

## ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности  
1-02 05 01 Математика и информатика

### ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Программа по учебной дисциплине «Теория чисел» составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования по специальности 1-02 05 01 Математика и информатика.

Дисциплина «Теория чисел» для педагогических университетов представляет собой обоснование теоретико-числовых основ школьного курса алгебры. С точки зрения профессиональной направленности, теория чисел занимает особо важное место в подготовке будущих преподавателей математики, так как многие темы этой учебной дисциплины могут служить фундаментом для факультативных занятий.

#### *Цели и задачи учебной дисциплины*

Основными целями учебной дисциплины «Теория чисел» являются:

- развитие математического мышления обучающихся;
- освоение студентами методов исследования теоретико-числовых закономерностей процессов реального мира.

Основными задачами учебной дисциплины «Теория чисел» являются:

- усвоение специфического понятийного аппарата и символики теории чисел;
- ознакомление с методами и приемами решения теоретико-числовых задач;
- усовершенствование навыков самостоятельной работы с научной литературой.

Учебно-воспитательный процесс при изучении теории чисел должен быть организован таким образом, чтобы он давал возможность будущему преподавателю приобрести основные профессиональные качества:

- сформировать установку на творческую профессиональную деятельность;
- развить профессиональное мышление, которое обеспечило бы будущему специалисту возможность свободно оперировать профессиональными знаниями, формулировать проблемы и выбирать оптимальные пути их решения в самостоятельной практической деятельности;
- воспитать в себе активную профессиональную позицию, вырабатывать свой подход в решении педагогических задач, обеспечивающих результативность учебно-воспитательной деятельности;
- развивать познавательную активность и потребность будущего специалиста в самостоятельном повышении своего профессионального уровня.

Для успешного изучения дисциплины «Теория чисел» студентам необходимо усвоить следующие разделы дисциплины «Алгебра»: «Целые числа», «Комплексные числа», «Основные алгебраические структуры».

Изучение учебной дисциплины «Теория чисел» должно обеспечить формирование у студентов академических и социально-личностных компетенций.

*Требования к академическим компетенциям*

Студент должен:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть методами научно-педагогического исследования.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникации.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

*Требования к социально-личностным компетенциям*

Студент должен:

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

*Требования к уровню усвоения содержания учебной дисциплины*

В результате освоения учебной дисциплины студент должен овладеть следующими навыками и умениями.

Студент должен

*знать:*

– основные определения и теоремы теории чисел;

– основные методы доказательств теорем теории чисел;

– теорему о делении с остатком для целых чисел и целых гауссовых чисел;

– основные числовые функции и их свойства;

– основные свойства сравнений;

*уметь:*

– приводить примеры основных теоретико-числовых понятий;

– формулировать и доказывать основные теоретико-числовые теоремы и утверждения;

– применять теоретические знания и основные методы доказательств при решении теоретико-числовых задач;

– находить каноническое разложение целого числа;

– решать линейные диофантовы уравнения;

- решать сравнения с одной неизвестной;
- применять теорию сравнений к решению арифметических задач: отысканию остатков от деления некоторого числа на заданное число; установлению признаков делимости чисел;

*владеть:*

- навыками корректного использования теоретико-числовой терминологии;
- навыками изложения доказательств теоретико-числовых утверждений;
- навыками решения типовых теоретико-числовых задач.

Методы обучения рекомендованные к использованию в процессе преподавания учебной дисциплины: сообщение преподавателя, беседа, анализ, построение алгоритмов, моделирование, численный эксперимент, самостоятельная работа.

Информационно-методическая часть учебной программы включает список основной и дополнительной литературы, методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов, перечень рекомендуемых средств диагностики учебной деятельности.

