Раздел 2.
Введение в теорию множеств и дискретную математику

МНОЖЕСТВА

Тема 7

Определение 1

Множество — совокупность каких-нибудь предметов (объектов).

Множества обычно обозначаются большими буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots,$
а их элементы — малыми: $a, b, c, \ldots$.

N — множество всех натуральных чисел;
Z — множество всех целых чисел;
Q — множество всех рациональных чисел;
R — множество всех действительных чисел.

$$\boldsymbol{x \in A}$$

x является элементом множества *A* (принадлежит множеству *A*, содержится в *A*)

$$\boldsymbol{x \notin A}$$

x не принадлежит множеству *A*

$$4 \in \boldsymbol{N},\ 3{,}5 \notin \boldsymbol{N}$$

Определение 2

Множество называется конечным, если существует натуральное число, которым можно выразить количество элементов данного множества.

Определение 3

Множество называется бесконечным, если взяв любое натуральное число *n*, можно в данном множестве найти элементов больше, чем *n*.

Определение 4

Множество, в котором нет ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$.

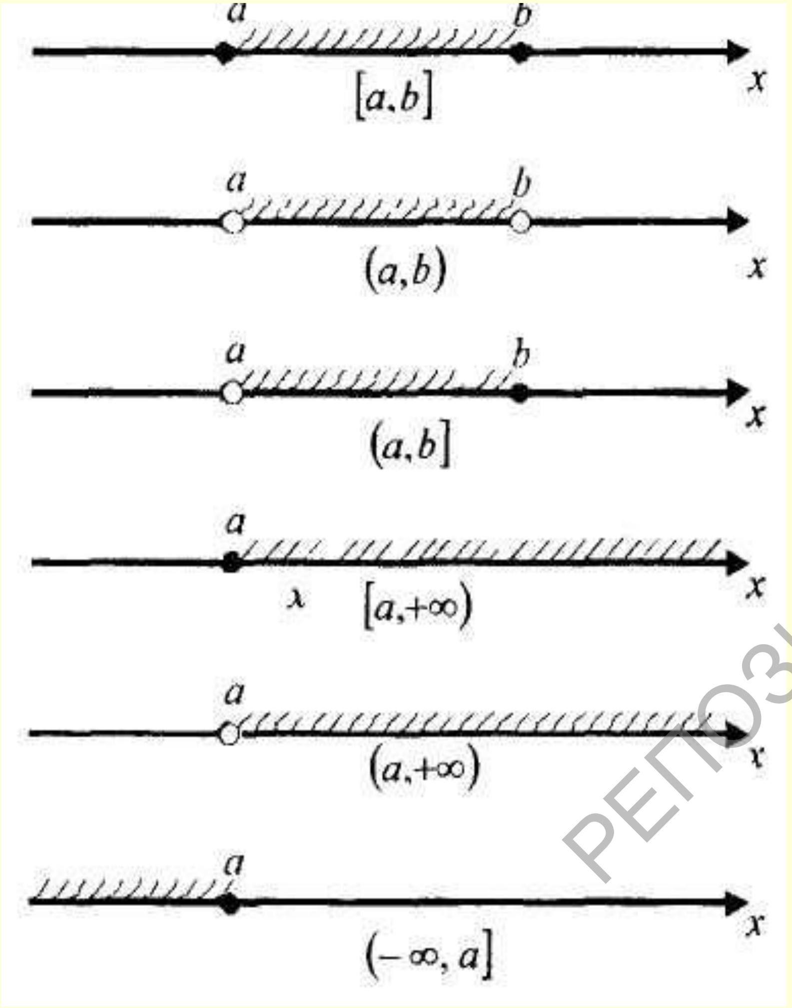
Способы задания множества

1. Множество можно задать перечислением (в произвольном порядке) всех его элементов.

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

2. Множество можно задать указанием характеристического свойства элементов множества, т.е. свойства, которым владеют все элементы этого множества и только они.

