Сложные темы  в школьном курсе математики: преодоление трудностей

О.Н. Пирютко

В статье рассматриваются вопросы методики изучения сложных тем школьного курса математики с точки зрения параметров, относящих тему к сложной. Рассматриваются примеры, иллюстрирующие объективные и субъективные методические и содержательные проблемы при изучении школьного курса математики  и пути их преодоления.

Традиционно  в содержании школьного  курса математики выделяются темы, которые принято называть «сложными».  Вопрос о сложности темы требует анализа этого понятия с точки зрения объективных признаков, субъективного видения проблемы, закономерностей формирования знаний, уровня сформированности  знаний в системе  математической подготовки школьников,  компетентности учителя.

Называя тему «сложной», следует определить,  к  какой области познавательного процесса  относится это понятие, у кого  и какого рода трудности она вызывает: у учителя  в  процессе  формирования знаний, у учащихся – на каком этапе  усвоения знаний.   Значимым является вопрос о рассмотрении  темы в контексте действующих программ.  Изменение программ изменяет «сложность» изучения  традиционных тем.  Характерной является следующая ситуация:  по одним программам  изучение вопроса не вызывало трудностей (например, умение строить график линейной функции, применять ее свойства), с изменением  места функциональной линии в программе  – изучение линейной и других  функций и их свойств становится сложным.

Каковы причины, признаки, отношения,  которые делают «особенной» тему школьного курса  математики? Говоря о сложности темы, мы будем иметь в виду не только сложности в  изложение и усвоении  теории, но и  в применении  знаний в решении задач.

Выделим  методические трудности  среди возможных причин, относящих тему к трудным  вопросам для изучения.  В первую очередь,  не выполнены закономерности формирования знаний в традиционной методике. Это – одна из характерных и наиболее часто встречающаяся причина, которая любую тему школьного курса математики может перевести в разряд плохо понимаемых.   Затем, нарушена системность в формировании знаний. Любое понятие может полноценно войти в сознание учащихся лишь  пройдя путь развития от применения его в тренировочных упражнениях, до изучения всех его свойств, интеграции в различные разделы школьной  математики. Так происходит с понятием модуля числа.  Впервые познакомившись с этим понятием на уровне использования для выполнения действий с отрицательными числами, учащиеся не встречаются с системным включением этого понятия в другие разделы курса, а поэтому темы «Решение уравнений и неравенств с модулями», «Преобразования с модулями» традиционно считаются сложными.  Далее,  не проработана система задач, алгоритмов и других когнитивных схем для переработки, хранения и использования информации. Так происходит с темой «Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике», «Решение тригонометрических уравнений» и многими другими.

Многочисленные публикации, посвященные методическим «находкам» в изложении сложных тем, как правило, содержат некоторые технические приемы, систему упражнений, описание применения компьютерных технологий, иногда описаны малоизвестные технические приемы, используемые при решении задач для обеспечения высокого темпа продвижения к ответу.

Однако, как правило, отсутствует точный анализ, включающий поэлементное описание технологии изменения состояния знаний, умений, навыков, анализа происхождения типичных ошибок по теме, и точное описание методических средств, позволяющих изменить ситуацию. Какие именно этапы формирования знаний изменены, на какие мыслительные операции направлены предлагаемые средства, каков механизм изменения восприятия, переработки и использования точно сформированных знаний? Ответы на эти вопросы остаются открытыми. Приведем пример, иллюстрирующий сказанное. Традиционно сложной темой в начальных и затем – в 5- ых классах является решение уравнений, содержащих, больше двух действий. Выделим признаки, позволяющие отнести этот вопрос к сложным для изучения.

Для решения уравнения требуется:

1. Выполнить анализ уравнения: выделение его правой и левой частей, установление порядка действий в левой части уравнения, выделение компоненты, содержащей неизвестную переменную.
2.Знать правила нахождения неизвестной компоненты действий (слагаемого, уменьшаемого, …( всего 7)).
3. Уметь определять неизвестное, как компоненту какого-то действия.
4. Применять правило определения компоненты к конкретному примеру на одно действие.
5. Выделять в какой последовательности эти действия применять.

