Методыка выкладання

УДК 517.(07)

А.А. Черняк, И.В. Кирюшин, Н.В. Хватюк

ОСОБЕННОСТИ СОСТАВЛЕНИЯ ТЕСТОВ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОМУ КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

В системе высшего образования Республики Беларусь наметилась тенденция к переходу от пассивных форм «валового» обучения к индивидуальному, дифференцированному подходу посредством введения различных форм самостоятельной работы. Образовательный процесс в вузах ориентируется сейчас на творческое, управляемое самообучение, которое должно строиться с учетом потенциала и уровня подготовки каждого студента. Такой путь развития высшего образования требует соответствующего методического обеспечения учебного процесса, разработки новых видов самостоятельной работы и способов ее контроля. В частности, благодаря внедрению компьютерных технологий получило широкое распространение компьютерное тестирование. Оно может быть хорошим подспорьем для контролируемой самостоятельной работы студентов. Тесты заметно облегчают усвоение сложного учебного материала.

Что касается высшей математики, то в настоящее время доминирующее положение в системе среднего специального и высшего образования занимают разного рода тесты и тестовые вопросы, направленные на диагностику *практических* знаний и умений обучаемых. В первую очередь, проверке подвергаются способности решать те или иные примеры и задачи, навыки применения наборов формул в стандартных ситуациях. Теоретическая же составляющая в них выражена весьма слабо. В качестве типичного примера можно привести российский федеральный тест по высшей математике, соответствующий государственному образовательному стандарту (доступный по интернет-адресу http://www.ntsi.jino-net.ru/students/stud_1.php). Так, в разделе математического анализа испытуемым предлагается найти производную, интеграл, градиент, коэффициент разложения в ряд, решение дифференциального уравнения и т. д.

В то же время в высшей школе акцент должен быть сделан именно на глубоком изучении теоретического материала, самих основ математических знаний. Большое количество определений, теорем и доказательств, строгая внутренняя логическая взаимосвязь и последовательность в изложении теоретических сведений, использование практических заданий не только для развития соответствующих навыков, но и для иллюстрации теории – вот главные особенности вузовского курса высшей математики.

В данной статье рассматриваются основные принципы составления тестов (закрытого типа) по теоретическому курсу высшей математики. Обсуждаются проблемы, связанные с формированием тестовых ответов. Положения иллюстрируются примерами тестовых заданий по общему курсу высшей математики для инженерно-экономических специальностей, составленных на базе учебника [1], имеющего гриф Минобразования Республики Беларусь.

Многовариантность правильных ответов. В тестах по математике допускаются две возможности: 1) испытуемому предлагают несколько вариантов ответа, но только один из них правильный; 2) истинными являются несколько вариантов. Когда тесты ориентированы исключительно на решение задач, то второй случай, по понятным причинам, встречается достаточно редко. Напротив, в тестах по теоретическому курсу можно (и необходимо) использовать многовариантность правильных ответов. Более того, тестовые вопросы с несколькими правильными ответами должны преобладать в числе вопросов по теоретическому курсу. Многовариантность позволяет глубже раскрыть суть предмета, взглянуть на него с разных сторон, под различными углами зрения. Это, в свою очередь, позволяет точнее диагностировать, оценивать уровень знаний учащегося. Кроме того, наличие нескольких правильных ответов на одно задание существенно понижает вероятность тривиального угадывания ответа. Так, в системе «один из пяти» (из пяти предлагаемых формулировок ответа на вопрос только одна правильная) эта вероятность составляет 1/5. Если же допустить многовариантность правильных ответов (от одного правильного до пяти), то общее количество комбинаций ответов будет равно $2^5 - 1 = 31$, и, следовательно, вероятность угадать верную комбинацию составит 1/31. В качестве примера приведем тестовое задание на тему «Свойства равномерно сходящихся рядов», когда из пяти предлагаемых ответов все пять будут верными. Знаком «+» отмечены правильные ответы, а символом «–» указаны ошибочные.

• Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве X к функции $S(x)$, a – предельная точка множества X и $\lim_{x\to a} u_n(x) = c_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Этого достаточно, чтобы утверждать, что

+ $\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x\to a} S(x)$ при $x \in X$;

+ $\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} u_n(x)$ при $x \in X$;

+ предел в точке a суммы ряда равен сумме ряда, составленного из пределов в точке a его членов;

+ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится;

+ $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} u_n(x) = \lim_{x\to a} S(x)$ при $x \in X$.

Представим также аналогичный пример по теме «Степенные ряды».

• Дан степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, который сходится в точке $\overline{x} \neq x_0$. Отметьте верные утверждения:

+ $\lim_{n\to\infty} a_n(\overline{x} - x_0)^n = 0$;

+ $\lim_{n\to\infty} \left|a_n(\overline{x} - x_0)^n\right| = 0$;

+ последовательность $\left\{\left|a_n(\overline{x} - x_0)^n\right|\right\}$ ограничена сверху некоторым числом $m > 0$;

+ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n(x - x_0)^n\right|$ мажорируется некоторой сходящейся геометрической прогрессией $\sum_{n=0}^{\infty} mq^n$;

+ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ равномерно сходится в окрестности точки x_0 с радиусом $\left|\overline{x} - x_0\right|$ и абсолютно сходится в каждой точке из этой окрестности.

Ответ как завершение высказывания. В тестах по теории можно использовать задания с предписанием завершить то или иное высказывание. Этот прием применяется, когда речь заходит о разного рода точных определениях и формулировках теорем. Как правило, в таких случаях верным может быть лишь единственный ответ. Например, один из вопросов по теме «Свойства произвольных последовательностей» выглядит так:

• Точка M называется предельной точкой множества X, если любая ее окрестность

– содержит все точки множества X;

+ содержит бесконечно много точек из X;

– содержит некоторое множество точек из X;

– не содержит точек из X, за исключением точки M;

– содержит хотя бы одну точку из множества X.

Следующий пример относится к разделу «Дифференцирование функции одной переменной».

• Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то

+ сумма этих функций также дифференцируема в точке x_0, причем в этой точке справедливо равенство $(u+v)' = u' + v'$;

– сумма этих функций также дифференцируема в точке x_0, причем в этой точке справедливо равенство $(u+v)' = u' + v' - u - v$;

– сумма этих функций также дифференцируема в точке x_0, причем в этой точке справедливо равенство $(u+v)' = u'v + v'u$;

– сумма этих функций также дифференцируема в точке x_0, причем в этой точке справедливо равенство $(u+v)' = u' + uv'$;

– сумма этих функций может быть не дифференцируемой в точке x_0;

Однако ограничение «один правильный ответ» не распространяется на ситуации, подобные следующей.

• Если функции $u(x)$, $r(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то и функция $u \cdot v \cdot r$ дифференцируема в точке x_0, причем в этой точке справедливо равенство

– $(u \cdot v \cdot r)' = u'v'r'$;

– $(u \cdot v \cdot r)' = u' + v' + r'$;

+ $(u \cdot v \cdot r)' = u'vr + v'ur + uvr'$;

– $(u \cdot v \cdot r)' = (u'v + v')r + uvr'$;

+ $(u \cdot v \cdot r)' = (u'v + v'u)r + uvr'$.

В остальных случаях (когда речь не идет об определениях и формулировках теорем) лучше использовать другую конструкцию: «Известно, что (дано, пусть)... Укажите верное высказывание (этого достаточно, чтобы утверждать, что...)».

Ложное утверждение как правильный ответ. В отличие от тестов по практике решения задач, задания по теоретическому курсу могут включать требования найти ошибочные утверждения. Такие формулировки удобно применять в тех случаях, когда исходная информация порождает истинных высказываний больше, чем ложных. К подобному типу заданий также относятся и те, в которых требуется выделить условия, не являющиеся достаточными для истинности того или иного высказывания. Покажем это на примере вопроса по теме «Условная и абсолютная сходимости рядов».

● Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n =$ 1–1+1–1+…+$(-1)^{n+1}$+….

Укажите ошибочное высказывание:

+ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

– данный ряд расходится;

+ данный ряд сходится;

– знакоположительный ряд, составленный из членов этого ряда, расходится;

– знакоотрицательный ряд, составленный из членов этого ряда, расходится.

Другой характерный пример относится к теме «Свойства равномерно сходящихся рядов».

● Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится к функции $T(x)$ на отрезке $[a; b]$, при этом функции $u_n'(x)$ непрерывны на $[a; b]$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Отметьте ложные высказывания:

+ функция $T(x)$ имеет точки разрыва на отрезке $[a; b]$;

– $\int\limits_a^x u_n'(x)dx = u(x) - u(a)$ для любого $x \in [a; b]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

– $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x u_n'(x)dx = \int\limits_a^x T(x)dx$ для любого $x \in [a; b]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

– функция $T(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$;

– функция $T(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$.

В качестве примера задания, где требуется выделить условия, которые не являются достаточными, приведем вопрос по теме «Определенный интеграл».

● Укажите, какие из следующих условий не являются достаточными для интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

+ монотонность $f(x)$ на отрезке $[a; b]$;

– непрерывность $f(x)$ на отрезке $[a; b]$;

+ ограниченность $f(x)$ на отрезке $[a; b]$;

+ конечное число точек разрыва $f(x)$ на отрезке $[a; b]$;

– монотонность и ограниченность $f(x)$ на отрезке $[a; b]$;

– функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$;

– конечное число точек разрыва и ограниченность $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Ответы в виде цепочки логически связанных друг с другом суждений. В некоторых случаях используется внутренняя логическая связь между ответами, относящимися к одному и тому же вопросу. Покажем это на примере (тема – «Определенный интеграл»).

● Функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Из списка ее вероятных свойств выберите те, обладание которыми означает также обладание всеми следующими за ними свойствами, если таковые имеются:

– $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$;

– $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$;

+ $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a; b]$;

+ $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$;

– $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Другой пример относится к теме «Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений».

● Известно, что 1) уравнение $y' = f(x, y)$ обладает свойством локальной единственности решения в открытой области $G \subseteq Af^2$; 2) точка $(x_0, y_0) \in G$; 3) интегральная кривая $\mu(x)$, проходящая через точку (x_0, y_0), определена на промежутке $(a; +\infty)$, $a < x_0$. В списке возможных свойств кривой $y = \mu(x)$ укажите те свойства, обладание которыми означает также обладание всеми следующими за ними свойствами, если таковые имеются:

– $\mu(x)$ – особое решение;

– $\mu(x)$ – частное решение;

+ $\mu(x)$ – асимптотически устойчивое решение;

+ $\mu(x)$ – устойчивое по Ляпунову решение;

– $\mu(x)$ – решение, локально устойчивое в любом интервале $(c; d)$, содержащем точку x_0, и содержащемся в промежутке $(a; +\infty)$.

Варианты ответов как этапы развернутого доказательства. Идея здесь состоит в том, чтобы варианты ответов представляли собой последовательные шаги развернутого доказательства теоремы. Такой логически связанный между собой набор ответов может быть также сценарием решения творческой задачи или примера. При этом испытуемому предлагается выбрать среди возможных ответов именно тот, с которого начинается поэтапное доказательство-решение, либо указать те ответы, которые не имеют к этому прямого отношения. В других случаях от студента требуется выявить только те утверждения, которые непосредственно используются в ходе доказательства-решения. Главное достоинство здесь – это возможность включить в тематику вопросов сведения, ранее традиционно выпадавшие из нее. В качестве иллюстрации приведем три тестовых задания по теме «Определенный интеграл».

