

У. А. Шылінец,

кандыдат фізіка-матэматычных навук,
дэкан матэматычнага факультэта БДПУ;

А. С. Сушчынская,

студэнт V курса матэматычнага факультэта БДПУ;

Г. Л. Паляк,

студэнт V курса матэматычнага факультэта БДПУ

АБ ПЕРАЎТВАРЭННІ ДА КАНАНІЧНАГА ВЫГЛЯДУ СІСТЭМЫ РАЎНАННЯЎ У ЧАСТКОВЫХ ВЫТВОРНЫХ ПРЫ ДАДАМОЗЕ БІКАМПЛЕКСНЫХ ДЫФЕРЭНЦЫАЛЬНЫХ АПЕРАТАРАЎ

Уводзіны. У шэрагу прац [1–4] выкарыстоўваліся спецыяльныя дыферэнцыяльныя апэратары (фармальныя вытворныя) [5] для прывядзення да кананічнага выгляду сістэм раўнанняў у частковых вытворных.

У дадзеным артыкуле разглядаецца сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў, адрозная ад вывучаемых раней:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= B_1 \frac{\partial v}{\partial x} + B_2 \frac{\partial v}{\partial y} + M_1 u + \\ &+ N_1 v + F_1 u^2 + E_1 v^2 + C_1 uv, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= B_3 \frac{\partial v}{\partial x} + B_4 \frac{\partial v}{\partial y} + M_2 u + \\ &+ N_2 v + F_2 u^2 + E_2 v^2 + C_2 uv, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

дзе $B_k, M_i, N_i, F_i, E_i, C_i$ (u, v) – вядомыя (шуканыя) функцыі класа $A^*(G)$; $k=1, \dots, 4$; $i=1, 2$.

Праз $A^*(G)$ заўсёды абазначаем клас усіх аналітычных функцый (наогул камплексных) ад рэчаісных зменных x, y у некаторым адназвязным абсягу G , які змяшчае пачатак каардынат.

Ніжэй паказана, што дадзеную сістэму дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (1) таксама можна кананізаваць, скарыстаўшы фармальныя вытворныя.

Асноўная частка. Рашаем наступную задачу: маючы сістэму выгляду (1), знайсці неабходныя і дастатковыя ўмовы, пры якіх існуюць такія функцыі $p(x, y), q(x, y) \in A^*(G)$, што сістэма (1) зводзіцца да выгляду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \phi}{\partial q} &= a_1 f + a_2 f^2 + b_1 \phi + \\ &+ b_2 \phi^2 + c_1 f \phi, \\ \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial \phi}{\partial p} &= a_3 f + a_4 f^2 + b_3 \phi + \\ &+ b_4 \phi^2 + c_2 f \phi, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

дзе f, ϕ – лінейныя функцыі ад u, v з каэфіцыентамі класа $A^*(G)$;

a_k, b_k, c_j ($k=1, \dots, 4$; $j=1, 2$) – вядомыя функцыі

таго ж класа, а $\frac{\partial f}{\partial p}$ і $\frac{\partial f}{\partial q}$ – дыферэнцыяльныя

апэратары (фармальныя вытворныя), якія вызначаюцца роўнасцямі

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p} &\equiv \frac{1}{\delta} (f'_x q'_y - f'_y q'_x), \\ \frac{\partial f}{\partial q} &\equiv \frac{1}{\delta} (f'_y p'_x - f'_x p'_y), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

дзе

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} p'_x & p'_y \\ q'_x & q'_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Сістэму (2), на падставе (3), можна запісаць, відавочна, у выглядзе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= A_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + T_1 f + \\ &+ \Theta_1 \phi + \Phi_1 f^2 + Q_1 \phi^2 + K_1 f \phi, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= A_3 \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_4 \frac{\partial \phi}{\partial y} + T_2 f + \\ &+ \Theta_2 \phi + \Phi_2 f^2 + Q_2 \phi^2 + K_2 f \phi, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

