МАТЭМАТЫКА

УДК 517.95

М.Т. Стэльмашук, У.А. Шылінец, В.А. Калістратава

АБ НЕКАТОРЫХ ІНТЭГРАЛЬНЫХ УЛАСЦІВАСЦЯХ ДВАЙНЫХ МАНАГЕННЫХ ФУНКЦЫЙ

Уводзіны. У дадзенай працы вывучаюцца некаторыя інтэгральныя ўласцівасці двайных функцый, манагенных у сэнсе У.С. Фёдарава па двух аналагічных функцыях.

Няхай A – алгебра двайных лікаў, базіс якой $1, e$ над полем камплексных лікаў, дзе $e^2 = 1$. Элементы алгебры можна запісаць у выглядзе $a + ec$, дзе a, c – камплексныя лікі, адкуль $a + ec = A_1 e_1 + C_1 e_2$, дзе $A_1 = a + c$, $C_1 = a - c$, $e_1 = \frac{1+e}{2}$, $e_2 \frac{1-e}{2}$.

Разгледзім функцыі $f = Fe_1 + \Phi e_2$, $\xi = pe_1 + qe_2$, $\eta = qe_1 + pe_2$, дзе $p = x^1 + ix^3$, $q = x^2 + ix^4$ ($i^2 = -1$); F, Φ – адназначныя камплексныя непарыўна дыферэнцавальныя функцыі пункта абсягу D рэчаіснай эўклідавай прасторы $E^4(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Лёгка праверыць, што δ^{-1} існуе ў абсягу D $\left(\delta \equiv \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1, \xi_i \equiv \frac{\partial \xi}{\partial x^i}, \eta_i \equiv \frac{\partial \eta}{\partial x^i}, (i = 1,2,3,4)\right)$.

Называем функцыю f манагеннай па функцыях ξ і η у абсягу D і запісваем $f = f\{\xi, \eta; D\}$, калі знойдуцца функцыі φ^1 і φ^2 з наступнай уласцівасцю: для любога фіксаванага пункта $M \in D$ усякаму ліку $\varepsilon > 0$ адпавядае такі лік $\tau(M) > 0$, што для любога пункта $M' \in D$ модуль кожнай кампаненты рознасці $\Delta f - \left(\varphi^1(M)\Delta\xi + \varphi^2(M)\Delta\eta\right)$ ($\Delta f = f(M') - f(M)$ і г. д.) будзе менш чым $\varepsilon\rho$ $\left(\rho = \left|\overline{M}\overline{M}'\right|\right)$ для ўсіх вектараў $\overline{M}\overline{M}'$ пры ўмове $\rho < \tau(M)$ [1–2].

Заўважым, што ў выпадку, калі ў D функцыі ξ і η маюць канечныя вытворныя $\xi_i = \frac{\partial \xi}{\partial x^i}$, $\eta_i = \frac{\partial \eta}{\partial x^i}$ (i=1,...,4), вынікае, што функцыя f мае канечныя вытворныя $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ ($i = 1, \ldots, 4$) у абсягу D, прычым у абсягу D выконваюцца роўнасці

$$f_i = f_\xi \cdot \xi_i + f_\eta \cdot \eta_i \quad (i = 1, \ldots, 4), \qquad (1)$$

дзе $f_\xi = \frac{\partial f}{\partial \xi} = \varphi^1$, $f_\eta = \frac{\partial f}{\partial \eta} = \varphi^2$, $f_\xi = f_\xi(M)$ і г. д.

Асноўная частка. Дакажам, што функцыя f будзе манагеннай па функцыях ξ і η у абсягу D у тым і толькі тым выпадку, калі A і Φ – аналітычныя функцыі камплексных зменных p і q у абсягу D.

Скарыстаем наступную тэарэму [3].

Тэарэма 1. Няхай $f = \sum_{k=1}^{m} b^k e_k$, $\xi^j = \sum_{k=1}^{m} a^{kj} e_k$ ($j = 1, \ldots, p$), дзе $e_1, \ldots, e_m$ – база якой-небудзь алгебры A, a^{kj} і b^k – адназначныя камплексныя функцыі пункта некаторага абсягу D эўклідавай прасторы $E^n(x^1, \ldots, x^n)$ ($m \geq n$ або $m < n$).

