Применение параметризации при решении некоторых школьных задач

О.Н. Пирютко
Белорусский государственный педагогический университет им М.Танка (Минск)
e-mail: Elena @ mail.by

Замена числа переменной (параметром), для которой это число является некоторым значением, является эффективным приемом решения во многих задачах из различных разделов школьного курса математики. Также целесообразным является замена новым параметром уже имеющихся переменных или выражений, их содержащих. После этого задача решается относительно новых параметров. Задачи повышенной сложности отмечены *.

Приведем примеры, иллюстрирующие указанные приемы и расширяющие знания учащихся в использовании различных подходов к решению задач.

Задание 1

а) Вычислите значение выражения: $3\frac{1}{117}\cdot 4\frac{1}{119}-1\frac{116}{117}\cdot 5\frac{118}{119}-\frac{5}{119}$

Решение

Пусть число $\frac{1}{117}$ – значение некоторой переменной a, число $\frac{1}{119}$ – значение некоторой переменной b.

Тогда $3\frac{1}{117}\cdot 4\frac{1}{119}-1\frac{116}{117}\cdot 5\frac{118}{119}-\frac{5}{119}$= (3+a)(4+b) - (2-a)(6-b) – 5b

Раскрывая скобки, получим: 12+ab+3b+4a-12+6a+2b–ab – 5b,

после приведения подобных слагаемых, получим:

12 + ab + 3b +4a – 12 + 6a + 2b – ab – 5b =10a.

Возвращаясь к значению a = $\frac{1}{117}$, получим ответ:

$3\frac{1}{117}\cdot 4\frac{1}{119}-1\frac{116}{117}\cdot 5\frac{118}{119}-\frac{5}{119}=\frac{10}{117}$.

b) Вычислите значение выражения: $\sqrt{2013^2+2013^2 2014^2+2014^2}$

Решение

Пусть число 2013 – значение некоторой переменной a, тогда

$\sqrt{2013^2+2013^2 2014^2+2014^2}=\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{a}^2(a+1)^2+(a+1)^2}$.

Выполним преобразование выражения, стоящего под знаком корня:

$\mathrm{a}^2+\mathrm{a}^2(a+1)^2+(a+1)^2=(a^4+a^3+a^2)+(a^3+a^2+a)+(a^2+a+1)=$

$(a^2+a+1)\,(a^2+a+1)=(a^2+a+1)^2$.

Возвращаясь к значению переменной a= 2013, получим:
$$\sqrt{2013^2+2013^2 2014^2+2014^2}=\sqrt{(2013^2+2013+1)^2}=2013^2+2014$$
$$=4054183$$

c) Вычислите значение выражения: $\sqrt{2013\cdot2015\cdot2017\cdot2019+16}$

Пусть число 2016 – значение некоторой переменной a, тогда $\sqrt{2013\cdot2015\cdot2017\cdot2019+16}=\sqrt{(a-3)(a-1)(a+1)(a+3)+16}$.

Выполним преобразование выражения, стоящего под знаком корня:

$$(a-3)(a-1)(a+1)(a+3)+16=(a^2-1)(a^2-9)+16=$$

$=a^4-10a^2+25=(a^2-5)^2$.

$\sqrt{(a-3)(a-1)(a+1)(a+3)+16}=\sqrt{(a^2-5)^2}=|a^2-5|$.

Возвращаясь к значению переменной a = 2013, получим:

$\sqrt{2013\cdot2015\cdot2017\cdot2019+16}=2016^2-5=4064251$

d) Упростите выражение:

$70\cdot(71^9+71^8+71^7+\cdots+71^2+71)+1$

Решение

Пусть число 71 – значение переменной a. Тогда

$=70\cdot(71^9+71^8+71^7+\cdots+71^2+71)+1=(\mathrm{a}-1)(a^9+\mathrm{a}^8+\mathrm{a}^7+\ldots+\mathrm{a}^2+\mathrm{a}+1)+1$
$=(\mathrm{a}^{10}+\mathrm{a}^9+\ldots+\mathrm{a}^3+\mathrm{a}^2+\mathrm{a})-(\mathrm{a}^9+\mathrm{a}^8+\ldots++\mathrm{a}+1)+1=\mathrm{a}^{10}$.

