УДК 517.95

В. А. Шилинец, Н. Т. Стельмашук

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КВАТЕРНИОННЫХ F-МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В данной работе исследуются F-моногенные [1] кватернионные функции [2] одного класса. Для них построено интегральное представление и решена краевая задача.

Пусть D – односвязная область четырехмерного действительного евклидова пространства $E^4(t,x,y,z)$.

Рассмотрим кватернионные функции вида

$$f = f_1(t,x,y,z) + f_2(t,x,y,z)i + f_3(t,x,y,z)j + f_4(t,x,y,z)k,$$

$$p = t + \lambda_1 xi + \lambda_2 yj + \lambda_3 zk,$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 – действительные функции класса $C^1(D), 1, i, j, k$ – базис алгебры кватернионов, $\lambda_n (n = 1,2,3)$ – такие действительные числа, что $\sum\limits_{n=1}^{3} \lambda_n^2 = 1$.

Для любых точек $M(t,x,y,z)$ и $M(t^{'},x^{'},y^{'},z^{'})$ области D полагаем

$$\Delta f = f(M^{'}) - f(M), \Delta p = p(M^{'}) - p(M).$$

Определение. Кватернионная функция f называется моногенной в смысле В.С. Федорова (F-моногенной) по кватернионной функции p в области D , если существует такая кватернионная функция

$$\theta = \theta_1(t,x,y,z) + \theta_2(t,x,y,z)i + \theta_3(t,x,y,z)j + \theta_4(t,x,y,z)k$$

($\theta_i(t,x,y,z)(i = 1,2,3,4)$ – однозначные действительные функции точки (t,x,y,z) области D), что для любой фиксированной точки $M \in D$ и любой переменной точки $M^{'} \in D$ имеем $\Delta f = \Delta p\theta(M) + \alpha(M,M^{'})$, где $\frac{\alpha(M,M^{'})}{\rho} \to 0$ при $\rho \to 0, \rho = |\overline{MM^{'}}|$.

Рассмотрим следующую краевую задачу.

Задача. Пусть V – четырехмерная ограниченная область с границей σ ($\sigma \subset D, V \subset D$). Полагаем далее, что p и функция f, F-моногенная по p, определены на замкнутой трехмерной поверхности σ, гомеоморфной сфере конечного диаметра и достаточно гладкой для возможности использовать формулу Остроградского. Требуется найти в любой внутренней точке области V значение функции f , F-моногенной по p , если известны ее значения на поверхности σ.

Для функции $f = f_1(t,x,y,z) + f_2(t,x,y,z)i + f_3(t,x,y,z)j + f_4(t,x,y,z)k$ и произвольной точки $M(t_0,x_0,y_0,z_0)$, не лежащей на поверхности σ, полагаем [3]:

$$I_\sigma = \int\limits_\sigma \Bigg\{ \alpha_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \lambda_1 i \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \lambda_2 j \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \lambda_3 k \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) + \alpha_2 \left(\lambda_1 i \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) +$$

$$\alpha_3 \left(\lambda_2 j \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + \alpha_4 \left(\lambda_3 k \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \Bigg\} f d\sigma,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности σ в ее текущей точке $P(t,x,y,z)$,

$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z)^2 + (t-t_0)^2}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{t-t_0}{r^4}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x-x_0}{r^4}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{y-y_0}{r^4}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{z-z_0}{r^4}$.

Пусть M – любая данная точка области D, $M \notin \overline{V}$.

Теорема. 1. Для любой кватернионной функции f , F-моногенной по кватернионной функции p в области D , имеем $I_\sigma = 0$.

Теорема. 2. Если кватернионная функция f является F-моногенной по кватернионной функции p в области D , то для любой точки M , лежащей внутри V , имеем

$$f(M) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_\sigma \Bigg\{ \left(\alpha_1 \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \alpha_4 \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) + \left(\alpha_2 \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \alpha_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \lambda_1 i +$$

$$\left(\alpha_3 \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \alpha_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) \lambda_2 j + \left(\alpha_4 \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \alpha_1 \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \lambda_3 k \Bigg\} f d\sigma.$$

При помощи теоремы 2 и решается сформулированная краевая задача.

1. *Федоров В. С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций // Известия вузов. Математика, 1958. — № 6. — С. 257–265.
2. *Гусев В. А.* О кватернионных функциях, моногенных в смысле В.С. Федорова // Успехи математических наук, 1965. — Т. 20.— Вып. 1(121). — С. 203–208.
3. *Федоров В. С.* Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве // Известия вузов. Математика, 1957. — № 1. — С. 227–233.

Кафедра математики,
Белорусский государственный педагогический университет;
220809, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Советская,18
`shilinets@bspu.unibel.by`