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x \leq 4\}$$



$\{x|\ x \in \mathbf{R},\ a \leq x \leq b\}$,

$\{x|\ x \in \mathbf{R},\ a < x < b\}$,

$\{x|\ x \in \mathbf{R},\ a < x \leq b\}$,

$\{x|\ x \in \mathbf{R},\ x \geq a\}$,

$\{x|\ x \in \mathbf{R},\ x > a\}$,

$\{x|\ x \in \mathbf{R},\ x \leq a\}$

Определение 5

Если каждый элемент множества A содержится и в множестве B, то A называется подмножеством B. Это записывают следующим образом:

$$A \subset B \text{ или } B \supset A.$$

$A = \{1, 3, 4\}$ и множество $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Определение 6

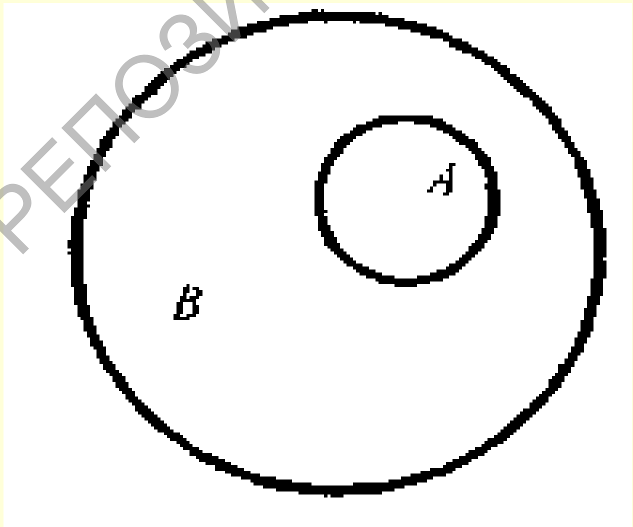
Два множества A и B называются равными, когда каждый элемент множества A является элементом множества B, и наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A, т.е.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A.$$

Свойства подмножеств

$\varnothing \subset \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{B}$

Диаграмма Эйлера-Венна

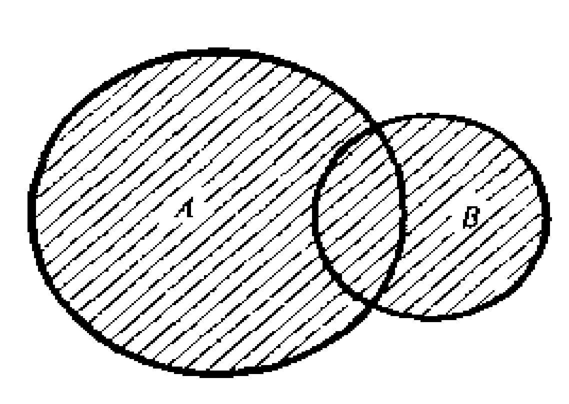


Определение 7

Множество элементов, которые принадлежат множеству *A* или множеству *B,* т.е. принадлежат или *A,* или *B,* или *A* и *B* одновременно, называется объединением множеств *A* и *B.* Объединение множеств *A* и *B* обозначают

$$A \cup B.$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ или } x \in B$$



Пример

$A = \{1, 2, 5, 8\}$,
$B = \{2, 4, 8, 10\}$.
$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$

Свойства операции объединения множеств

1. $A \cup A = A$.
2. $\varnothing \cup A = A$.
3. Если $B \subset A$, то $A \cup B = A$.
4. Переместительный закон:

$$A \cup B = B \cup A.$$

5. Сочетательный закон:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Определение 8

Множество всех элементов, принадлежащих одновременно множествам *A* и *B,* называется пересечением множеств *A* и *B.* Пересечение множеств *A и B* обозначается