дзе

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= a_1 p'_x + a_3 q'_x, T_2 = a_1 p'_y + a_3 q'_y, \\ \Theta_1 &= b_1 p'_x + b_3 q'_x, \Theta_2 = b_1 p'_y + b_3 q'_y, \\ \Phi_1 &= a_2 p'_x + a_4 q'_x, \Phi_2 = a_2 p'_y + a_4 q'_y, \\ Q_1 &= b_2 p'_x + b_4 q'_x, Q_2 = b_2 p'_y + b_4 q'_y, \\ K_1 &= c_1 p'_x + c_2 q'_x, K_2 = c_1 p'_y + c_2 q'_y, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} -A_1 &= \frac{p'_x p'_y + q'_x q'_y}{\delta}, \\ -A_1 &= A_4, \\ A_2 &= \frac{(p'_x)^2 + (q'_x)^2}{\delta}, \\ -A_3 &= \frac{(p'_y)^2 + (q'_y)^2}{\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

Виразимо p'_x, p'_y, q'_x, q'_y з (5'):

$$\left. \begin{aligned} p'_x &= A_1 q'_x + A_2 q'_y, \\ p'_y &= A_3 q'_x + A_4 q'_y, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} q'_x &= -(A_1 p'_x + A_2 p'_y), \\ q'_y &= -(A_3 p'_x + A_4 p'_y). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Апошнія роўнасці можна запісаць у выглядзе сістэмы

$$\left. \begin{aligned} -p'_x + 0 \cdot p'_y + A_1 q'_x + A_2 q'_y &= 0, \\ A_1 p'_x + A_2 p'_y + q'_x + 0 \cdot q'_y &= 0, \\ 0 \cdot p'_x - p'_y + A_3 q'_x + A_4 q'_y &= 0, \\ A_3 p'_x + A_4 p'_y + 0 \cdot q'_x + q'_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для рашэння сістэмы (8) адносна p'_x, p'_y, q'_x, q'_y ($\delta \neq 0$) неабходна мець

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & A_1 & A_2 \\ 0 & -1 & A_3 & A_4 \\ A_1 & A_2 & 1 & 0 \\ A_3 & A_4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Пасля вылічэння дэтэрмінанта з улікам, што $A_1 = -A_4$, атрымаем

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 1.$$

Такім чынам, атрымалі наступную тэарэму.

Тэарэма 1. Неабходная ўмова звязнення сістэмы (4) да сістэмы (2) з тымі ж невядомымі функцыямі заключаецца ў тым, што

$$A_1 = -A_4, \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 1. \quad (10)$$

Няхай цяпер дадзена сістэма (4), у якой $A_k, T_j, \Theta_j, \Phi_j, Q_j, K_j$ ($k=1, \dots, 4; j=1, 2$) такія функцыі класа $A^*(G)$, што выконваецца ў G

умова (10). Даследуем магчымасць звязнення такой сістэмы (4) да выгляду (2).

Для рашэння гэтай задачы здзейснім наступнае.

Складзём сістэму (6) з невядомымі функцыямі p, q і знаходзім функцыю $q(x, y) \in A^*(G)$ як якое-небудзь частковае рашэнне раўнання

$$\frac{\partial}{\partial x}(A_3 q'_x + A_4 q'_y) = \frac{\partial}{\partial y}(A_1 q'_x + A_2 q'_y), \quad (11)$$

якое ўзнікла як умова інтэгральнасці сістэмы (6).

Разгледзім падрабязней раўнанне (11).

Казфіцыенты раўнання задавальняюць умове (10).

Разгледзім выпадкі, якія могуць сустрацца пры рашэнні раўнання (11).

1° $A_3 \neq 0$. Тады раўнанне (11) прыме выгляд

$$q''_{xx} = f(x, y, q'_x, q'_y, q''_{xy}, q''_{yy}) \quad (12)$$

у некаторым абсягу $G_0 \subset G$ (для пэўнасці лічым, штопункт $(0, 0) \in G_0, f(x, y, q'_x, q'_y, q''_{xy}, q''_{yy}) \in A^*(G_0)$).

Раўнанне (12) — гэта раўнанне Кашы-Кавалеўскай. Зададзім пачатковыя ўмовы

$$q|_{x=0} = \psi_1(y), q'_x|_{x=0} = \psi_2(y),$$

дзе $\psi_1(y), \psi_2(y)$ — аналітычныя функцыі ад y .Разгледзім $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x$. Калі падставіць замест p'_x і p'_y правыя часткі раўнанняў сістэмы (6) і ўлічыць умовы (10), атрымаем

$$\delta = 2A_1 q'_x q'_y + A_2 (q'_y)^2 - A_3 (q'_x)^2,$$

$$\delta^0 = 2A_1^0 (q'_x)^0 (q'_y)^0 + A_2^0 ((q'_y)^0)^2 + A_3^0 ((q'_x)^0)^2$$