*Организация самостоятельной работы студентов*

На самостоятельную работу студентов отведено по темам следующее количество часов:

дневная форма получения образования всего 62 часа (тема 1.1 – 4 часа, тема 1.2 – 4 часа, тема 1.3 – 4 часа, тема 1.4 – 4 часа, тема 1.5 – 6 часов, тема 1.6 – 4 часа, тема 2.1 – 4 часа, тема 2.2 – 4 часа, тема 2.3 – 4 часа, тема 2.4 – 6 часов, тема 2.5 – 6 часов, тема 2.6 – 6 часов, тема 2.7 – 6 часов);

заочная форма получения образования всего 110 часов (тема 1.1 – 6 часов, тема 1.2 – 6 часов, тема 1.3 – 8 часов, тема 1.4 – 8 часов, тема 1.5 – 10 часов, тема 1.6 – 8 часов, тема 2.1 – 8 часов, тема 2.2 – 8 часов, тема 2.3 – 8 часов, тема 2.4 – 10 часов, тема 2.5 – 10 часов, тема 2.6 – 10 часов, тема 2.7 – 10 часов).

Контролируемая самостоятельная работа студентов планируется в пределах учебных часов, отведённых на аудиторские занятия по дисциплине.

В принципе, каждая тема учебной программы позволяет организовать учебно-исследовательскую самостоятельную работу студентов. Эта работа должна органично включаться в учебный процесс в сочетании со всеми видами учебных занятий.

Особое внимание необходимо обращать на организацию индивидуальной работы мини-групп (малых подвижных групп) студентов под руководством преподавателя. Рекомендуется разработка системы заданий для организации индивидуальных образовательных траекторий мини-групп.

*Диагностика компетенций студента*

Учебная дисциплина преподается в 7 семестре дневной формы получения образования и на 5 курсе (9 семестр) заочной формы получения

образования. Может планироваться проведение контрольных работ. По каждому разделу программы рекомендуется проведение коллоквиума.

Программа составлена в соответствии с типовым учебным планом по специальности 1-02 05 01 Математика и информатика, рассчитана для

дневной формы получения образования на 164 часа, из них 66 часов аудиторных (лекций – 32, практических занятий – 34). Форма контроля – экзамен;

заочной формы получения образования на 164 часа, из них 18 часов аудиторных (лекций – 8, практических занятий – 10). Форма контроля – экзамен

Рейтинговые контрольные работы проводятся по темам:

№ 1 – тема 1 «Отношение делимости в кольце целых чисел»;

№ 2 – тема 2 «Сравнения и их основные свойства»;

№ 3 – тема 3 «Первообразные корни и индексы. Символ Лежандра.

Преобразование несократимой обыкновенной дроби в периодическую дробь».

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

# СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

## Раздел I. Отношение делимости в кольце целых чисел

### 1.1. Свойства делимости целых чисел. Простые и составные числа

Свойства делимости целых чисел. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное нескольких целых чисел. Взаимно простые и попарно взаимно простые числа. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики. Решето Эратосфена для построения таблиц простых чисел. Важнейшие примеры простых чисел: простые числа Мерсенна и простые числа Ферма.

### 1.2. Конечные цепные дроби. Подходящие дроби

Конечные цепные дроби. Единственность представления рационального числа в виде конечной цепной дроби, взаимосвязь с алгоритмом Евклида. Подходящие дроби и их свойства: рекуррентные формулы для вычисления подходящих дробей; несократимость подходящих дробей; линейное представление наибольшего общего делителя двух целых чисел; возрастающая последовательность чётных подходящих дробей и убывающая последовательность нечётных подходящих дробей.

### 1.3. Кольцо целых гауссовых чисел

Кольцо целых гауссовых чисел  $\mathbb{Z}[i]$ . Норма целого гауссова числа и её свойства. Мультипликативность нормы. Представление произведения чисел в виде суммы двух квадратов. Делители единицы, тривиальные делители. Ассоциированные числа и их геометрическая интерпретация. Теорема о делении с остатком в  $\mathbb{Z}[i]$ . Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух целых гауссовых чисел. Алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя. Теорема о существовании наибольшего общего делителя и его линейном представлении.