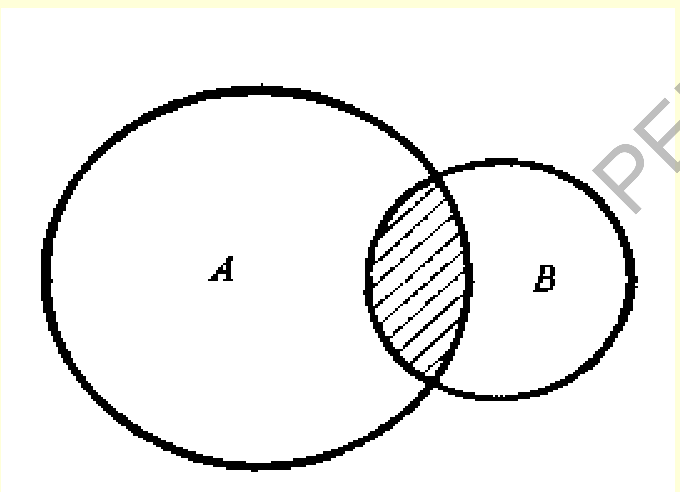
$$A \cap B.$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \in B.$$

Пример 1.

$A = \{1, 5, 7, 8\}$,

$B = \{2, 5, 7, 9, 10\}$, $A \cap B = \{5, 7\}$.



Пример 2.

A — множество прямоугольников,

B — множество ромбов.

$A \cap B$ — это множество квадратов.

Свойства операции пересечения множеств

1. $A \cap A = A$.
2. $\varnothing \cap A = \varnothing$.
3. Если $B \subset A$, то $A \cap B = B$.
4. Переместительный закон:

$$A \cap B = B \cap A.$$

5. Сочетательный закон:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Распределительные законы операций пересечения и объединения множеств

6. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
7. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Определение 9

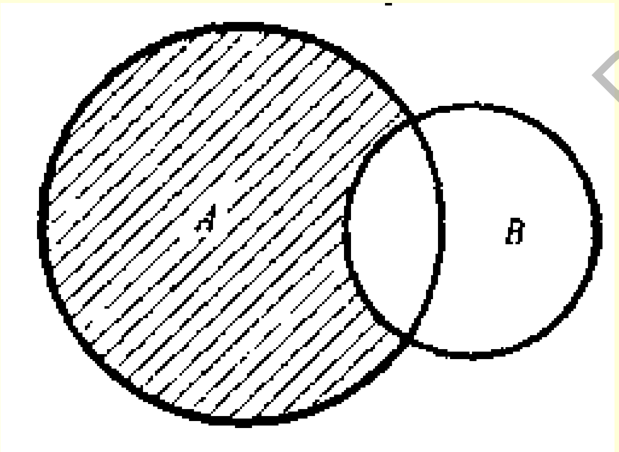
Разностью множеств *A* и *B* называется множество, элементы которого принадлежат множеству *A*, но не принадлежат множеству *B*.

Разность множеств *A* и *B* обозначают

$$A \setminus B.$$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \notin B.$$

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \setminus B = A$$



Пример

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$.

$A \setminus B = \{1, 3, 5, 7\}$

Определение 10

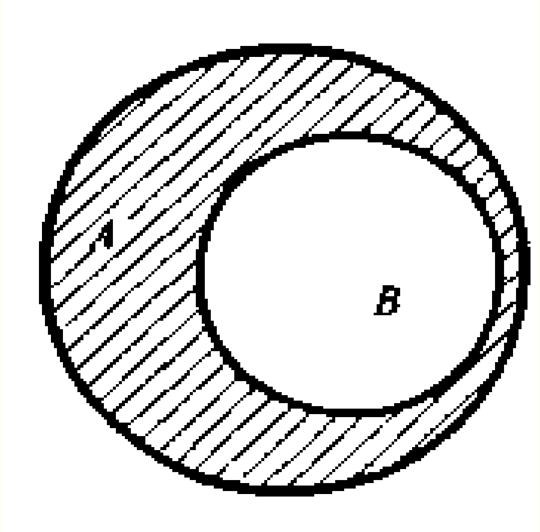
Когда множество *B* является подмножеством множества *A*, то разность *A* \ *B* называют дополнение множества *B* до множества *A* и обозначают $\overline{B_A}$.