Следовательно, значение данного выражения равно 71^{10}.

e)* Упростите выражение:

$\frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{125}+2\sqrt{5}}}$. [3]

Решение

Пусть $a=\sqrt[4]{5}$. Будем далее пользоваться равенством: $a^4=5$.

Преобразуем подкоренное выражение: $4-3\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{125}+2\sqrt{5}=-(a^3-2a^2+3a-4)=(2a^2+4)-(a^3+3a)=\frac{(2a^2+4)^2-(a^3+3a)^2}{(2a^2+4)+(a^3+3a)}=$ $\frac{(4a^4+16a^2+16)\ -(a^6+6a^4+9a^2)}{(2a^2+4)+(a^3+3a)}=\frac{4\cdot5+16a^2+16-(5a^2+6\cdot5+90)}{(2a^2+4)+(a^3+3a)}=\frac{2a^2+6}{a^3+2a^2+3a+4}=$ $\frac{(2a^2+6)(2a^2-6)}{(a^3+2a^2+3a+4)(2a^2-6)}=\frac{4a^4-36}{2(a^5+2a^4-2a^2-9a-12)}$ $=\frac{4\cdot5-36}{2(5a+2\cdot5-2a^2-9a-12)}=\frac{4}{a^2+2a+1}=(\frac{2}{a+1})^2$. При $a=\sqrt[4]{5}$ получаем $(\frac{2}{a+1})^2=(\frac{2}{\sqrt[4]{5}+1})^2$.

Подставим полученное выражение в знаменатель данной дроби, будем иметь: $\frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{125}+2\sqrt{5}}}=\sqrt[4]{5}+1$.

g) Является ли число $\sqrt[3]{2}$ корнем уравнения $x^2-x+1=\sqrt[3]{9(x-1)}$?

Решение. Так как -1 не является корнем данного уравнения, то оно равносильно уравнению $x^3+1=\sqrt[3]{9(x-1)(x+1)^3}$(1).

Обозначив $\sqrt[3]{2}$ через a , будем иметь

$$9(a-1)(a+1)^3=9(a-1)(a^3+3a^2+3a+1)=$$

$9(a-1)(3a^2+3a+3)=27(a^3-1)=27,$

откуда следует, что число $\sqrt[3]{2}$ является корнем уравнения (1), а значит и корнем заданного уравнения.

Задание 2

Сравните числа:

а) $\sqrt{12\sqrt[3]{2}-15}+2\sqrt{3\sqrt[3]{4}-3}$ и 3. [3]

Решение 1

Добьёмся с помощью замен под знаками корней квадратов каких - либо выражений. Пусть $\alpha = \sqrt[3]{2}$, тогда $3 = \alpha^3 + 1$, $12\sqrt[3]{2} - 15 = 3(4\alpha - 5) = (\alpha^3 + 1)(4\alpha - 4 - 1) = (\alpha^3 + 1)((\alpha^3 + 2)(\alpha - 1) - 1) = (\alpha^3 + 1)((\alpha^4 -$ α *3+2*α−3=α *3+1*α *4−2*α *3+2*α−1=α *3+1*α *2−1(a−1)2 =(a−1)2 (a2−a+1)2*, заметим, что *(a+1)2a−1=(a2−a+1)* при α = *32*.

$3\sqrt[3]{4} - 3 = (\alpha^3 + 1)(\alpha^2 - 1) = (a+1)^2(a-1)(a^2 - a + 1) = (a^2 - a + 1)^2$

Окончательно получим:

$\sqrt{12\sqrt[3]{2} - 15} + 2\sqrt{3\sqrt[3]{4} - 3} = (a-1)\quad(a^2 - a + 1)\quad +2(a^2 - a + 1) =$

$\alpha^3 + 1 = 3$. Таким образом, данные числа равны.

Решение 2

Сравним выражения $\sqrt{12\sqrt[3]{2} - 15} + 2\sqrt{3\sqrt[3]{4} - 3}$ и 3с помощью тождественных преобразований в неравенствах.