Калі функцыі $f, \xi^1, \ldots, \xi^p$ $(p < n)$ маюць непарыўныя частковыя вытворныя $f_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}$, $\xi_i^j \equiv \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}$ $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, p)$ у абсягу D, то неабходная і дастатковая прыкмета манагеннасці функцыі f па функцыях $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p$ заключаецца ў тым, што ў D:

1) існуе δ^{-1}, дзе $\delta \equiv \left|\xi_i^j\right|$ $(i, j = 1, \ldots, p)$,

2) $$\begin{vmatrix} f_i & f_1 & \ldots & f_p \\ \xi_i^1 & \xi_1^1 & \ldots & \xi_p^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_i^p & \xi_1^1 & \ldots & \xi_p^p \end{vmatrix} = 0 \quad (i = p+1, \ldots, n). \qquad (2)$$

Тэарэма 2. Маем $f = f\{\xi, \eta; D\}$ тады і толькі тады, калі F, Φ – аналітычныя функцыі камплексных зменных $p = x^1 + ix^3$, $q = x^2 + ix^4$ у абсягу D.

Доказ. Паколькі $f \cdot \xi \cdot \eta = (F \cdot p \cdot q)e_1 + (\Phi \cdot q \cdot p)e_2$, то раўнанні (2) прымуць выгляд

$$\begin{vmatrix} F_k & F_1 & F_2 \\ p_k & p_1 & p_2 \\ q_k & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \Phi_k & \Phi_1 & \Phi_2 \\ p_k & p_1 & p_2 \\ q_k & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(k = 3, 4).$$

Адкуль вынікае, што

$$\begin{vmatrix} F_3 & F_1 & F_2 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} F_4 & F_1 & F_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(аналагічна для Φ), адкуль атрымаем $F_3 = iF_1$, $F_4 = iF_2$ $(\Phi_3 = i\Phi_1, \Phi_4 = i\Phi_2)$, г. зн. прыйшлі да вядомых умоў аналітычнасці функцый F і Φ двух камплексных зменных p і q.

Возьмем унутры D які-небудзь абсяг G з дастаткова гладкай граніцай ∂G (каб можна было скарыстаць да G вядомую формулу Астраградскага) і пункт $M\left(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4\right)$ унутры або па-за G, але не на ∂G і разгледзім інтэграл [4]

$$I(f, \partial G, M) = \int_{\partial G} S\left(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\right) f dS, \qquad (3)$$

дзе $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ – кіроўныя косінусы вонкавай нармалі да паверхні ∂G у яе бягучым пункце $P\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$,

$$S\left(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\right) = \sum_{i=1}^{4} S_i\left(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\right),$$

$$S_i\left(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\right) = \begin{vmatrix} \alpha^i\sigma_i & \alpha^1\sigma_i - \alpha^i\sigma_1 & \alpha^2\sigma_i - \alpha^i\sigma_2 \\ \xi_i & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_i & \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha^i & \alpha^1 & \alpha^2 \\ \xi_i & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_i & \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \sigma_i + \alpha^i \left(\begin{vmatrix} \xi_i & \xi_2 \\ \eta_i & \eta_2 \end{vmatrix} \sigma_1 - \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_1 \\ \eta_i & \eta_1 \end{vmatrix} \sigma_2 \right) +$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha^i & \alpha^1 & \alpha^2 \\ \xi_i & e_1 & e_2 \\ \eta_i & e_2 & e_1 \end{vmatrix} \sigma_i + \alpha^i \left(\begin{vmatrix} \xi_i & e_2 \\ \eta_i & e_1 \end{vmatrix} \sigma_1 - \begin{vmatrix} \xi_i & e_1 \\ \eta_i & e_2 \end{vmatrix} \sigma_2 \right)$$

$$\sigma = -\frac{1}{2r^2}, \quad r^2 = \sum_{i=1}^{4} \left(x^i - x_0^i\right)^2$$

Тэарэма 3. Калі $f = f\{\xi, \eta; D\}$ і $M \notin \overline{G}$ $\left(\overline{G} = G \cup \partial G\right)$, то $I(f, \partial G, M) = 0$.

Доказ. Скарыстаўшы формулу Астраградскага, атрымаем:

$$I(f, \partial G, M) = \int_{\partial G} \Big\{ \alpha^1 \left((e_1 - e_2)\sigma_1 - i(e_1 - e_2)\sigma_3 \right) +$$

$$+ \alpha^2 \left((e_1 - e_2)\sigma_2 - i(e_1 - e_2)\sigma_4 \right) + \alpha^3 \left((e_1 - e_2)\sigma_3 + \right.$$

$$\left. + i(e_1 - e_2)\sigma_1 \right) + \alpha^4 \left((e_1 - e_2)\sigma_4 + i(e_1 - e_2)\sigma_2 \right) \Big\} f dS =$$

$$= \int_G \Big\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\left((e_1 - e_2)\sigma_1 - i(e_1 - e_2)\sigma_3 \right) f \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\left((e_1 - e_2)\sigma_2 - i(e_1 - e_2)\sigma_4 \right) f \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\left((e_1 - e_2)\sigma_3 + i(e_1 - e_2)\sigma_1 \right) f \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^4} \left(\left((e_1 - e_2)\sigma_4 + i(e_1 - e_2)\sigma_2 \right) f \right) \Big\} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 =$$