Таким образом, для решения уравнения такого вида от учащихся требуется осуществление сложной аналитико-синтетической деятельности, хранение в памяти и использование большого числа правил, с возможностью их правильного выбора.

Каждое из указанных действий основано на сложных мыслительных операциях, формирование которых требует точной реализации методических закономерностей. Нарушение первой из них (знания, на основании которых формируется новое знание, должно быть подвижным) приводит к ожидаемым трудностям. Какие же знания должны быть подвижными? Прежде всего, понятие уравнения (его признаки: равенство его левой, правой частей, наличие переменной), затем – навыки определения порядка действий в выражениях, содержащих несколько действий, затем – знания правил определения неизвестной компоненты, и осознанные действия по их применению. Нарушение подвижности в одной из этих составляющих неизбежно ведет к сложности решения уравнений такого вида.

Покажем, как точно выполнить первую из закономерностей формирования знаний для перевода осознанных развернутых действий в автоматизированные. Для этого напомним некоторые когнитивные схемы, необходимо присутствующие в формировании нужных навыков.

1. «фокус- пример» - прототип, в котором отражены и сконцентрированы типичные характеристики объекта.

Пример:

$\frac{3}{x} = 8$ фокус – пример: $\frac{6}{2} = 3$

Для решения указанных уравнений «фокус-примеры» должны быть на каждое правило нахождения неизвестного компонента действий. Целесообразно, чтобы у каждого учащегося были заготовлены таблички с «фокус - примерами», поскольку выученные формально в начальных классах правила, не являются инструментом их использования, не помогают учащимся выполнять необходимую последовательность действий.

2.Алгоритмы решения задачи, содержащие точную последовательность действий, приводящих к результату.

Рассмотрим алгоритм решения уравнений на примере, с комментариями его функций на каждом шаге.

Чтобы решить уравнение (2(x-5):10=3), нужно:

1)Подчеркнуть левую и правую части уравнений (по одну сторону и по другую сторону от равенства). *Это указание необходимо, так как «левое» и «правое» тоже является предметом усвоения.*

$$\overparen{2(x-5):3}=\overparen{10}$$

2)Установить порядок действий в левой части уравнения и обозначить номера действий.

$$\overset{2}{2}(x\overset{1}{-}5)\overset{3}{:}3=10$$

3)Выделить последнее действие и подчеркнуть его компоненты (слева и справа от последнего действия).

$$\overset{2}{2(x-5)}\overset{1}{:}\overset{3}{3}=10$$

*Второй и третий шаги алгоритма необходимы, поскольку именно выделение из целого объекта его частей, «узнавание объекта», является, как раз, предметом сложности для учащихся на этапе формирования умственных действий. Подчеркивание элемента выделяет его на передний план, происходит вычленение главного на этом шаге алгоритма.*

4)Записать подчеркнутую компоненту действия, содержащую переменную и найти ее по «фокус – карточке».

$$2(x-5)=30$$

фокус- карточка

$$\boxed{6:2=3}$$

*Применение «фокус - примеров» - необходимый этап использования информации не в виде применения формальных правил, а в виде умственных действий, направленных на анализ в виде выделения действия, его компонентов, сравнения, сопоставления, выбора, что является процессом их поэтапного формирования. Применение фокус - карточки – единственная опора для продвижения вперед, к следующему шагу алгоритма.*

5) Если неизвестную переменную нашли, то записать ответ, если нет, вернуться к пункту 1.

