ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫХ ВЕКТОР-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. А. Шилинец (Минск, Беларусь)
Shilinets@bspu.unibel.by

Цель данной работы – решение краевой задачи для одного класса функционально-инвариантных вектор-аналитических функций.

Определение 1. Следуя Рейниху, называем вектор-функцию $\bar{\sigma} = \{u, v, w\}(u, v, w$ – комплекснозначные дважды непрерывно дифференцируемые функции от координат x, y, z в некоторой области G) вектор-аналитической, если

$$div\bar{\sigma} = 0, rot\bar{\sigma} = 0. \qquad (1)$$

Если вектор-аналитической является функция $\bar{\sigma} = \{u, v, w\}$, то вектор-аналитической будем называть и гиперкомплексную функцию $\sigma = u + \lambda v + \lambda^2 w$, где 1,λ, λ^2 – база линейной ассоциативно-коммутативной алгебры с единицей над полем комплексных чисел, причем $\lambda^3 = 1$.

Заметим, что система (1) является некоторым обобщением известной системы Коши-Римана на трехмерное пространство и частным стационарным случаем системы Максвелла для электромагнитного поля в пустоте

$$div(\bar{E} + i\bar{H}) = 0, rot(\bar{E} + i\bar{H}) = \frac{i}{c}\frac{\partial(\bar{E} + i\bar{H})}{\partial t}, i^2 = -1, c = const,$$

если положить в этой системе $\bar{E} + i\bar{H} = \bar{\sigma} = \{u, v, w\}$, где $u = u(x, y, z)$ и т.п.

Определение 2. Вектор-аналитическая функция $\sigma = u + \lambda v + \lambda^2 w$ называется функционально-инвариантной, если всякая функция f, моногенная в смысле В.С. Федорова по σ, будучи записана в виде $f = p + \lambda q + \lambda^2 s$, также определяет вектор-аналитическую функцию $\bar{f} = \{p, q, s\}$, т.е. $div\bar{f} = 0, rot\bar{f} = 0$.

Было доказано, что функция $\sigma = u+\lambda v+\lambda^2 w$ является функционально-инвариантной вектор-аналитической функцией, если $u = rf_1(t+\tau r), v = f_1(t+\tau r), w = \frac{1}{r}f_1(t+\tau r), r$ – корень уравнения $r^2+r+1 = 0$, f_1 – произвольная аналитическая функция от $t+\tau r, t = -x+y, \tau = y-z$. Следовательно, любая функция $f = p(x, y, z)+\lambda q(x, y, z)+\lambda^2 s(x, y, z)$, F-моногенная по σ (например, $\sigma, \sigma^n, e^\sigma$), также является решение системы (1).

Рассмотрим следующую краевую задачу.

Задача. Пусть функция $\sigma = (r + \lambda + r^{-1}\lambda^2)f_1(t + r\tau)$ и функция f , моногенная в смысле В.С. Федорова по σ , определены на некоторой замкнутой двумерной поверхности ∂G , гомеоморфной сфере конечного диаметра и достаточно гладкой для возможности использовать формулу Остроградского (G – внутренность поверхности ∂G).

Требуется найти в любой точке $M(x, y, z) \in G$ значение функции f , моногенной в смысле В.С. Федорова по σ , если известны ее значения на поверхности ∂G.

Для функции f , моногенной по $\sigma = (r + \lambda + r^{-1}\lambda^2)f_1(t + r\tau)$, было построено интегральное представление, при помощи которого и решается сформулированная выше краевая задача.