(верхні індэкс 0 абазначае значэнне функцыі пры $x = y = 0$). Таму можна лічыць (пры належным падборы $(q'_x)^0, (q'_y)^0, q^0$) $\delta^0 \neq 0$, а таму знойдзецца такое наваколле пачатку каардынат, у якім $\delta \neq 0$. Толькі гэтае наваколле і будзем далей разглядаць як абсяг змянення зменных x, y .2° $A_2 \neq 0$. Тады раўнанне (11) зводзіцца да выгляду

$$q''_{yy} = f(x, y, q'_x, q'_y, q''_{xy}, q''_{xx})$$

у некаторым абсягу $G_0 \subset G$.3° $A_2 \equiv A_3 \equiv 0$, тады на падставе (10) $A_1 A_4 = 1$, але $A_1 = -A_4$, таму з раўнання (11) вынікае $q''_{xy} = 0$.У другім і трэцім выпадках мы аналагічна знойдем такую функцыю $q(x, y)$ і такі абсяг, у якім $\delta \neq 0$.

Знайшоушы q , знойдзем p з (6). Такім чынам, знойдзем функцыі p і q , для якіх $\delta \neq 0$.

Цяпер знаходзім a_k, b_k, c_j ($k=1, \dots, 4; j=1, 2$) з (5). Сістэмы (5) вызначаныя, паколькі $\delta \neq 0$. Пакажам зараз, што A_1, A_2, A_3 выражаюцца праз p і q па формулах (5'). Для гэтага рэшым сістэму (6) адносна q'_x і q'_y . Скарыстаем умовы (10) і атрымаем (7). З (7) і (6) будзем мець

$$(p'_x)^2 + (q'_x)^2 = A_2 \delta,$$

$$(p'_y)^2 + (q'_y)^2 = -A_3 \delta,$$

$$p'_x p'_y + q'_x q'_y = -A_1 \delta,$$

гэта значыць для A_1, A_2, A_3 атрымаем выразы (5').

Тэарэма 2. Сістэма (4) зводзіцца да сістэмы (2) кожны раз, калі выконваецца ўмова (10).

Вывучым умовы пераўтварэння сістэмы (1) у сістэму (4).

Мяркуем у дадзенай сістэме (1)

$$u = \alpha f + \beta \varphi, v = \alpha_1 f + \beta_1 \varphi$$

$$\left(\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1 \in A^*(G); \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{vmatrix} \neq 0 \right). \quad (13)$$

Тады сістэма (1) прыме наступны выгляд:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= B_1 \left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \\ &+ B_2 \left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \beta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \dots \\ \alpha \frac{\partial f}{\partial y} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= B_3 \left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \\ &+ B_4 \left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \beta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \dots \end{aligned} \right\}$$

адкуль

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= a' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \dots, \\ c \frac{\partial f}{\partial x} + d \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= c' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + d' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \dots, \end{aligned} \right\}$$

дзе

$$a = \alpha - \alpha_1 B_1, b = -\alpha_1 B_2,$$

$$c = -\alpha_1 B_3, d = \alpha - \alpha_1 B_4,$$

$$a' = \beta_1 B_1 - \beta, b' = \beta_1 B_2,$$

$$c' = \beta_1 B_3, d' = \beta_1 B_4 - \beta.$$

З апошняй сістэмы знаходзім $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Калі ў правай частцы адкінуць складнікі, якія не змяшчаюць $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, атрымаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta} \left[\begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] + \dots = \\ &= \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \dots, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta} \left[\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] + \dots = \\ &= \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\Delta_4}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

дзе

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} b' & b' \\ d' & d' \end{vmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}.$$

Маем

$$\Delta = \alpha^2 - \alpha \alpha_1 (B_1 + B_4) + \alpha_1^2 D, \quad (14')$$

дзе

$$D = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_1 = a'd - c'b = (\beta_1 B_1 - \beta)(\alpha - \alpha_1 B_4) + \alpha_1 \beta_1 B_2 B_3$$

ці

$$\Delta_1 = -\alpha\beta + \alpha\beta_1 B_1 + \beta\alpha_1 B_4 - \alpha_1 \beta_1 D,$$

