# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА



Тема 9

**Определение 1**

Высказывание — повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно либо истинно либо ложно. Логическими значениями высказываний являются «истина» и «ложь».

***Примеры высказываний:***

1. Минск — столица Республики Беларусь.
2. Окружность является многоугольником.
3. Карп не рыба.
4. Число 10 делится на 2 и на 5.

Высказывания обозначают большими латинскими буквами *A, B, ...,* а их значения, т.е. «истина» или «ложь» — соответственно буквами «И» и «Л». Эти значения называются значениями истинности высказывания.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть ***элементарным***.

Высказывание, представляющее собой несколько утверждений, принято называть ***составным***.

## Определение 2

Отрицанием высказывания *A* называется высказывание «не *A*».

Отрицание высказывания *A* обозначается символом

$$\overline{A}$$

Логические значения высказывания можно описывать с помощью таблицы:

| $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|
| И | Л |
| Л | И |

**Определение 3**

Конъюнкцией (логическим произведением) высказываний *A* и *B* называется высказывание *«A* и *B».*

Конъюнкцией высказываний *A и B* обозначается символом $\boldsymbol{A \wedge B}$.

Логические значения конъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
| --- | --- | --- |
| И | И | И |
| И | Л | Л |
| Л | И | Л |
| Л | Л | Л |

## Определение 4

Дизъюнкция (логической суммой) высказываний *A* и *B* называется высказывание «*A* или *B*». Дизъюнкция высказываний *A* и *B* обозначается символом $\boldsymbol{A \vee B}$.

Логические значения дизъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| И | И | И |
| И | Л | И |
| Л | И | И |
| Л | Л | Л |

***Теорема 1*** (закон де Моргана)
При любых высказываниях *A* и *B*:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

## Определение 5

Импликацией высказываний *A* и *B* называется высказывание «если *A*, то *B*».

Импликация высказываний *A* и *B* обозначается символом $\boldsymbol{A \Rightarrow B}$.

Высказывание *A* называется условием или посылкой, высказывание *B* — следствием или заключением.

Таблица истинности импликации:

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|
| И | И | И |
| И | Л | Л |
| Л | И | И |
| Л | Л | И |

***Теорема 2*** (закон силлогизма)

Для любых высказываний *A*, *B* и *C* высказывание

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

истинно.



Импликация играет важную роль в математических доказательствах, т.к. многие теоремы формулируются в условной форме **«Если *A*, то *B*»**.

## Определение 6

Эквиваленцией высказываний *A* и *B* называется высказывание «*A* тогда и только тогда, когда *B*».

Эквивалентность высказываний *A*, *B* обозначается символом $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$.

Истинностная таблица для эквиваленции:

| $A$ | $B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|
| И | И | И |
| И | Л | Л |
| Л | И | Л |
| Л | Л | И |

## *Теорема 3*

При любых высказываниях *A* и *B* высказывания

$$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B} \textbf{ и } \boldsymbol{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}$$

эквивалентны.

Чтобы установить эквивалентность высказываний *A* и *B,* можно доказать истинность двух импликаций: $\boldsymbol{A \Rightarrow B}$ **и** $\boldsymbol{B \Rightarrow A}$*.*

Рассмотрим выражение «$x$ — четное число».

***Это высказывание?***

$x$=3 «3 — четное число»
ложное высказывание

$x$=4 «4 — четное число»
истинное высказывание

## Определение 7

Предложение, в котором есть одна или несколько переменных, и которое при конкретных значениях переменных преобразовывается в высказывание, называется ***предикатом*** (с одной переменной — одноместным, с двумя переменными — двухместным и т.д.).

Для обозначения предикатов используют либо большие латинские буквы, либо символы:

$$A(x, y),\ B(x)$$

и т.д.

## Определение 8

Множество значений переменной ***x***, при которых предикат ***P*** превращается в высказывание, называется областью определения предиката. Будем ее обозначать буквой ***M***.

## Определение 9

Пусть предикат ***P*** задан на множестве ***M***. Подмножество $T \subset M$, при подстановке значений которого в предикат ***P*** он обращается в истинное высказывание, называется множеством истинности предиката ***P***.

### *Пример*

Рассмотрим на множестве ***M*** студентов 3 курса

***P(x)*: фамилия студента начинается с буквы «а»**.

Множество ***T*** его истинности — множество тех студентов фамилия которых начинается с «а».

## Определение 10

Два предиката $P(x)$ и $Q(x)$, заданные на одном и том же множестве $M$, называются эквивалентными (равнозначными), если они имеют одно и то же множество истинности.

$$\boldsymbol{P(x) \sim Q(x)\ (\text{или } P(x) = Q(x))}.$$



**_Пример_**

$P(x)$: $x < 5$

$Q(x)$: $3x - 15 < 0 \quad \Rightarrow \quad P(x) \sim Q(x)$

$$\boldsymbol{T = (-\infty;\ 5)}$$

Пусть *P(x)* и *Q(x)* — два одноместных предиката, определенных на множестве *M.*

$P(x) \wedge Q(x)$

$P(x) \vee Q(x)$

$\overline{P(x)}$

$P(x) \Rightarrow Q(x)$

$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$

$$T_{P(x) \wedge Q(x)} = T_{P(x)} \cap T_{Q(x)}$$

$$T_{P(x) \vee Q(x)} = T_{P(x)} \cup T_{Q(x)}$$

# *Кванторы*

Кванторы позволяют в неявной форме охарактеризовать количество значений переменных предиката.

Добавление квантора к предикату преобразует последний в высказывание.

квантор общности $\forall x$

Пусть предикат $P(x)$: «$x$ — четное число», $x \in \boldsymbol{N}$

высказывание $\forall x\, P(x)$ ложно на множестве $\boldsymbol{N}$.

квантор существования $\exists x$

Пусть предикат $P(x)$: «$x$ — четное число», $x \in \boldsymbol{N}$

высказывание $\exists x\, P(x)$ истинно на множестве $\boldsymbol{N}$

## ***Теорема 4***

Для любого предиката верны следующие соотношения:

1. $\overline{\exists x P(x)} \Leftrightarrow \forall x \overline{P(x)}$ .
2. $\overline{\forall x P(x)} \Leftrightarrow \exists x \overline{P(x)}$ .