$$\int_G \Big\{ (e_1 - e_2)\sigma_{11} f + (e_1 - e_2)\sigma_1 f_1 - i(e_1 - e_2)\sigma_{31} f -$$

$$- i(e_1 - e_2)\sigma_3 f_1 + (e_1 - e_2)\sigma_{22} f +$$

$$+ (e_1 - e_2)\sigma_2 f_2 - i(e_1 - e_2)\sigma_{42} f - i(e_1 - e_2)\sigma_4 f_2 +$$

$$+ (e_1 - e_2)\sigma_{33} f + (e_1 - e_2)\sigma_3 f_3 +$$

$$+ i(e_1 - e_2)\sigma_{13} f + i(e_1 - e_2)\sigma_1 f_3 +$$

$$+ (e_1 - e_2)\sigma_{44} f + (e_1 - e_2)\sigma_4 f_4 + i(e_1 - e_2)\sigma_{24} f +$$

$$+ i(e_1 - e_2)\sigma_2 f_4 \Big\} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 =$$

$$= \int_G \Big\{ (e_1 - e_2)(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} + \sigma_{44}) f + (e_1 - e_2)\sigma_1 f_1 +$$

$$+ (e_1 - e_2)\sigma_2 f_2 + (e_1 - e_2)\sigma_3 f_3 +$$

$$+ (e_1 - e_4)\sigma_4 f_4 - i(e_1 - e_2)\sigma_3 f_1 - i(e_1 - e_2)\sigma_4 f_2 +$$

$$+ i(e_1 - e_2)\sigma_1 f_3 + i(e_1 - e_2)\sigma_2 f_4 \Big\} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4.$$

Паколькі $\sum_{i=1}^{4} \sigma_{ii} = 0$ (σ – гарманічная функцыя ад x^1, x^2, x^3, x^4), таму маем:

$$I(f, \partial G, M) = \int_G \Big\{ \left(\sigma_1 (e_1 - e_2) - \sigma_3 i (e_1 - e_2) \right) f_1 +$$

$$+ \left((e_1 - e_2)\sigma_2 - i(e_1 - e_2)\sigma_4 \right) f_2 +$$

$$+ \left((e_1 - e_2)\sigma_3 + i(e_1 - e_2)\sigma_1 \right) f_3 +$$

$$+ \left((e_1 - e_2)\sigma_4 + i(e_1 - e_2)\sigma_2 \right) f_4 \Big\} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4.$$

Паколькі $f = f\{\xi, \eta; D\}$, то згодна з (1)

$$f_1 = \varphi^1 \xi_1 + \varphi^2 \eta_1 = \varphi^1 e_1 + \varphi^2 e_2,$$

$$f_2 = \varphi^1 \xi_2 + \varphi^2 \eta_2 = \varphi^1 e_2 + \varphi^2 e_1,$$

$$f_3 = \varphi^1 \xi_3 + \varphi^2 \eta_3 = \varphi^1 i e_1 + \varphi^2 i e_2,$$

$$f_4 = \varphi^1 \xi_4 + \varphi^2 \eta_4 = \varphi^1 i e_2 + \varphi^2 i e_1.$$

Скарыстаўшы гэтыя роўнасці, будзем мець:

$$I(f, \partial G, M) = \int_G \Big\{ \left((e_1 - e_2)\sigma_1 - i(e_1 - e_2)\sigma_3 \right) \left(\varphi^1 e_1 + \varphi^2 e_2 \right) +$$

$$+ \left((e_1 - e_2)\sigma_2 - i(e_1 - e_2)\sigma_4 \right) \left(\varphi^1 e_2 + \varphi^2 e_1 \right) +$$

$$+ \left((e_1 - e_2)\sigma_3 + i(e_1 - e_2)\sigma_1 \right) \left(\varphi^1 i e_1 + \varphi^2 i e_2 \right) +$$

$$+ \left((e_1 - e_2)\sigma_4 + i(e_1 - e_2)\sigma_2 \right) \left(\varphi^1 i e_2 + \varphi^2 i e_1 \right) \Big\} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = 0.$$

Тэарэма 4. Калі $f = f\{\xi, \eta; D\}$, то для пункта M унутры $G\left(M \in G, \overline{G} \subset D\right)$ маем:

$$f_M = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial G} \left\{ \alpha^1\sigma_1 + \alpha^2\sigma_2 + \alpha^3\sigma_3 + \alpha^4\sigma_4 - i \left(\begin{vmatrix} \alpha^1 & \sigma_1 \\ \alpha^3 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha^2 & \sigma_2 \\ \alpha^4 & \sigma_4 \end{vmatrix} \right) \right\} f dS. \quad (4)$$