аналагічна

$$\Delta_2 = \alpha\beta_1 B_2 - \alpha_1 \beta B_2 = B_2 (\alpha\beta_1 - \alpha_1 \beta),$$

$$\Delta_3 = (\alpha - \alpha_1 B_1) \beta_1 B_3 + (\beta_1 B_1 - \beta) \alpha_1 B_3 = B_3 (\alpha\beta_1 - \alpha_1 \beta),$$

$$\Delta_4 = (\alpha - \alpha_1 B_1) (\beta_1 B_4 - \beta) + \alpha_1 \beta_1 B_2 B_3.$$

Мяркуем $\alpha_1 = 0, \alpha = 1$, тады

$$\Delta = 1,$$

$$\Delta_2 = B_2 \beta_1, \quad \Delta_3 = B_3 \beta_1,$$

$$\Delta_4 = -\beta + \beta_1 B_4, \quad \Delta_1 = \beta_1 B_1 - \beta.$$

Пабудуем дэтэрмінант $\overline{D}$ для сістэмы (14)

(аналагічны дэтэрмінанту $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$ для сістэмы (4)):

мы (4)):

$$\overline{D} = \frac{1}{\Delta^2} (\Delta_1 \Delta_4 - \Delta_2 \Delta_3) = (\beta^2 - \beta \beta_1 (B_1 + B_4) + \beta_1^2 D).$$

Падпарадкоўваем каэфіцыенты сістэмы (14) умове

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_4}{\Delta} = 0,$$

тады

$$\beta = \beta_1 \sigma, \text{ дзе } \sigma = \frac{B_1 + B_4}{2}; \quad \overline{D} = \beta_1^2 (D - \sigma^2).$$

Пры ўмове $D - \sigma^2 \neq 0$, β_1 можна лічыць роўным $\frac{1}{\sqrt{D - \sigma^2}}$, а адсюль $\bar{D} = 1$.

З усяго адзначанага вынікае наступная тэарэма.

Тэарэма 3. Сістэма (1) зводзіцца да сістэмы (4) пры ўмове (10) падстаноўкай

$$u = f + \beta\varphi, \quad v = \beta_1\varphi$$

кожны раз, калі $D \neq \sigma^2$, дзе

$$\beta = \beta_1\sigma, \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{D - \sigma^2}},$$

$$\sigma = \frac{B_1 + B_4}{2},$$

$$D = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{vmatrix}.$$

Тэарэма 4. У выпадку

$$D = \sigma^2 \quad (15)$$

сістэму (1) нельга звесці да сістэмы выгляду (4), дзе

$$A_1 + A_4 = 0, \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 1.$$

Доказ. Мяркуем, што сістэму (1) можна звесці падстаноўкай выгляду (13) да выгляду (4) у выпадку (15).

Тады, калі паўтарыць пераўтварэнні, скарыстаныя пры доказе тэарэмы 3, неабходна мець наступнае.

1° $\Delta \neq 0$. Пры ўмове $D = \sigma^2$ з (14') атрымваем

$$\Delta = (\alpha_1\sigma - \alpha)^2.$$

Прыйшлі да неабходнага патрабавання

$$\alpha \neq \alpha_1\sigma. \quad (16)$$

2° Калі сістэма (1) зводзіцца да сістэмы (4) пры ўмове (10), то неабходна $\bar{D} \neq 0$.

З роўнасцей для Δ , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 роўнасці (15) і формулы (16) атрымліваем, што

$$\bar{D} = \frac{(\beta - \beta_1\sigma)^2}{(\alpha - \alpha_1\sigma)^2},$$

адкуль павінна выконвацца

$$\beta \neq \beta_1\sigma. \quad (17)$$

3° Акрамя таго, неабходна мець

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_4}{\Delta} = 0.$$

Адкуль на падставе роўнасцей для Δ_1, Δ_4 , роўнасці (15) і формулы (17) вынікае:

$$\alpha = \frac{\alpha_1(\beta\sigma - \beta_1\sigma^2)}{\beta - \beta_1\sigma} = \alpha_1\sigma. \quad (18)$$

Прыйшлі да супярэчнасці. Тэарэма даказаная.