Пусть $\alpha = \sqrt[3]{2}$, тогда $\sqrt{12\sqrt[3]{2} - 15} + 2\sqrt{3\sqrt[3]{4} - 3} = \sqrt{12\alpha - 15} + 2\sqrt{3\alpha^2 - 3} \vee 3$ или $2\sqrt{3\alpha^2 - 3} \vee 3 - \sqrt{12\alpha - 15}$ или

$$2\sqrt{\alpha^2 - 1} \vee \sqrt{3} - \sqrt{4\alpha - 5}$$

Заметим, что $5 < 4\sqrt[3]{2} < 6 (125 < 128 < 216)$ поэтому

$$5 < 4\alpha < 6, \text{а следовательно,}$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{4\alpha - 5} > 0$$

После возведения в квадрат обеих частей
$2\sqrt{\alpha^2 - 1} \vee \sqrt{3} - \sqrt{4\alpha - 5}$,

получим:$4\alpha^2 - 4 \vee 3 - 2\sqrt{12\alpha - 15} - 5 + 4\alpha$ или $1 + 2\alpha - 2\alpha^2 \vee \sqrt{12\alpha - 15}$.

Заметим, что $1 + 2\propto > 2\propto^2$ (1). Действительно, умножив обе части последнего неравенства на α, получим: $\propto +2\propto^2 > 4$. Поскольку

$\alpha = \sqrt[3]{2} > 1{,}2$, то последнее неравенство верно , а следовательно, и неравенство (1) верно.

После повторного возведения в квадрат получим:

$1{+}4 \propto +4\alpha^2 + 4\alpha^4 - 4\alpha^2 - 8\alpha^3 \vee 12\alpha - 15$ или

$16 - 8 \propto +4\alpha^4 - 8\alpha^3 \vee 0$, откуда $16 - 16 + 8\alpha - 8\alpha = 0$. Следовательно, данные числа равны.

b) Сравните числа

$\frac{2{,}0000004}{(1{,}0000004)^2+2{,}0000004}$ и $\frac{2{,}0000002}{(1{,}0000002)^2+2{,}0000002}$[6].

Пусть a=0, 0000002, тогда сравним значения выражений $\frac{2+2a}{(1+2a)^2+(2+2a)}$ и $\frac{2+a}{(1+a)^2+2+a}$.

Заменим каждое из выражений на обратное ему:

$\frac{(1+2a)^2+(2+2a)}{2+2a}$ и $\frac{(1+a)^2+2+a}{2+a}$, выполняя тождественные преобразования выражений, получим:

$\frac{(1+2a)^2}{2+2a} + 1$ и $\frac{(1+a)^2}{2+a} + 1$, уменьшая на 1 каждую сумму, сравним выражения:

$\frac{(1+2a)^2}{2+2a}$ и $\frac{(1+a)^2}{2+a}$, приводя к общему знаменателю, сравним дроби

$$\frac{(1+2a)^2(2+a)}{(2+2a)(2+a)} \text{ и } \frac{2(1+a)(1+a)^2}{(2+a)(2a+2)}.$$

Сравнивая числители этих дробей, получим, что

$(1+2a)^2(2+a) > 2(1+a)(1+a)^2$ при любом положительном a, следовательно, при a = 0,0000002, а

значит первое из данных выражений меньше второго.

с) Сравните значения выражений: $\frac{1666\ldots6}{666\ldots64}$ и $\frac{1999\ldots.9}{999\ldots95}$, где в числителях и знаменателях стоят по 2013 одинаковых цифр. [2]

Решение

Обозначим $10^{2013} = a,$ 333…3 = b (цифра 3 повторяется 2013 раз) и рассмотрим выражения $\frac{a+2b}{20b+4}$ и $\frac{a+3b}{30b+5}$. После приведения их к общему знаменателю будем иметь: $\frac{30ab+5a+60b^2+10b}{(20b+4)(30b+5)}$ и $\frac{20ab+4a+12b+60b^2}{(20b+4)(30b+5)}$, разность

этих выражений равна: $\frac{10ab+a-2b}{(20b+4)(30b+5)}$, откуда следует, что значение этого выражения при $a = 10^{2013}$, b=333…3 положительно, следовательно, $\frac{1666...6}{666...64} > \frac{1999....9}{999...95}$.

d)∗ Докажите неравенство: $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5\ldots\sqrt{n}}}}} < 3$ для любых натуральных n. [7].

