

РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ РЕЙТИНГОВЫХ РАБОТ

РЕЙТИНГОВАЯ РАБОТА № 1

1. Разложить в конечную цепную дробь: $\frac{444}{89}$.
2. Найти НОД и НОК: $14+16i$ и $3+9i$.
3. Разложить на простые множители $8+15i$.
4. Найдите все целочисленные решения уравнения: $22x+4y=-16$.
5. Вычислить: $\tau(\sigma(120))$.

РЕЙТИНГОВАЯ РАБОТА № 2

1. Используя теорему Эйлера или малую теорему Ферма, найти остаток от деления числа 7^{402} на 101.
2. Решить сравнение: $115x \equiv 85 \pmod{355}$.
3. Решить сравнение методом цепных дробей: $23x \equiv 17 \pmod{71}$.
4. Решить сравнение:
 $133x^{40} - 148x^{39} + 85x^{38} - 98x^2 + x + 6 \equiv 0 \pmod{7}$.
5. Решить систему сравнений
$$\begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod{5} \\ 3x \equiv 5 \pmod{7} \\ 3x \equiv 3 \pmod{9} \end{cases}$$

РЕЙТИНГОВАЯ РАБОТА № 3

1. Вычислите: $P_6(17)$.
2. Решите линейное сравнение, используя таблицу индексов: $3x \equiv 5 \pmod{37}$.
3. Найти количество решений сравнений и решить их, пользуясь таблицами индексов: 1) $x^8 \equiv 27 \pmod{37}$; 2) $43x^{17} \equiv 35 \pmod{71}$.
4. Вычислить символ Лежандра: $\left(\frac{297}{337}\right)$. Записать соответствующее сравнение 2-ой степени и указать, разрешимо ли оно?
5. Найти длину периода и число цифр между запятой и периодом десятичной дроби, в которую обращается обыкновенная дробь: 1) $\frac{13}{17}$; 2) $\frac{17}{220}$.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ

к экзамену по учебной дисциплине «Теория чисел»

1. Взаимно простые и попарно взаимно простые числа: определение и свойства. Решето Эратосфена. Числа Мерсенна. Числа Ферма.
2. Систематические числа: определение, операции. Представление натурального числа в виде систематического.
3. Конечные цепные дроби. Представление рационального числа в виде конечной цепной дроби.
4. Подходящие дроби: определение, рекуррентные формулы.
5. Свойства подходящих дробей.
6. Кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$. Норма и ее свойства. Мультипликативность нормы. Произведение сумм двух квадратов, пример.
7. Свойства делимости целых гауссовых чисел. Делители единицы, тривиальные делители. Ассоциированные числа: геометрическая интерпретация.
8. Теорема о делении с остатком в $\mathbb{Z}[i]$. НОД целых гауссовых чисел: существование, линейное представление.
9. Простые гауссовы числа: определение, примеры. Основная теорема арифметики гауссовых чисел.
10. Описание простых гауссовых чисел. Алгоритм факторизации (разложения на простые множители) в $\mathbb{Z}[i]$.
11. Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными. Критерий существования решения. Связь между общим и частным решением. Алгоритм решения.
12. Уравнение Ферма: определение, примеры, нахождение пифагоровых троек (формулы).
13. Уравнение Пелля: фундаментальное решение, общий вид решения, количество решений.
14. Методы решения нелинейных диофантовых уравнений: разложение на множители, испытание остатков.
15. Количество и сумма натуральных делителей: формулы для вычисления, мультипликативность. Свойства мультипликативных числовых функций.
16. Дружественные и совершенные числа. Формула для четных совершенных чисел (теорема Евклида). Четные совершенные числа и простые числа Мерсенна.
17. Целая часть числа. Наибольший показатель, с которым простое число входит в каноническое разложение $n!$.
18. Функция Эйлера: определение и свойства. Функция Мебиуса.
19. Сравнения и их основные свойства. Отношение сравнения как отношение эквивалентности. Кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
20. Полная и приведенная системы вычетов: определения, примеры, свойства, признаки.

21. Мультипликативность функции Эйлера.
22. Теорема Эйлера, малая теорема Ферма, теорема Вильсона.
23. Классы вычетов по модулю m : определение, свойства. Кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_m$, поле $\mathbb{Z}_p$. Мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}_m$: структура и порядок.
24. Сравнения с одной неизвестной, линейные сравнения (сравнения первой степени), решение сравнения. Эквивалентные сравнения: определение, свойства.
25. Линейные сравнения: критерий разрешимости, количество решений, общий вид и структура решения.
26. Методы решения линейных сравнений: подбор, преобразование коэффициентов, использование теоремы Эйлера.
27. Методы решения линейных сравнений: использование свойств подходящих дробей, использование таблиц индексов.
28. Применение линейных сравнений для решения линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными: нахождение частного решения.
29. Системы линейных сравнений: эквивалентные преобразования. Китайская теорема об остатках (старинная китайская задача).
30. Порядок числа по данному модулю: определение, примеры, простейшие свойства.
31. Критерий сравнимости степеней, условие делимости на порядок числа.
32. Связь порядка числа и порядка его степени. Произведение взаимно простых порядков.
33. Первообразные корни. Существование первообразных корней по простому модулю. Критерий существования первообразного корня по модулю m .
34. Приведенная система вычетов по простому модулю степеней первообразного корня.
35. Индексы по простому модулю: определение, свойства.
36. Двучленные сравнения: критерий разрешимости и количество решений. Критерий существования корня степени n по простому модулю в поле $\mathbb{Z}_p$.
37. Вычеты степени n по простому модулю p . Решения сравнения $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Свойства квадратичных вычетов. Критерий Эйлера.
38. Символ Лежандра и его свойства.
39. Признак делимости (равноостаточности) Паскаля. Делимость на 2, 3, 4, 9, 11.
40. Представление рациональных чисел в виде периодических десятичных дробей.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАЧ

к экзамену по учебной дисциплине «Теория чисел»

1. Систематические числа: операции, переход из одной системы счисления в другую.
2. Конечные цепные дроби: разложить обыкновенную дробь в цепную $(-95/42)$, найти значение цепной дроби $(0; 2, 3, 1, 4, 2)$.
3. Найти все подходящие дроби: $95/42$.
4. Сократить дробь, используя подходящие дроби: $259/119$.
5. Найти линейное представление НОД с помощью подходящих дробей.
6. Найти НОД $(4 + 3i, 2 + i)$, НОД $(6 + 5i, 1 + i)$.
7. Какие натуральные числа от 2 до 30 являются простыми гауссовыми числами?
8. Факторизовать: $7 + 4i$.
9. Решить линейное диофантово уравнение: $127x - 52y = 1$, используя:
а) цепные дроби; б) линейное представление НОД.
10. Представить дробь $58/77$ в виде суммы или разности двух дробей со знаменателями 7 и 11.
11. Решить нелинейное диофантово уравнение: $y^3 - x^3 = 91$; $x^2 + 1 = 3y$.
12. Вычислить: $\tau(6)$, $\tau(10)$, $\tau(60)$, $\tau(360)$, $\tau(1008)$, $\tau(1542)$; $\sigma(6)$, $\sigma(10)$, $\sigma(60)$, $\sigma(360)$, $\sigma(1008)$, $\sigma(1542)$; $\tau(\sigma(120))$.
13. Найти сумму и количество всех натуральных делителей числа 475 и перечислить эти делители.
14. Решить уравнение: $\tau(x) = 33$ при условии, что $x : 24$.
15. Решить уравнение: $\sigma(x) = x + 3$.
16. Найти натуральное число n , которое делится только на два различных простых числа, если $\tau(n) = 6$ и $\sigma(n) = 28$.
17. Найти показатель, с которым число 2 входит в каноническое разложение $40!$.
18. Записать каноническое разложение: 1) $15!$; 2) $20!$.
19. Истинны ли высказывания: 1) $C_{1000}^{500} : 7$; 2) $C_{1000}^{500} : 7$? Ответ обосновать.
20. Сколькими нулями оканчивается $123!$?
21. Сколько натуральных n , не превышающих 1000, не делится ни на 5, ни на 7?
22. Вычислите: $\varphi(12)$, $\varphi(10000)$.
23. Вычислите сумму: $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(6) + \varphi(9) + \varphi(18)$.
24. Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 150?
25. Найдите количество натуральных чисел n , не превосходящих 615, таких что $\text{НОД}(n, 615) = 15$.
26. Найти остаток от деления: 1) 13^{26} на 10; 2) 2^{30} на 13; 3) 7^{402} на 101; 4) $2^{7^{2002}}$ на 352.
27. Доказать, что: 1) $(13^{176} - 1) : 89$; 2) $(73^{12} - 1) : 105$.
28. Найти две последние цифры числа: 1) 2^{341} ; 2) 243^{402} .

29. Найти 5^{-1} в $\mathbb{Z}_{11}$, если существует, используя: а) теорему Ферма, б) свойства элементов группы $\mathbb{Z}_{11}^*$.
30. Преобразовать сравнение $x^8 + 2x^7 + x^5 - x^4 - x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$ в эквивалентное сравнение степени не выше 4.
31. Решить линейное сравнение $4x \equiv -2 \pmod{7}$ разными методами.
32. Решить линейное сравнение $78x \equiv 57 \pmod{93}$.
33. Найти частное решение диофантова уравнения $53x + 17y = 25$, используя свойства линейных сравнений.
34. Найти число, которое при делении на 3 дает остаток 2, при делении на 5 дает остаток 3, при делении на 7 дает остаток 2.
35. Найти порядок числа по данному модулю.
36. Зная, что 7 является первообразным корнем по модулю 11, записать PrCB_{11} .
37. Найти первообразные корни по модулю 7.
38. Найти индекс числа по данному основанию.
39. Построить таблицу индексов по модулю 11.
40. Найти количество решений сравнения: 1) $x^{15} \equiv 6 \pmod{37}$; 2) $3x^3 \equiv 2 \pmod{37}$.
41. Решить линейное сравнение, используя таблицы индексов: $5x \equiv 2 \pmod{11}$.
42. Решить степенное сравнение: $13x^3 \equiv 24 \pmod{37}$; $5x^7 \equiv 1 \pmod{11}$.
43. Решить показательное сравнение: $2 \cdot 3^x \equiv 7 \pmod{11}$.
44. Является ли число a квадратичным вычетом по модулю 7: 1) $a = 2$, 2) $a = 3$?
45. Сколько решений имеет сравнение $x^2 \equiv 7 \pmod{19}$?
46. Используя свойства символа Лежандра, определить сколько решений имеет сравнение $x^2 \equiv 426 \pmod{491}$?
47. Найти длину периода при преобразовании обыкновенной дроби в десятичную дробь: 1) $13/17$; 2) $2/31$.