Пример

$A = \{x \mid x \in \mathbf{N}\}$,

$B = \{x \mid x = 2k,\ k \in \mathbf{N}\}$.

$\overline{B_A} = \{x \mid x = 2k-1,\ k \in \mathbf{N}\}$.

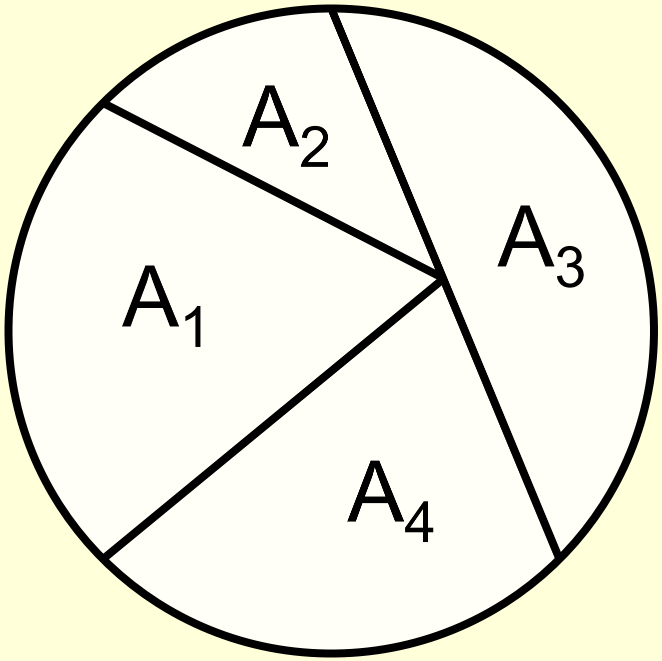


Разбиение множества на классы

Определение 11

Разбиением множества *A* на подмножества (классы) называется система его непустых подмножеств, обладающая следующими свойствами:

1. объединение всех подмножеств этой системы равно множеству *A*;
2. никакие два различные подмножества не содержат общих элементов, т.е. не пересекаются.



Пример 1.

Будем рассматривав множество учеников школы. Школа состоит из классов: 1,2,3, ..., 11. Совокупность классов является разбиением.

Пример 2.

Рассмотрим множество треугольников и разобьем его на подмножества по величине сторон. Это не классификация, т.к. нарушено второе условие.

Декартово произведение множеств

$$68 \leftrightarrow 86$$

Когда важен порядок расположения элементов множества, в математике говорят об упорядоченных наборах элементов.

Определение 12

Упорядоченную пару, образованную из элементов *x* и у множества *X*, обозначают *(x, y);* элемент *x* называют первой компонентой (координатой), а элемент *y* — второй компонентой (координатой) этой пары.

Определение 13

Две упорядоченные пары называются равными, если их соответствующие компоненты равны, т.е. $(x, y) = (z, t)$, если $x = z$ и $y = t$.

Определение 14

Пусть X и Y — два множества.
Декартовым произведением множеств X и Y называется множество $\boldsymbol{X \times Y}$, состоящие из всех упорядоченных пар (x, y), в которых первая компонента x принадлежит X, а вторая компонента y принадлежит Y.

$$\boldsymbol{X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}}.$$

Пример

$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{2, 5\}$.
$X \times Y = \{(1,2), (1,5), (2,2), (2,5), (3,2), (3,5)\}$

Результат декартового произведения множеств зависит от порядка сомножителей, т.е. оно не подчиняется переместительному закону

$$\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \neq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{X}.$$

Также для операции декартового произведения множеств не выполняется и сочетательный закон.