Скарыстаем далей бікампліксныя функцыі, манагенныя ў сэнсе У. С. Фёдарова, для пабудовы рашэнняў сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= a_1 f + a_2 f^2 + b_1 \varphi + b_2 \varphi^2 + c_1 f \varphi, \\ \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} &= a_3 f + a_4 f^2 + b_3 \varphi + b_4 \varphi^2 + c_2 f \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

дзе a_k, b_k, c_i ($k=1, \dots, 4; i=1, 2$) (f, φ) – вядомыя (шуканыя) кампліксныя функцыі ад x, y . Усе функцыі, разглядаемыя далей, лічым непарыўна дыферэнцавальнымі функцыямі рэчаісных зменных x, y у некаторым адназвязным абсягу D . Далей праз $p(x, y), q(x, y)$ будзем абазначаць дзве такія кампліксныя функцыі, для якіх $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x \neq 0$ у разглядаемым

абсягу. Аператары $\frac{\partial}{\partial q}$ і $\frac{\partial}{\partial p}$ вызначаюцца наступным чынам:

$$\frac{\partial f}{\partial p} \equiv \frac{1}{\delta} (f'_x q'_y - f'_y q'_x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} \equiv \frac{1}{\delta} (f'_y p'_x - f'_x p'_y).$$

Для любой бікамплікснай непарыўна дыферэнцавальнай функцыі $F(x, y)$ уводзім наступныя дыферэнцыяльныя аператары:

$$\frac{\partial F}{\partial P} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial p} - j \frac{\partial F}{\partial q} \right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial p} + j \frac{\partial F}{\partial q} \right) \quad (20)$$

$$(P = p + jq, Q = p - jq, j^2 = -1, j \neq i).$$

Лёгка даказаць, што для гэтых аператараў маюць месца звычайныя правілы дыферэнцавання сумы, рознасці, здабытку і дзелі. Акрамя гэтага, маем:

$$\frac{\partial(f + j\varphi)}{\partial Q} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) + j \left(\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) \right]. \quad (21)$$

Тэарэма 5. У выпадку

$$a_1 = b_3, b_1 = -a_3, a_2 = -b_2, a_4 = -b_4, \quad (22)$$

$$b_2 = -\frac{c_2}{2}, b_4 = \frac{c_1}{2} \quad (23)$$

сістэма (2) зводзіцца да выгляду

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = AF + BF^2, \quad (24)$$

дзе

$$F = f + j\varphi,$$

$$A = \frac{1}{4}((a_1 + b_3) + j(a_3 - b_1)),$$

$$B = \frac{1}{4}((a_2 - b_2) + j(a_4 - b_4)),$$

$$j^2 = -1, j \neq i.$$

Доказ. З азначення диференціальних операторів (20), з (2) і (23) виходить, що

$$4 \frac{\partial F}{\partial Q} = ((a_1 + b_3) + j(a_3 - b_1))F +$$

$$+ ((a_1 - b_3) + j(b_1 + a_3))(f - j\varphi) +$$

$$+ ((a_2 - b_2) + j(a_4 - b_4))F^2 +$$

$$+ ((a_2 + b_2) + j(a_4 + b_4))(f^2 - \varphi^2 - 2jf\varphi),$$

адкуль у випадку (22) приходимо до рівняння (24).

Тезаема 1 доказана.

Знайдемо агульне рівняння рівняння (24)

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = AF + BF^2,$$

дзе F – невідомий бікомплексний функція, A, B – відомі бікомплексні функції, причому лічимо, що A і B – функції, манігенні у сенсі У. С. Фадарава на функції $Q = p - jq$ у абсисі D .

Міркуємо

$$u = \int_{M_0}^M AdQ, F \exp(-u) = v.$$

При цьому маємо: u – функція, манігенна у сенсі У. С. Фадарава на функції Q .

$$\frac{du}{dQ} = \frac{\partial u}{\partial Q} = A, \quad (25)$$

дзе $\frac{du}{dQ}$ – витворна у сенсі У. С. Фадарава;

$$F = \exp(u) \cdot v.$$

Рівняння (24) при цьому виглядає

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = \exp(u) \frac{\partial u}{\partial Q} v + \exp(u) \frac{\partial v}{\partial Q} =$$

$$= A \exp(u) v + B \exp(2u) v^2,$$

адкуль і з (25) отримуємо

$$\frac{\partial v}{\partial Q} = B \exp(u) v^2. \quad (26)$$

Міркуємо

$$\omega = -\frac{1}{v},$$

маємо

$$\frac{\partial \omega}{\partial Q} = \frac{\partial v}{\partial Q} \frac{1}{v^2}, \frac{\partial v}{\partial Q} = v^2 \frac{\partial \omega}{\partial Q}.$$