### 1.4. Простые гауссовы числа

Простые гауссовы числа и их свойства. Аналог основной теоремы арифметики в  $\mathbb{Z}[i]$ : представление целых гауссовых чисел в виде произведения простых гауссовых чисел. Описание всех простых гауссовых чисел:  $(1 + i)$ , простые натуральные числа вида  $p = 4k + 3, k \in \mathbb{N}$ , и ассоциированные с ними; множители  $a + bi$  простого натурального числа  $p = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$ . Алгоритм факторизации (разложения на простые множители) в  $\mathbb{Z}[i]$ .

### 1.5. Диофантовы уравнения

Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными, критерий существования решения. Общее решение неоднородного линейного диофантова уравнения как сумма общего решения соответствующего

однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения. Алгоритм решения линейных диофантовых уравнений.

Нелинейные диофантовы уравнения. Уравнение Ферма, геометрическая интерпретация, формулы для нахождения пифагоровых троек. Уравнение Пелля, фундаментальное решение, формулы для нахождения решений. Некоторые методы решения нелинейных диофантовых уравнений: разложение на множители, испытание остатков.

### 1.6. Числовые функции

Числовые функции. Целая часть числа и её свойства. Формула для вычисления наибольшего показателя, с которым простое число  $p$  входит в каноническое разложение числа  $n!$ . Число  $\tau(n)$  и сумма  $\sigma(n)$  натуральных делителей натурального числа  $n$ : формулы для вычисления, мультипликативность. Дружественные и совершенные числа. Формула для чётных совершенных чисел (теорема Евклида). Функция Эйлера: определение и вычисление для простого числа  $p$  и  $p^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

## Раздел 2. Отношение сравнимости в кольце целых чисел

### 2.1. Сравнения и их основные свойства

Отношение сравнимости на множестве целых чисел  $\mathbb{Z}$  как отношение эквивалентности. Критерий сравнимости двух целых чисел. Операции над сравнениями по одинаковому модулю: сложение; умножение; возведение в степень; возможность деления на общий делитель, взаимно простой с модулем. Кольцо классов вычетов  $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . Свойства классов вычетов. Число классов вычетов по модулю  $m$  и число классов вычетов, взаимно простых с  $m$ , по модулю  $m$ . Мультипликативная группа кольца  $\mathbb{Z}_m$  как группа классов вычетов, взаимно простых с модулем  $m$ , её порядок.

### 2.2. Полная и приведенная системы вычетов

Полная и приведенная системы вычетов. Свойства полной и приведенной систем вычетов, число элементов. Признаки полной и приведенной систем вычетов. Мультипликативность функции Эйлера, формула для её вычисления.

### 2.3. Малая теорема Ферма и теорема Эйлера

Малая теорема Ферма и теорема Эйлера, примеры использования при решении задач. Теорема Вильсона.

### 2.4. Линейные сравнения и системы сравнений

Линейные сравнения (сравнения первой степени) с одной неизвестной  $ax \equiv b \pmod{m}$ ,  $a \not\equiv 0 \pmod{m}$ , критерий разрешимости и число решений, общий вид и структура решения в зависимости от значения  $\text{НОД}(a, m)$ . Методы решения линейных сравнений: подбор, преобразование коэффициентов, использование теоремы Эйлера и свойств подходящих

дробей. Применение линейных сравнений для решения линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными: нахождение частного решения. Системы линейных сравнений: эквивалентные преобразования. Китайская теорема об остатках.

### 2.5. Первообразные корни и индексы

Порядок (показатель) числа и первообразные корни по данному модулю. Существование первообразного корня по простому модулю. Свойства порядков. Приведенная система вычетов по простому модулю, состоящая из степеней первообразного корня. Индексы по простому модулю и их свойства. Составление таблиц индексов для простых модулей. Решение линейных сравнений с использованием таблиц индексов.