● Пусть функция f определена и ограничена на отрезке $[a; b]$, $T = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ – некоторое множество точек этого отрезка, называемое его разбиением, где $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Будем говорить, что разбиение P мельче разбиения T, если P получено из T добавлением конечного числа новых точек отрезка $[a; b]$. Тогда, если разбиение P мельче разбиения T, то $S_T \le S_P$ и $S^P \le S^T$, где S^T, S_T – соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу для разбиения T. Предлагаемые ниже ответы представляют собой пошаговое доказательство этого утверждения. Обозначьте те из них, которые выпадают из этой цепочки.

– пусть разбиение P получено из разбиения T добавлением одной новой точки y, то есть

$$T = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k, ..., x_n\},$$

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}, y, x_k, ..., x_n\};$$

+ допустим, что длина отрезка $[y; x_k]$ больше длины отрезка $[x_{k-1}; y]$;

– обозначим через m, l, r – точные нижние грани значений функции f на частичных отрезках $[x_{k-1}, x_k], [x_{k-1}, y], [y, x_k]$ соответственно; тогда $S_P - S_T = l(y - x_{k-1}) + r(x_k - y) - m(x_k - x_{k-1})$;

– очевидно, что $m \le l$, $m \le r$,

$+ l(y - x_{k-1}) + r(x_k - y) \le (x_k - y)(l + r)$;

$-S_P - S_T \ge m(y - x_{k-1}) + m(x_k - y) - m(x_k - x_{k-1}) = 0$, то есть $S_P \ge S_T$;

– аналогично доказывается, что $S^T \ge S^P$.

● Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a; b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на этом отрезке, если и только если для любого числа $e > 0$ найдется такое разбиение T отрезка $[a; b]$, при котором $S^T(f) - S_T(f) < e$, где $S^T(f)$, $S_T(f)$ – соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции f. Укажите высказывание, с которого начинается доказательство этой теоремы в части необходимости, если все последующие за ним ответы представляют собой этапы такого доказательства.

– $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left(S^T(f) - S_T(f)\right) = 0$;

+ $I = S_* = S^* = \int_a^b f(x)dx$, где S^* и S_* есть точные нижняя и верхняя грани сумм Дарбу для функции $f(x)$;

– для любого числа $e > 0$ найдется разбиение Q отрезка $[a; b]$ такое, что $S_Q > I - \frac{\varepsilon}{2}$;

– для всякого числа $e > 0$ существует разбиение P отрезка $[a; b]$ такое, что $S^P < I + \frac{\varepsilon}{2}$;

– выполним разбиение T отрезка $[a; b]$ такое, что $T = P \cup Q$; тогда $S_Q \le S_T \le I \le S^T \le S^P$;

– $S^T - S_T = (S^T - I) + (I - S_T) \le (S^P - I) + (I - S_Q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = e$.

● Если функция f определена и ограничена на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке, если и только если для любого числа $e > 0$ существует такое разбиение T отрезка $[a; b]$, при котором $S^T(f) - S_T(f) < e$, где $S^T(f)$, $S_T(f)$ – соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции f. Отметьте утверждение, которым открывается доказательство этой теоремы в части достаточности, если все следующие за ним высказывания являются шагами такого доказательства.

+ для любого числа $e > 0$ найдется разбиение Q отрезка $[a; b]$ такое, что $S^Q - S_Q < e$;

– по определению для любого разбиения T отрезка $[a; b]$ выполняются неравенства: $S^T \ge S^*$, $S_* \ge S_T$;

– $S^T - S_T \ge S^* - S_*$;

– если f не интегрируема на отрезке $[a; b]$, то $S^* \ne S_*$;

– обозначим $S^* - S_* = e$, тогда для любого разбиения T должно выполняться неравенство $S^T - S_T \ge \varepsilon$;

– полученное противоречие и доказывает теорему.

Представим также образец задания, в котором требуется указать теоретические факты, лежащие в основе решения этого задания.