З (26) отримуємо

$$\frac{\partial \omega}{\partial Q} = B \exp(u). \quad (27)$$

Згідно з азначенням

$$f = \exp(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!},$$

адкуль

$$\Delta f = \exp u (\exp \Delta u - 1) = \exp u (\Delta u + (\Delta u)^2 + \dots)$$

$$(\Delta u = u(M') - u(M)).$$

З апошньої рівності маємо: калі u – манігенна у сенсі У. С. Фадарава функція на Q , тади $\exp u$ – таксама манігенна функція на Q у абсисі D , причому

$$\frac{\partial (\exp u)}{\partial Q} = \exp u \frac{\partial u}{\partial Q}.$$

Таким чином, $B \exp u$ є функція, манігенна у сенсі У. С. Фадарава на функції Q у абсисі D .

З (27) отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial Q} \left(\omega - \int_{M_0}^M B \exp(u) dQ \right) = 0,$$

гэта значить

$$\omega - \int_{M_0}^M B \exp(u) dQ = \Phi[P],$$

дзе $\Phi[P]$ – манігенна на P у абсисі D функція.

Таким чином,

$$F = \exp(u) \cdot v,$$

дзе

$$u = \int_{M_0}^M AdQ, v = -\frac{1}{\omega},$$

$$\omega = \int_{M_0}^M B \exp(u) dQ + \Phi(P)$$

$\Phi[P]$ – манігенна у абсисі D на функції P функція.

Заувага. Няхай у рівнянні (24) A і B – некаторі канстанти. Тади міркуємо

$$u = AQ, F \exp(-u) = v.$$

Рівняння (24) при цьому виглядає

$$\frac{\partial v}{\partial Q} = B \exp(AQ) v^2. \quad (28)$$

Міркуємо $\omega = -\frac{1}{v}$, тади

$$\frac{\partial \omega}{\partial Q} = \frac{\partial v}{\partial Q} \frac{1}{v^2}, \frac{\partial v}{\partial Q} = v^2 \frac{\partial \omega}{\partial Q}.$$

З (28) маем

$$\frac{\partial \omega}{\partial Q} = B \exp(AQ),$$

адкуль

$$\omega = \frac{B}{A} \exp(AQ) + \Phi[P].$$

Заклучэнне. Такім чынам, у дадзеным артыкуле знойдзены неабходныя і дастатковыя ўмовы, пры якіх сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= B_1 \frac{\partial v}{\partial x} + B_2 \frac{\partial v}{\partial y} + M_1 u + \\ &+ N_1 v + F_1 u^2 + E_1 v^2 + C_1 uv, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= B_3 \frac{\partial v}{\partial x} + B_4 \frac{\partial v}{\partial y} + M_2 u + \\ &+ N_2 v + F_2 u^2 + E_2 v^2 + C_2 uv, \end{aligned} \right\}$$

дзе $B_k, M_i, N_i, F_i, E_i, C_i (u, v)$ – вядомыя (шуканыя) камплексныя функцыі ад x, y класа $C^1(D)(C^2(D))$ ($k=1, \dots, 4; i=1, 2$), рэдуцыруецца да кананічнага выгляду.

Пры дапамозе бікамплексных функцый, манагенных у сэнсе У. С. Фёдарова, у пэўным выпадку пабудавана агульнае рашэнне кананічнай сістэмы (сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных).

ЛІТАРАТУРА

1. Стельмашук, Н. Т. О применении одного обобщения ареолярных производных к преобразованиям некоторых систем линейных диф-

ференциальных уравнений в частных производных / Н. Т. Стельмашук // Bul. Inst. Politeh. Bucuresti. – 1962. – V. 24. – № 2. – P. 19–35.

2. Стельмашук, Н. Т. О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных / Н. Т. Стельмашук // Сибирский математический журнал. – 1964. – Т. 5. – № 1. – С. 166–173.
3. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
4. Стельмашук, Н. Т. О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов / Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 61–65.
5. Гусев, В. А. Об одном обобщении ареолярных производных / В. А. Гусев // Bul. Stiintific si tehnic al inst. lui Politehnic Timisoara. – 1962. – V. 7. – Fasc. 2. – P. 223–238.

SUMMARY

It has been shown in the article that with the necessary and sufficient conditions

$$A_1 = -A_4, \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 1$$

one system of partial differential equations can be reduced to the system of canonical form. Using the class of F -monogenic functions the solution of the one canonical system of differential equations has been obtained.

Паступіў у рэдакцыю 03.10.2014 г.