Решение

Докажем методом от противного.

Обозначим $a_k = \sqrt{k\sqrt{(k+1)\ldots\sqrt{(n-2)\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}$.

Тогда $a_k = \sqrt{ka_{k+1}}$, откуда $a_{k+1} = \frac{{a_k}^2}{k}$.По предположению, a_2≥3.Используя метод математической индукции, получаем, что $a_m \geq m+1$:
предположим, что $a_k \geq k+1$, тогда: $a_{k+1} = \frac{{a_k}^2}{k} \geq \frac{(k+1)^2}{k} > k+2$.

В частности, $a_{n-1} = \sqrt{(n-1)\sqrt{n}} > n$, что неверно.
Следовательно,

наше предположение неверно, остается $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5\ldots\sqrt{n}}}}} < 3$.

e)

Верно ли, что $\sqrt[2014]{2014!} > \sqrt[2015]{2015!}$?

Решение

Обозначим 2014 = n, где $n\epsilon N$. Тогда данное неравенство будет иметь вид

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt[n+1]{(n+1)!}$$

Предположим, что оно верно и возведем обе части неравенства в степень (n+1), получим $n!\sqrt[n]{n!} > (n+1)!$, откуда следует, что $\sqrt[n]{n!} > n+1$ или

n! $> (n+1)^n$, что, очевидно, неверно. Следовательно, данное неравенство неверно.

Задание 3

а) Решите уравнение:$5 + x = x^4 - 10x^2 + 25$ [4].

Решение

Пусть 5 - значение некоторого параметра а, тогда 25= a^2, 10 = 2а и данное уравнение примет вид: $a^2 - a(1+2x^2) + x^4 - x = 0$. Решим его относительно а.

D= $(1+2x^2)^2 - 4x^4 + 4$ = $(1+2x)^2$, а = $x^2 - x$ или а = $x^2 + x + 1$.

Вернемся к значению параметра а=5.

Получим, что корни данного уравнения совпадают с корнями следующих двух уравнений: $x^2 - x - 5 = 0$ и $x^2 + x - 4 = 0$. Решения этих квадратных уравнений - числа $\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ являются корнями данного уравнения .

с) * Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x + y - 4z \\ z^2 + y^2 = -x + 4y + 2z \\ x^2 + z^2 = 4x - 2y + z \end{cases} \quad (1)$$

Решение

Замечание 1. Заметим, что тройка чисел (0;0; 0) является решением этой системы. Если какие- либо два числа из тройки решения x, y, z отрицательны, то в одном из уравнений системы получится отрицательное число в правой части и положительное – в левой. Заметим, что у не может быть отрицательным , т.к. складывая два вторых и одно первое уравнения, получим $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9y$. Умножая третье уравнение системы на 4 и складывая с первым, получим, $5x^2 + y^2 + 5z^2 = -7y + 18$x . Откуда следует, что x не может быть отрицательным. Таким образом, в тройке чисел x, y, z, удовлетворяющих системе, только z может быть отрицательным числом.

Замечание 2. Выразим из системы (1) x+z и y+z.

$$\begin{cases} (x^2+y^2)\propto=(2x+y-4z)\propto \\ (z^2+y^2)\beta=(-x+4y+2z)\beta \\ (x^2+z^2)\gamma=(4x-2y+z)\gamma \end{cases}$$, сложим уравнения системы, получим:

$$(2\propto-\beta+4\gamma)x+(\propto+4\beta-2\gamma)y+(-4\propto+2\beta+\gamma)z = (\alpha+\gamma)x^2+(\alpha+\beta)y^2+(\gamma+\beta)z^2$$

Если $2\propto-\beta+4\gamma=1, \propto+4\beta-2\gamma=0, -4\propto+2\beta+\gamma=1$, то

$\propto=-\frac{2}{27}, \beta=\frac{5}{27}, \gamma=\frac{1}{3}$ и 27(x + z)= $7x^2+3y^2+14z^2$.