● Дан интеграл $\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(nx)}{n(n+1)}\right)dx$. Отметьте утверждения, которые используются для вычисления этого интеграла.

+ $\frac{\cos^2(nx)}{n(n+1)} \le \frac{1}{n(n+1)}$, $n=1, 2, 3,...$, $x \in [0; 2\pi]$;

– $\frac{\cos^2(nx)}{n(n+1)} \ge 0$, $n=1, 2, 3,...$, $x \in [0; 2\pi]$;

+ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(nx)}{n(n+1)}$, мажорируемый сходящимся числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, равномерно сходится на отрезке $[0; 2p]$;

– функции $u_n(x) = \frac{\cos^2(nx)}{n(n+1)}$, $n=1, 2, 3,...$ являются дифференцируемыми на отрезке $[0; 2p]$;

$+$ к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(nx)}{n(n+1)}$ можно применить теорему о почленном интегрировании;

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(nx)}{n(n+1)}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2nx)}{2n(n+1)}dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2n(n+1)}+\frac{\sin(2nx)}{4n^2(n+1)}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n(n+1)};$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n(n+1)}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\pi\cdot 1=\pi.$$

В заключение отметим, что перечисленные выше принципы легли в основу учебного комплекса контрольных и обучающих заданий по общему курсу высшей математики [2–3] на бумажном и электронном носителях. Он предусматривает дифференцированный подход к обучению и самообучению, учитывает различия в уровнях начальной подготовки студентов. При этом задания составлены так, чтобы впроцессе их выполнения осуществлялась не только проверка начального слоя теоретических знаний, но и осмысление студентами основных положений и «тонких» мест фрагментов теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черняк, А.А., Черняк, Ж.А., Доманова, Ю.А.* Высшая математика на базе MathCAD. Общий курс / А.А. Черняк [и др.]. – СПб., 2004.
2. *Черняк, Ж.А., Черняк, А.А., Феденя, О.А.* Контрольные задания по общему курсу высшей математики / Ж.А. Черняк [и др.]. – СПб., 2006.
3. *Черняк, А.А., Черняк, Ж.А., Буснюк, Н.Н.* Общий курс высшей математики. Тесты: самообучение и контроль / А.А. Черняк [и др.]. – Минск, 2007.

SUMMARY

The main principles of designing tests (closed type) on theoretical course of higher mathematics are considered, namely: multialternativeness of the correct answers; using answers in the form of completed statements; including false tasks; using answers as a chain of the logically connected assertions; including answers representing stages of unwrapped proof or decision. These features have been used in training appliances on the course of higher mathematics for engineering and economic specialties.

УДК [51:378.14] (07)

Н.В. Бровка

КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ИНТЕГРАЦИИ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ

Введение. Согласно «Концепции развития педагогического образования в Республике Беларусь», одним из основных направлений исследований в области образования и воспитания является *системное изучение, накопление и использование* результатов научных исследований по перспективным технологиям обучения и воспитания молодежи, подготовки, переподготовки и повышения квалификации кадров [1].

Проблема педагогической интеграции теории и практики обучения студентов университетов в Беларуси не исследовалась и нуждается в разработке, поскольку отвечает современным образовательным и социальным потребностям. Социальная и образовательная потребности педагогической интеграции теории и практики обучения будущего преподавателя математики в университете диктуются противоречиями между:

- требованием целостности профессиональной подготовки специалиста в университете и отсутствием единой системы научно-теоретической и методической его подготовки на протяжении всего периода обучения;
- необходимостью усвоения большого объема научно-теоретических знаний и недостаточным акцентированием профессиональной направленности изучаемых фундаментальных дисциплин;
- потребностью современного образования в творчески-деятельностном подходе к обучению и консервативностью форм и технологий осуществления учебного процесса.

Исследование проблемы интеграции теории и практики обучения математике студентов педагогических специальностей соответствует