1 шаг

$$2(x-5)=30$$

2.шаг

$$\overset{2}{2}(x\overset{1}{-}5)=30$$

3 шаг

$$\overset{2}{2}(x\overset{1}{-}5)=30$$

4 шаг

$$x-5=30:2$$
$$x-5=15$$

фокус – карточка $\boxed{2\cdot5=10}$

Переменную не нашли, возвращаемся к первому пункту

1. шаг

$$x-5=15$$

2.шаг

$$x\overset{1}{-}5=15$$

3 шаг

$$x\overset{1}{-}5=15$$

4 шаг

$$x=5+15$$
$$x=20$$

фокус – карточка $\boxed{6-3=2}$

Основой этого алгоритма является взаимодействие между воспроизведением прежних связей и установлением новых связей при решении задач. Если прежние связи между компонентами действий не носят автоматизированный характер (в нашем случае – правила нахождения неизвестной компоненты), то для их применения нужны способы их воспроизведения и использования – когнитивные схемы. Сложная аналитико-синтетическая умственная деятельность процесса решения уравнения обеспечивается развернутостью действий, определяемых алгоритмом. Ясно, что переход от развернутых действий к сокращенным в формировании навыков связан с автоматизированным действием, которое зависит от индивидуальных особенностей учащихся. Однако автоматизированные действия не означают выключение сознания: они выполняются с участием менее напряженного внимания. Постепенно происходит отмена некоторых опор, внимание переносится на содержание других задач, в которых – решение уравнения является средством, а не целью выполнения задания.

Нарушение закономерностей формирования любого понятия – одна из диагностируемых причин сложности его усвоения.

Объективные трудности изучения некоторых значимых тем школьного курса математики определены довольно четко структурированными параметрами.

Выделим эти параметры на примере изучения темы «Тригонометрия»

1. Отсутствие пропедевтики основных понятий тригонометрии.

Например, такие понятия как поворота, угла поворота, Действительно, исключение темы «Геометрические преобразования» из школьного курса геометрии делает эти понятия новыми, а, следовательно, требующими формирования навыков их применения.

« Точка $P\alpha$ , получена при повороте точки $P_0$ вокруг начала координат на угол $\alpha$». В этой, кажущейся ясной фразе, содержится несколько неизвестных для учащихся понятий, связанных с преобразованием поворота, поэтому, действительно, без пропедевтики нет оснований для ее понимания.

2. С поздним включением в систему знаний понятия функции, графика функции знания по этому разделу становятся крайне поверхностными, подвижность знаний не обеспечивается фрагментами линейно изученной теории. Особенно сложно применение самих терминов « абсцисса», «ордината», определение координат точек, лежащих на оси, определение ординаты, абсциссы точки, построение точки по ее координатам и, особенно, обратная задача.

3. Впервые учащиеся встречаются с трансцендентными функциями

До сих пор все функции, изучаемые в школе, задавались формулами, в которых в явном виде указывалось, в каком порядке выполняются операции над значениями аргумента, для получения значений функции. Теперь же, мы фактически обращаемся к случаю, который вскользь упоминался при введении понятия функции – функция задается таблично. Объяснить учащимся источник затруднений, связанный с трансцендентностью новых функций на уровне школьной математики нельзя.

4. Радианное измерение углов. Понятие радиана, как единицы измерения угла, сводится в сознании к формальной операции – число $\pi$ заменяется на $180^o$, поэтому практически отсутствует понимание таких объектов, как значений sin1, sin 5 и т.д.

5. Отсутствие целей многочисленных тождественных преобразований, необходимой связи их с функциональной линией, не умение вывести одну формулу из другой.

6.Рассмотрение новых, практически не встречающихся свойств функций, среди которых, периодичность, ограниченность, существование обратной функции на некотором подмножестве области определения функции.

7. Необходимость применять самые сложные вычислительные операции, арифметические и алгебраические: деление с остатком, действия с корнями.

8. Необычность формы записи формул корней простейших уравнений, их зависимость от n из Z .

9. Перестройка сформированных связей с введенным прежде понятием тригонометрических функций и определение их из прямоугольного треугольника.