Аналогично предыдущему, получим:

81(y+ z) = $4x^2+21y^2+35z^2$. Откуда следует, что x + z≥ 0 и y+ z≥0

Рассмотрим числа 1, 2, 4 как значения некоторых параметров a,b, c соответственно. Тогда относительно этих параметров данную систему можно рассматривать как линейную. Будем искать ненулевые решения системы:

$$\begin{cases} x^2+y^2=bx+ay-cz \\ z^2+y^2=-ax+cy+bz \\ x^2+z^2=cx-by+az \end{cases}$$

Решим эту систему относительно a,b, c .

Умножим первое уравнение на z, второе – на - x и сложим эти уравнения, получим:

$x^2z+y^2z-y^2x-z^2x=a(x^2+zy)-c(z^2+yx)$(*)

Умножим первое уравнение на y, третье – на x и сложим эти уравнения, получим:

$$z^2x+y^3+x^3+x^2y=a(y^2+xz)+c(x^2-zy)(**)$$

Далее: умножим уравнение (*) на (x^2-zy), а уравнение $(**)$ – на

(z^2+xy) и сложим эти уравнения, получим:

$a(x^4 + y^3x + z^3x + x^2zy) = (y + z)(x^4 + y^3x + z^3x + x^2zy)$, откуда

a= y+z (1).

Заметим, что $x^4 + y^3x + z^3x + x^2zy = x(x^3 + y^3 + z^3 + xzy) \neq 0$ при $x \neq 0$.

Действительно, выражение $x^3 + y^3 + z^3 + xzy$ может обратиться в ноль, если некоторые из переменных принимают отрицательные значения. По замечанию 1, отрицательным может быть только z.

По замечанию 2 получим:

Если x>y, то x>-z и y>-z, тогда $y^3 > |z|^3, x^3 > |xyz|$ и $x^3 + y^3 + z^3 + xzy > 0$. Если x<y, тогда $x^3 > |z|^3, y^3 > |xyz|$ и $x^3 + y^3 + z^3 + xzy > 0$.

Выполняя преобразования, аналогичные предыдущим, получим b = x+z(2), c = x+y (3).

После сложения последних трех уравнений будем иметь:

$\frac{a+b+c}{2}$= x+y+z (4) , вычитая из уравнения (4) уравнение (1), затем - уравнения (2) и (3), получим:

$\frac{-a+b+c}{2}$=x, $\frac{a-b+c}{2}$= y, $\frac{a+b-c}{2}$= z.

Подставим в последние равенства значения a,b,c, равные соответственно 1, 2, 4, окончательно получим:

$\frac{5}{2}$=x, $\frac{3}{2}$= y, $\frac{-1}{2}$= z.

Ответ: $(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}), (0; 0; 0)$

d) Решите систему[5]:

$$\begin{cases} x^3 + x^2(13 - y - z) + x(2y + 2z - 2yz - 26) + 5yz - 7y - 7z + 30 = 0 \\ x^3 + x^2(17 - y - z) - x(2y + 2z + 2yz - 26) + y + z - 3yz - 2 = 0 \\ x \in [4; 7] \end{cases}$$

Решение

Первое уравнение системы заменим суммой двух уравнений системы, а второе - разностью:

Сумма: $2x^3 + x^2(30 - 2y - 2z) - x(4yz) + 2yz - 6y - 6z + 28 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2(15 - y - z) - x(2yz) + yz - 3y - 3z + 14 = 0$

Разность $4x^2 - x(4y + 4z - 52) - 8y - 8z + 8yz + 32 = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 - x(y + z - 13) - 2y - 2z + 2yz + 8 = 0$$

$$\begin{cases} x^3 + x^2(15 - y - z) - x(2yz) + yz - 3y - 3z + 14 = 0 \\ x^2 - x(y + z - 13) - 2y - 2z + 2yz + 8 = 0 \end{cases}$$

Обозначим 13-x-y через t, а yz через k и рассмотрим полученную систему как линейную относительно t и k.

$$\begin{cases} x^3 + x^2(2 + t) - (2k)x + k + 3t - 25 = 0 \\ x^2 + x(t) - 2t + 2k + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t(x^2 + 3) + (2x - 1)k - 25 + x^3 + 2x^2 = 0 \\ t(x - 2) + 2k + x^2 + 18 = 0 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (-2), а второе – на (2x-1) сложим полученные уравнения, получим: t(5x+4)=$-5x^2 - 36x - 32$,