### 2.6. Квадратичные вычеты и символ Лежандра

Двучленные сравнения: критерий разрешимости и число решений. Критерий существования корня степени  $n$  по простому модулю  $p$  в поле  $\mathbb{Z}_p$ . Показательное двучленное сравнение и его решение с помощью индексирования. Квадратичные вычеты по простому модулю  $p$  и решение двучленного сравнения  $x^2 \equiv a \pmod{p}$ . Число классов квадратичных вычетов по нечётному простому модулю. Критерий Эйлера. Символ Лежандра и его свойства.

### 2.7. Арифметические приложения теории сравнений: преобразование несократимой обыкновенной дроби в периодическую дробь; признаки делимости

Десятичные дроби. Чистые и смешанные бесконечные периодические дроби. Представление рациональных чисел в виде периодических десятичных дробей. Критерий представимости рационального числа в виде конечной десятичной дроби. Длина периода чистой периодической дроби. Длина предпериода и длина периода смешанной периодической дроби. Правила обращения бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь. Представление чисел в различных системах счисления (систематические числа) и операции над ними, переход из одной системы счисления в другую. Общий признак делимости (равноостаточности) Паскаля. Признаки делимости на 2, 3, 9, 11. Признак делимости на составное число.

## ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

№ разделов, тем	Название разделов и тем	Количество часов		
		Аудиторные		
		всего	лекции	практ. занятия
1	2	3	4	5
1	<b>Отношение делимости в кольце целых чисел</b>			
1.1	Свойства делимости целых чисел. Простые и составные числа	4	2	2
1.2	Конечные цепные дроби. Подходящие дроби	4	2	2
1.3	Кольцо целых гауссовых чисел	4	2	2
1.4	Простые гауссовы числа	4	2	2
1.5	Диофантовы уравнения	4	2	4
1.6	Числовые функции	4	2	2
	<b>ВСЕГО:</b>	<b>24</b>	<b>12</b>	<b>14</b>
2	<b>Отношение сравнимости в кольце целых чисел</b>			
2.1	Сравнения и их основные свойства		2	2
2.2	Полная и приведенная системы вычетов		2	2
2.3	Малая теорема Ферма и теорема Эйлера		2	2
2.4	Линейные сравнения и системы сравнений		4	4
2.5	Первообразные корни и индексы		4	4
2.6	Квадратичные вычеты и символ Лежандра		2	2
2.7	Арифметические приложения теории сравнений		4	4
	<b>ВСЕГО:</b>	<b>42</b>	<b>20</b>	<b>20</b>
	<b>ИТОГО:</b>	<b>66</b>	<b>32</b>	<b>34</b>

## ИНФОРМАЦИОННО – МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### ЛИТЕРАТУРА

#### ОСНОВНАЯ

1. Бухштаб, А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб. – СПб.: Лань, 2008.
2. Виноградов, И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – СПб.: Лань, 2009.
3. Ильиных, А.П. Теория чисел: учебное пособие / А.П. Ильиных. – Екатеринбург: Урал. гос. пед. ун-т, 2003.
4. Нестеренко, Ю.В. Теория чисел: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Ю.В. Нестеренко. – М.: Издательский центр «Академия», 2008.
5. Шнеперман, Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Б. Шнеперман. – СПб.: Лань, 2008.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