10. Необходимость использования во взаимосвязи различных видов и способов кодирования и переработки информации: словесно-сиволический, визуальный, предметно – практический.

11. Отсутствие практических моделей изучаемых объектов из реальной жизни, опыта учащихся, взаимосвязи с другими предметами.

12.Наличие обратных операций, выработка навыка их применения требует новых, особых мыслительных действий, которые ранее не использовались.

Выделенные объективные параметры, определяющие сложность темы, можно отнести к основным при изучении практически любой темы школьного курса математики. Наличие большинства этих параметров и делает тему трудной для учителя - в процессе формирования знаний и для учащихся - в процессе переработки и использования информации

Оценим, например, по этим параметрам тему «Логарифмы»

| Тема школьного курса математики | Отсутствие пропедевтики основных понятий изучаемой темы, системных связей | Наличие большого числа новых терминов, их соотнесение с познавательным опытом учащихся | Отсутствие необходимо и ясно поставленных целей новых вводимых операций | Перестройка сформированных связей и отношений | Отсутствие реальных моделей изучаемых объектов | Сложный вычислительный аппарат | Отсутствие интеграции с различными разделами школьного курса математики | Необходимость сочетать различные форы переработки информации. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Тригонометрия | + | + | + | + | + | + | + | + |
| Логарифмы | - | - | - | - | - | - | - | - |

1. Пропедевтика понятий степени, основание степени, показатель степени, на которых основывается новое понятие «логарифма» выполнена полно и глубоко пролонгировано, начиная с 5- ого класса (степень с натуральным показателем) до 11- ого (степень с дробным показателем). Операции со степенями прочно вошли в сознание учащихся, стали автоматизированными

и легко воспроизводимыми. Новых свойств, по сравнению с остальными функциями, логарифмическая функция не иллюстрирует. Форма записи ответов логарифмических уравнений, неравенств являются обычными, ранее используемыми.

2. Терминология этой темы практически не является новой, особенно после исключения термина «потенцирование»

3. Вводимые операции, связанные со свойствами логарифмов, являются следствиями операций со степенями, легко обосновываются.

4. Перестройка сформированных связей связана с ведением нового термина «логарифм числа по данному основанию», который заменяет понятие «показателя степени», легко автоматизируется и обеспечивается в случае необходимости, развернутостью действий.

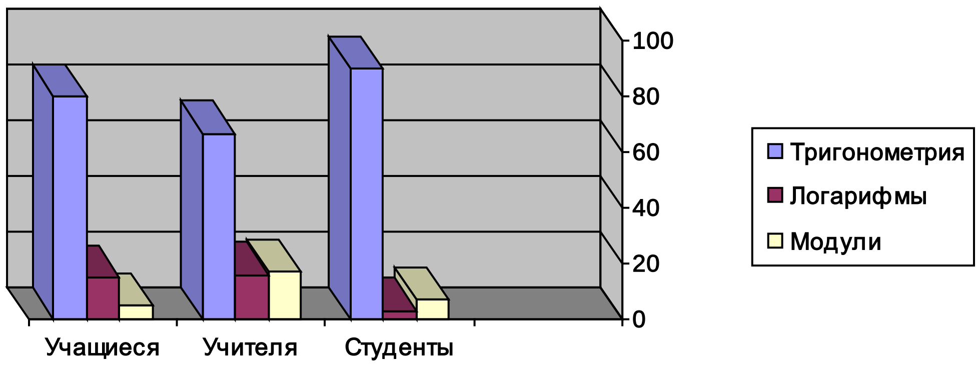
5. Реальные модели показательного роста и показательного убывания хорошо описывает показательная функция, являющаяся обратной для логарифмической.