откуда t = 8-x,подставляя t во второе уравнение, получим k= 5x+1 или

y + z = 5+x, yz= 5x+1. Далее, y = 5+ x-z, 5x+1= (5+ x-z)(z),

z^2-z(5+x)+5x+1=0. Последнее уравнение имеет решения лишь в том случае, когда D= $x^2 - 10x + 21 \geq 0$ т.е. $x \geq 7$ или x ≤ 3. С учетом последнего условия в системе, получим x=7, y=z= 6.

Ответ:(7;6;6)

Задание 4

a) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $2x^2+3y^2$, если выполняется условие $x^2+2xy+2y^2=2$.[4].

Решение

Введем параметр, обозначив выражение $2x^2+3y^2$ через а. Тогда условие задачи будет иметь такую формулировку: при каком наибольшем и при каком наименьшем значении параметра, a система уравнений $\begin{cases} x^2+2xy+2y^2=2 \\ 2x^2+3y^2=a \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

Заметим, что при а= 0 данная система не имеет решений. Умножим первое уравнение системы на $-a,$ а второе – на 2 и сложим эти уравнения. Получим

$(4-a)x^2-2ayx+y^2(6-2a)$=0 (*)

Если а= 4 то уравнение (*) имеет вид у(у+4х) =0, и данная система не имеет решения.

При $a \neq 4$ это уравнение (*)является квадратным и для существования его решения необходимо выполнение условия $D \geq 0$

D=$4y^2\left(a^2-(4-a)(6-2a)\right)=4y^2(-a^2+14a-24)\geq 0$

$-a^2+14a-24\geq 0$, а$\in[2;12]$

Проверка показывает, что при а=2и при а=12система имеет решение, следовательно, 2 - наименьшее, а 12- наибольшее значение выражения $2x^2+3y^2$.

Ответ: 2, 12.

b)* Найдите множество значений выражения

$\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(a+c-b)^2}{(c-b)(a-b)}$ для всех наборов различных действительных чисел (a,b,c). [1].

Решение

Пусть a + b + c = p, тогда

a + b - c = p - 2c,

a + c - b = p - 2b,

b + c - a = p - 2a.

Тогда данное выражение примет вид:

$$\frac{(p-2c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(p-2a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(p-2b)^2}{(c-b)(a-b)} .$$

Это выражение можно рассматривать как многочлен второй степени относительно p. Проверка показывает, что при трех значениях переменной

(p = 2a, p = 2b, p = 2c) многочлен принимает значения, равные 4 - ом, следовательно, он тождественно равен постоянной 4 .

Задачи для самостоятельного решения:

1.Сравните числа: 201320132013^2 и 201320132012·201320132014.

2.Сравните числа: $\frac{1+2016^{2013}}{1+2016^{2014}}$ и $\frac{1+2016^{2015}}{1+2016^{2016}}$

3.Сравните числа: $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{2+\cdots}}}$. , $\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots}}}$, если в каждом из них содержится n знаков корня.

4.Найти наименьшее и наибольшее значения выражения 2-y-z, если выполняется условие: 2(y+z)=y^2+z^2+yz+1

5.Решите систему:

$$\begin{cases} 2x^3+x^2(24-2y-2z)+x(-10y-10z-yz+80)-4yz-9y-9z+65=0 \\ 2x^3+x^2(14-2y-2z)-x(42+yz)+5y+5z+yz-30=0 \\ x\in[3;5] \end{cases}$$

6.Решите уравнение: $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0$

Литература:

1.Воронович, И.И. «Новые задачи»/ / И.И. Воронович, «Математика в школе» - 10, 2011, стр. 69.

2.Задания вступительных экзаменов в МФТИ, 2012г.

3. Задания олимпиады МГУ, «Ломоносов» - 2009г,

4.Задания ЦТ 2007 г.

5. Задания ЕГЭ, 2010, 2011г.

6. Задания олимпиады ИКСИ, 2012г.

7.Задания 8- ого Турнира городов, весенний тур.