Доказ. Няхай Ω – сфера радыуса ε з цэнтрам ў пункце M, размешчаная ўнутры ∂G. На падставе тэарэмы 3,

$$I(f, \partial G, M) = I(f, \Omega, M), \qquad (5)$$

прычым для сферы Ω маем: $\sigma_i = \dfrac{\alpha^i}{\varepsilon^3}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Таму,

$$I(f,\Omega,M)=\int_{\Omega}(f\delta)\,d\omega,$$

дзе $d\omega$ – элемент адзінкавай сферы, адкуль пры $\varepsilon\to 0$ (пункт M пастаянны) атрымаем

$$\int_{\Omega}(f\delta)\,d\omega=(f\delta)_M\,\omega, \qquad (6)$$

дзе $\omega=2\pi^2$.

З роўнасцей (5) і (6) знаходзім

$(f\delta)_M=\dfrac{1}{2\pi^2}I(f,\partial G,M)$, адкуль, на падставе (3), вынікае формула (4).

Тэарэма 4 даказаная.

Заключэнне. Атрыманае інтэгральнае выяўленне (4) дазваляе рашыць наступную краявую задачу.

Задача. Няхай двайныя функцыі $\xi=(x^1+ix^3)e_1+(x^2+ix^4)e_2$, $\eta=(x^2+ix^4)e_1+$ $+(x^1+ix^3)e_2$ і двайная функцыя f, манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава па функцыях ξ і η, вызначаны на некаторай замкнутай трохмернай паверхні ∂G, гомеаморфнай сферы канечнага дыяметра і дастаткова гладкай для магчымасці скарыстаць формулу Астраградскага (G – унутранасць паверхні ∂G).

Патрабуецца знайсці ў любым пункце $M(x^1,x^2,x^3,x^4)\in G$ значэнне двайной функцыі f, манагеннай у сэнсе У.С. Фёдарава па двайных функцыях ξ, η, калі вядомы яе значэнні па паверхні ∂G.

Заўвага. Як было даказана раней (тэарэма 2), двайная функцыя $f=Fe_1+\Phi e_2$ будзе манагеннай у сэнсе У.С. Фёдарава па двух двайных функцыях $\xi=(x^1+ix^3)e_1+(x^2+ix^4)e_2$ і $\eta=(x^2+ix^4)e_1+(x^1+ix^3)e_2$ у абсягу D у тым і толькі тым выпадку, калі F і Φ – аналітычныя функцыі камплексных зменных $p=x^1+ix^3$ і $q=x^2+ix^4$ у абсягу D.

Тады з формулы (4) маем

$$F_M=\frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial G}\left\{\alpha^1\sigma_1+\alpha^2\sigma_2+\alpha^3\sigma_3+\alpha^4\sigma_4-i\left(\begin{vmatrix}\alpha^1 & \sigma_1\\ \alpha^3 & \sigma_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha^2 & \sigma_2\\ \alpha^4 & \sigma_4\end{vmatrix}\right)\right\}F\,dS,$$

або

$$F_M=\frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial G}\left\{(\alpha^1+i\alpha^3)(\sigma_1-i\sigma_3)+(\alpha^2+i\alpha^4)(\sigma_2-i\sigma_4)\right\}F\,dS.$$

Апошнюю формулу можна запісаць у наступным выглядзе:

$$F_M=\frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial G}\left\{(\alpha^1+i\alpha^3)\left((x^1-x_0^1)-i(x^3-x_0^3)\right)+\right.$$
$$\left.+(\alpha^2+i\alpha^4)\left((x^2-x_0^2)-i(x^4-x_0^4)\right)\right\}\frac{F}{r^4}\,dS,$$

дзе $r=\sqrt{\sum_{k=1}^{4}(x^k-x_0^k)^2}$.

Атрымалі аналаг інтэгральнай формулы Кашы для аналітычнай функцыі F дзвюх камплексных зменных x^1+ix^3 і x^2+ix^4.

ЛІТАРАТУРА

1. Федоров, В.С. О моногенных функциях / В.С. Федоров // Труды Третьего Всесоюзного математического съезда. – 1956. – Т. 1. – С. 108–109.
2. *Стельмашук, Н.Т., Шилинец, В.А.* О структуре F-моногенных двойных функций / Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1988. – № 2. – С. 121.
3. *Морев, И.А.* Об одном обобщении уравнений Коши–Римана и гармоничности моногенных гиперкомплексных функций / И.А. Морев // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1958. – № 3. – С. 176–182.
4. *Морев, И.А.* О некоторых интегральных свойствах моногенных гиперкомплексных функций / И.А. Морев // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1963. – № 6. – С. 116–122.

SUMMARY

The integral representation for double F-monogenic functions has been obtained. Using this representation, the result of the boundary value problem for double functions has been obtained.