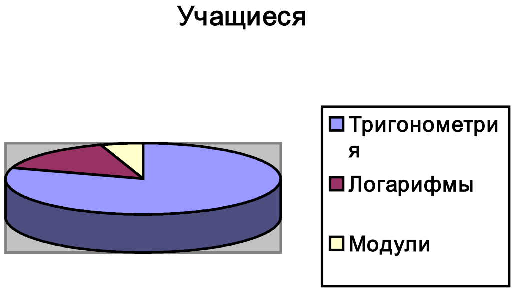
6. Вычислительный аппарат подготовлен многочисленными тождественными преобразованиями со степенями.

7. Интеграция с линией тождественных преобразований, уравнений и неравенств, функциональной линией обеспечена традиционными методами, способами и свойствами функций, легко переносимыми в новое направление, связанное со свойствами логарифмов и логарифмической функции. Новые подходы (например, замена выражения на знакосовпадающее с ним, алгоритмично, обоснованно и ожидаемо упрощает и обобщает решение неравенств).

8. Переработка информации идет в двух направлениях - словесно-символическом (небольшая группа формул и правил) и сенсорно-визуальном ( график логарифмической функции легко воспроизводим, обращение к свойствам функции, отраженным на графике, естественно и автоматизировано предыдущими операциями с графиками функций).

Все указанные элементы объективно позволяют не относить тему «Логарифмы» к сложным, что и отражено в диаграмме опроса школьников, учителей,студентов.






Какими же должны быть разработки для изучения сложных тем? Очевидно, устранение сложностей может произойти лишь системно по многим параметрам. Отметим пути преодоления трудностей по отмеченным параметрам изучения раздела «Тригонометрии».

1. Рассмотрение задач из практической области (колесо, катящееся без скольжения), физики (гармонические колебания), приводящих к необходимости изучения тригонометрических функций любого действительного аргумента

2. Применение визуального и предметно – практического способов кодирования информации: каждый учащийся изготавливает модель тригонометрического круга со всеми необходимыми элементами, которые дают возможность постоянно выполнять практические действия по определению точек поворота и их координат.

3. Формирование навыков действий с радианной мерой угла, понимание и умением использовать число $\pi$. Очевидно, необходимо в систему упражнений с координатной прямой и координатной плоскостью постоянно (на протяжении всего курса обучения) включать упражнения на координаты точек с иррациональными координатами, в частности, координатами, содержащими число $\pi$.

3.Табличное задание функции. Учитель должен отметить, что математика имеет в своем распоряжении средства, позволяющие вычислить значения тригонометрических функций с любой степенью точности (ряды). Результатом таких вычислений и являются таблицы, применяемые в школе. Дальнейшее изучение тригонометрических функций сводится во многом, к решению задач вычислительного характера. Целесообразно же активно привлекать графики тригонометрических функций для решения содержательных задач. Преимущества использования графиков тригонометрических функций связаны с тем, что усмотреть свойства и запечатлеть их в памяти с помощью графика легче, чем на круге. Вместо аргумента - угла - дуги, учащиеся пользуются привычным образом, координатной прямой. Продолжительное сосредоточение внимания только на круге приводит к тому, что недооценка графика, не обогащается опыт исследования свойств функций с различными видами графиков. Круг выступает в роли источника свойств тригонометрических функций подобно тому, как аналитическая формула для других функций является источником их свойств.

4.Сложность тригонометрических формул. Прежде всего, обоснованность введения той или иной тригонометрической формулы определяет ее дальнейшее использование. Например, для определения наибольшего или наименьшего значения функции y= a sinx+b cosx недостаточно уже рассмотренных свойств тригонометрических формул. Использование метафор, «фокус - примеров» и других когнитивных схем для хранения и переработки информации.

В рамках статьи не представляется возможным описать все направления и технологии изменения методики изучения темы. Однако они имеют место и позволяют реализовать неформальное усвоение сложной темы курса математики.

Разработки изучения сложных тем должны содержать не общие и традиционные ссылки на «развитие логического мышления вообще», «улучшения понимания», а точные операции по формированию той или иной формы мыслительной деятельности, описание и диагностику результатов их применения по параметрам сложности темы.