



Министерство образования Республики Беларусь

*Учреждение образования*  
«Белорусский государственный педагогический  
университет имени Максима Танка»

## **Физико-математические науки и информатика, методика преподавания**

*Материалы Международной студенческой  
научно-практической конференции  
г. Минск, 19 апреля 2017 г.*

Минск 2017

# ЗАКОНЫ КИРХГОФА В РАЗВЕТВЛЕННЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

*А. Имамкулыев, М. Шкатула, В. Назарева, физико-математический факультет;  
П. Кистюк, УО "Гимназия №20 г. Минска";  
Ф. Вергун, УО "Лицей N 1 г. Минска"*

*Науч. рук.: д.ф.-м.н., проф. В.Р.Соболь;  
к.ф.-м.н., доц. О.Н.Белая;  
учитель высш. квалифик. кат. Е.А.Апанович;  
учитель высш. квалифик. кат. Е.К.Мумыга*

Уравнения Максвелла, как базовые соотношения, описывающие электромагнитные процессы во взаимосвязи нестационарных электрических и магнитных полей, позволяют в частном случае анализировать и постоянное электромагнитное поле, например, появление стационарного магнитного поля в проводящей среде при протекании постоянного тока, но не объясняют магнитоэлектричества так называемых ферроэлектриков, у которых намагниченность приводит к появлению электрической поляризации и наоборот [1].

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \end{aligned}$$

здесь  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  – векторы напряженности, индукции электрического и магнитного полей соответственно,  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость и электрическая постоянная,  $\mu$  и  $\mu_0$  – магнитная проницаемость и магнитная постоянная  $\rho$  – объемная плотность свободных зарядов,  $\vec{j}$  и  $\sigma$  – вектор плотности тока проводимости и электрическая проводимость изотропной среды.

В ферроэлектриках стационарные магнитоэлектрические явления формально могли бы быть отображены в рамках принятой системы при условии, что существуют дополнительные уравнения связи между намагниченностью и вектором электрического поля в среде, а также между электрической поляризацией и вектором напряженности магнитного поля.

$$\vec{P}_i = \alpha_{ij} \vec{H}_j, \quad \vec{M}_i = \alpha_{ij} \vec{E}_j,$$

$\vec{P}_i$  и  $\vec{M}_i$  – поляризация (дипольный момент единицы объема) и намагниченность (магнитный момент единицы объема среды),  $\alpha_{ij}$  – тензор второго ранга с размерностью [с м<sup>-1</sup>], Магнитоэлектрический эффект, который может быть продольным и поперечным отвечает диагональным и недиагональным компонентам тензора  $\alpha_{ij}$ .

В случае стационарного электромагнитного поля, то есть при рассмотрении его электрической составляющей, используют первые два уравнения системы, которые при интегрировании потока ротора по площади и взятии объемного интеграла от дивергенции электрического смещения вырождаются в так называемые правила

Кирхгофа, касающиеся работы электрического поля по переносу заряда вдоль замкнутого контура, и закона сохранения заряда. Иными словами сумма падений напряжения вдоль замкнутого контура равна нулю, причем падение напряжения на источнике равно его электродвижущей силе с обратным знаком, а алгебраическая сумма токов в любом узле контура равна нулю. Правила Кирхгофа позволяют удобно использовать методы матричной алгебры для расчета электрических цепей сложной конфигурации, когда условия симметрии невозможно применить из-за неодинаковости резистивных элементов в различных позициях.

В сообщении представлены преимущества расчета цепей постоянного тока в формализме законов Кирхгофа, позволяющих определять характеристики для любого уровня сложности смешанных параллельно-последовательных соединений элементов на примере традиционной схемы, отвечающей мосту Уинстона, который широко применяется в метрологии для определения искомой величины сопротивления по факту зануления тока через гальванометр в диагонали моста.

Пять резисторов произвольной величины, подключенные в режиме моста к источнику электродвижущей силы  $E$  приводят к конечной величине тока через диагональ и при полном уравнивании этой схемы легко написать соотношения связи между резисторами  $R_1 R_2 R_4 R_5$ , которые задают ток через резистор  $R_3$  в диагонали, то есть ток через гальванометр. Но в реальности полное отсутствие тока измерить невозможно, и оценить степень неуравновешенности и величину погрешности можно на основе остаточной разбалансировки, которую необходимо оценить.

Процедура определения силы тока через  $R_3$  состоит из придания определенного направления току  $I_3$  и записи следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + 0 I_2 + 0 I_3 + 0 I_4 + R_5 I_5 &= E, \\ 1 I_1 + 0 I_2 + 1 I_3 + 0 I_4 - 1 I_5 &= 0, \\ 0 I_1 + 1 I_2 - 1 I_3 - 1 I_4 - 0 I_5 &= 0, \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_3 + 0 I_4 + 0 I_5 &= 0, \\ 0 I_1 + 0 I_2 + R_3 I_3 - R_4 I_4 + R_5 I_5 &= 0. \end{aligned}$$

Для получения значения тока  $I_3$  как и через любой иной элемент следует в рамках стандартной процедуры разделить соответствующие определители с понижением их ранга при разложении по одной и строк.

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & 0 & E & 0 & R_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ R_1 & -R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & R_5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ R_1 & -R_2 & -R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & R_5 \end{vmatrix}}.$$

Расчет приводит к зависимости тока  $I_3$  и описывает любую самую малую степень разбалансировки моста, определяя, таким образом, погрешность измерения.

$$I_3 = \frac{E(R_1R_4 - R_2R_5)}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_2R_5 + R_1R_3R_4 + R_1R_4R_5 + R_2R_3R_5 + R_2R_4R_5 + R_3R_4R_5}.$$

Выражение отображает характер перераспределения тока по разветвленному участку в зависимости от величины сопротивлений  $R_1, R_2, R_4, R_5$ . Из рис. 1 следует, что при симметричности нагрузки величина тока  $I_3$  может варьироваться от отрицательных до положительных значений.

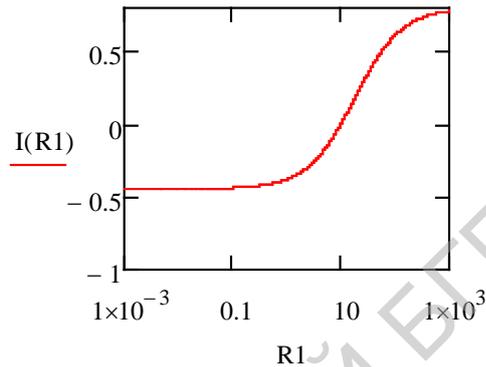


Рис. 1. Величина тока через диагональ мостика Уинстона в функции сопротивления  $R_1$  при значениях  $E=100$  В,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_4 = 50$  Ом,  $R_5 = 25$  Ом.

Таким образом, расчет как симметризованных, так и иных расчлененных цепей возможен при последовательности применения правил постоянного тока с формированием исходной системы с числом уравнений, отвечающим количеству неизвестных и последующими корректными математическими операциями.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и мультиферроики /А.П. Пятаков, А.К. Звездин // УФН. – Т. 182, N 6. – 2012. – 593–620.