6. Базылев, Д.Ф. Справочное пособие к решению задач: диофантовы уравнения / Д.Ф. Базылев. – Минск: НТЦ «АПИ», 1999.
7. Бейкер, А. Введение в теорию чисел / А. Бейкер. – Минск: Вышэйшая школа, 1995.
8. Бескин, Н.М. Замечательные дроби / Н.М. Бескин. – Минск: Вышэйшая школа, 1980.
9. Воробьев, Н.Н. Признаки делимости / Н.Н. Воробьев. – М.: Наука, 1988.
10. Гельфонд, А.О. Решение уравнений в целых числах / А.О. Гельфонд. – М.: Либроком, 2010.
11. Деза, Е.И. Сборник задач по теории чисел / Е.И. Деза, Л.В. Котова. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014.
12. Матысик, О.В. Теория чисел / О.В. Матысик, А.А. Трофимук. – Брест: Изд-во БрГУ, 2013.
1. Бухштаб, А.А. Теория чисел / А.А. Бухштаб. – М.: Просвещение, 1966.
2. Виноградов, И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – М.: Наука, 1981.
3. Ильиных, А.П. Теория чисел: учебное пособие / А.П. Ильиных. – Екатеринбург: Урал. гос. пед. ун-т, 2003.
4. Нестеренко, Ю.В. Теория чисел: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Ю.В. Нестеренко. – М.: Издательский центр «Академия», 2008.
5. Шнеперман, Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Б. Шнеперман. – Минск: Вышэйшая школа, 2000.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

6. Базылев, Д.Ф. Справочное пособие к решению задач: диофантовы уравнения / Д.Ф. Базылев. – Минск: НТЦ «АПИ», 1999.
7. Бейкер, А. Введение в теорию чисел / А. Бейкер. – Минск: Вышэйшая школа, 1995.

8. Бескин, Н.М. Замечательные дроби / Н.М. Бескин. – Минск: Вышэйшая школа, 1980.
9. Воробьев, Н.Н. Признаки делимости / Н.Н. Воробьев. – М.: Наука, 1988.
10. Гельфонд, А.О. Решение уравнений в целых числах / А.О. Гельфонд. – М.: Наука, 1978.
11. Деза, Е.И. Сборник задач по теории чисел / Е.И. Деза, Л.В. Котова. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014.
12. Матысик, О.В. Теория чисел / О.В. Матысик, А.А. Трофимук. – Брест: Изд-во БрГУ, 2013.

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

В процессе изучения учебной дисциплины «Теория чисел» большое внимание уделяется организации управляемой самостоятельной работы студентов, как при изучении теоретических вопросов, так и при выполнении практических заданий.

Самостоятельная работа студентов реализуется как в процессе аудиторных занятий (на лекциях, практических занятиях), так и на консультациях, при выполнении индивидуальных заданий и проектов в мини-группах и т.д.

Формы самостоятельной работы студентов:

- выполнение индивидуальных заданий, направленных на развитие у студентов самостоятельности и методической компетенции;
  - выполнение обучающих и контрольных заданий.
- Основными задачами самостоятельной работы студентов являются:
- углубление знаний и умений студентов, полученных в результате запланированных учебных занятий;
  - формирование когнитивных компетенций;
  - подготовка студентов к занятиям, к мероприятиям промежуточного и итогового контроля;
  - формирование навыков самостоятельной научно-исследовательской деятельности.

Самостоятельная работа студентов проводится в предусмотренном учебным планом объеме.

## **ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМЫХ СРЕДСТВ ДИАГНОСТИКИ КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТОВ**

Для текущего контроля и самоконтроля знаний и умений студентов по учебной дисциплине «Теория чисел» можно использовать следующий диагностический инструментарий:

- проведение коллоквиумов;
- проведение текущих устных опросов по отдельным темам учебной дисциплины;
- блиц-опрос при обсуждении плана решения задачи и отдельных пунктов плана;
- организация взаимопомощи студентов при самостоятельном решении задач проблемного характера;
- презентации студентов по результатам выполнения индивидуальных заданий в мини-группах;
- контроль ведения рабочих тетрадей.

Текущий контроль успеваемости проводится в форме устного или письменного опроса на практических занятиях.

Типовым учебным планом в качестве формы итогового контроля по учебной дисциплине «Теория чисел» предусмотрен экзамен.

По каждому разделу программы рекомендуется проведение коллоквиума.

С целью текущего контроля предусматривается проведение двух контрольных работ.

Для контроля и самоконтроля знаний и умений студента по отдельным темам или разделам представляется целесообразным использование тестовых технологий.