если с высотами и медианами вопрос решается без затруднений традиционными методами, то с биссектрисами требует поиска нестандартных приемов. Предлагаем доказательства равенства треугольников по двум его сторонам и биссектрисе и в случае остроугольного треугольника – по двум биссектрисам и стороне.

Задача 1.

Доказать равенство двух треугольников по двум сторонам и биссектрисе.

Доказательство.

Требуется доказать следующий признак: «если две стороны и одна из биссектрис одного треугольника равны двум сторонам и соответствующей биссектрисе другого треугольника, то такие треугольники равны».

Пусть даны два треугольника: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$. Обозначим $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, l_a (соответственно l_b и l_c) – биссектриса из вершины A (соответственно B и C), и аналогично для треугольника $A_1B_1C_1$.

Предположим, что $b = b_1$, $c=c_1$. Рассмотрим первый случай, когда биссектрисы проведены к третьим сторонам треугольников: $l_a = l_{a_1}$. Не нарушая общности, предположим $\angle A \geq \angle A_1$. Тогда $\cos\frac{A_1}{2} \leq \cos\frac{A}{2}$. Учитывая, что $b = b_1$ и $c = c_1$, имеем $l_a = \dfrac{2\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{b}} \geq l_{a_1} = \dfrac{2\cos\frac{A_1}{2}}{\frac{1}{c_1}+\frac{1}{b_1}}$,

, причём равенство возможно только в случае равенства углов A и A_1, откуда и следует равенство треугольников.

Рассмотрим второй случай, когда биссектрисы проведены к одной из равных сторон: $l_c = l_{c_1}$ (случай $l_b = l_{b_1}$ рассматривается аналогично). По формуле, выражающей длину биссектрисы через стороны треугольника, получим: $l_c{}^2 = ab\left(1-\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right)$ и $l_{c_1}{}^2 = a_1b_1\left(1-\dfrac{c_1^2}{(a_1+b_1)^2}\right)$. Следовательно, если

$a > a_1$ (соответственно $a < a_1$), то $l_c > l_{c_1}$ (соответственно $l_c < l_{c_1}$). Значит,

$a = a_1$, откуда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Таким образом, получили признак равенства треугольников по двум сторонам и биссектрисе.

Задача 2.

Доказать, что два остроугольных треугольника равны по стороне и двум биссектрисам, проведенным к двум другим сторонам.

Доказательство.

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых равны биссектрисы AL и A_1L_1, BM и B_1M_1 и стороны AB и A_1B_1. Покажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Если углы, прилежащие к сторонам AB и A_1B_1, равны, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Таким образом, достаточно показать, что равенство биссектрис $AL=A_1L_1$ и $BM=B_1M_1$ невозможно в каждом из двух следующих случаев:

1. $\angle A \le \angle A_1,\ \angle B \le \angle B_1$, причём хотя бы одно из неравенств строгое;

2. $\angle A < \angle A_1$ и $\angle B > \angle B_1$,

остальные случаи рассматриваются аналогично.

Разберем сначала первый случай.

Привлекая теорему синусов для треугольников ABM и ABL соответственно, получим:

$$AB:BM = \frac{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}{\sin A} = \cos(B/2) + \frac{\sin(B/2)}{\sin(A/2)}(\cos(A/2) - \frac{1}{2\cos(A/2)}),$$

$$AB:AL = \frac{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}{\sin B} = \cos(A/2) + \frac{\sin(A/2)}{\sin(B/2)}(\cos(B/2) - \frac{1}{2\cos(B/2)}).$$

Аналогичные приведенным будут отношения и для треугольника $A_1B_1C_1$.

Заметим, что либо $\frac{\sin(B/2)}{\sin(A/2)} \ge \frac{\sin(B_1/2)}{\sin(A_1/2)}$, либо $\frac{\sin(A/2)}{\sin(B/2)} \ge \frac{\sin(A_1/2)}{\sin(B_1/2)}$, так как рассматриваемые величины положительные и взаимно-обратные. Не нарушая общности рассуждений, будем считать $\frac{\sin(B/2)}{\sin(A/2)} \ge \frac{\sin(B_1/2)}{\sin(A_1/2)}$. Кроме того, из предположений случая 1 следует $\cos(B/2) \ge \cos(B_1/2)$ и $(\cos(A/2) - \frac{1}{2\cos(A/2)}) \ge (\cos(A_1/2) - \frac{1}{(2\cos(A_1/2)}) \ge 0$ (функция $y = x - \frac{1}{2x}$ возрастает на промежутке $(0;+\infty)$ и положительна для $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$), причём хотя бы одно из неравенств строгое. Значит, $AB: AL > A_1B_1: A_1L_1 = AB: A_1L_1$, откуда $AL < A_1 L_1$.

Рассмотрим второй случай: $\angle A < \angle A_1$ и $\angle B > \angle B_1$. Если при этом $a \le a_1$ то

$$l_b = \frac{2\cos\frac{B}{2}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}} < l_{b_1} = \frac{2\cos\frac{B_1}{2}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a_1}}.$$

Если $a > a_1$, то рассмотрим два подслучая.

Если $b \ge b_1$, то $l_a = \frac{2\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{b}} > l_{a_1} = \frac{2\cos\frac{A_1}{2}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{b_1}}$.

В подслучае $b < b_1$ обозначим p – периметр треугольника ABC (соответственно, p_1 – периметр $\Delta A_1B_1C_1$). Тогда $l_a^2 = bc(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2})$,

$\frac{l_a^2}{c} = b(\frac{p(p-2a)}{(p-a)^2}) = b\left(\frac{1-\frac{2a}{p}}{(1-\frac{a}{p})^2}\right)$; аналогично $\frac{l_a^2}{c} = b_1(\frac{p_1(p_1-2a_1)}{(p_1-a_1)^2}) = b_1\left(\frac{1-\frac{2a_1}{p_1}}{(1-\frac{a_1}{p_1})^2}\right)$.

Так как $b < b_1$, то $\left(\frac{1-\frac{2a}{p}}{(1-\frac{a}{p})^2}\right) > \left(\frac{1-\frac{2a_1}{p_1}}{(1-\frac{a_1}{p_1})^2}\right)$, а так как функция $f(x) = \frac{1-2x}{(1-x)^2}$ убывает для $x \in (0;1)$, то $\frac{a}{p} < \frac{a_1}{p_1}$, $\frac{p}{a} > \frac{p_1}{a_1}$, откуда $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} > \frac{b_1}{a_1} + \frac{c}{a_1}$ и $b > b_1$ – противоречие с условием $b < b_1$.

Таким образом, получен еще один признак равенства остроугольных треугольников по стороне и двум биссектрисам, проведенным к двум другим сторонам. Случай, когда рассматриваемые треугольники являются тупоугольными, остаётся открытым для исследования.

Фамилия И.О. Пирютко Ольга Николаевна

Место работы Белорусский государственный педагогический университет им М.Танка.

Должность Доцент кафедры математики и методики преподавания математики

Ученая степень Кандидат педагогических наук

Ученое звание Доцент

Адрес для связи 220074, Минск, ул. Берута, д.9, кор.2, кв.32

(8–029)562–74–96 e-mail: Elena @ mail. by

Дата рождения 03.12.1951

Паспорт MP2676500, выдан Фрунзенским РОВД г. Минска, 16.03.2010

403125AO67PB1