ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Глава 1. ОТНОШЕНИЕ ДЕЛИМОСТИ В КОЛЬЦЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

§1. СВОЙСТВА ДЕЛИМОСТИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

1. Целые числа a, b и c дают при делении на 5 остатки 1, 2 и 4 соответственно. Какие остатки при делении на 5 дают числа: 1) $2a$; 2) $-3b$; 3) $5c$; 4) $a+b+c$; 5) $2a-3b+5c$; 6) abc; 7) a^2?

2. Докажите, что произведение трёх последовательных натуральных чисел делится на 3.

3. Докажите, что разность квадратов двух нечётных натуральных чисел делится на 8.

4. Разложите на простые множители число: 1) 101; 2) 495; 3) 1001.

5. Найдите все натуральные n, для которых 8^n-1 – простое число.

6. Докажите, что для любого натурального n число 32^n+1 является составным.

7. Сократите дробь: $1224/3690$.

8. Приведите дроби $1/1224$, $13/1440$ и $7/1500$ к наименьшему общему знаменателю и найдите их сумму.

9. Верна ли формула НОК $[a,b,c]\cdot$ НОД$(a,b,c)=abc$ для натуральных чисел a,b и c в общем случае?

10. Для каких натуральных чисел a,b и c выполняется равенство НОК $[a,b,c]=abc$?

11. С помощью канонических разложений найдите: 1) НОД $(88,320,6188)$; 2) НОД $(56,204,1716)$; 3) НОД $(105,215,1540)$.

12. Докажите, что натуральные числа n, $n+1$ и $2n+1$ попарно взаимно просты.

13. Составьте таблицу простых чисел p:
1) $2\le p\le 100$; 2) $100\le p\le 200$; 3) $300\le p\le 400$.

14. Докажите, что любое простое число p, $p>3$, представимо в виде $6n\pm 1$, $n\in\mathbb{N}$.

15. При каких натуральных n число n^4+4 является простым числом?

16. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида: 1) $4n-1$; 2) $6n-1$, $n\in\mathbb{N}$.

§2. КОНЕЧНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ. ПОДХОДЯЩИЕ ДРОБИ

1. Разложите в цепные дроби рациональные числа: 1) $\frac{72}{103}$; 2) $\frac{314}{450}$; 3) $\frac{322}{159}$. Проверьте разложение, свернув цепную дробь последовательным вычислением подходящих дробей.

2. Найти подходящие дроби для цепной дроби $[2; 2, 1, 3, 1, 4, 4, 3]$.

3. Представьте в виде конечной цепной дроби число $2,716$ и найдите все подходящие дроби этого числа.

4. Найдите значение цепной дроби: 1) $[0; 2, 5, 1, 2]$; 2) $[1; 2, 3, 1, 5]$; 3) [4; 2, 2, 1, 1, 2]; 4) $[-3;\ 2, 5, 1, 2]$.

5. Сократите дробь, используя подходящие дроби: 1) $\frac{396}{696}$; 2) $\frac{1043}{3427}$; 3) $-\frac{1085}{980}$; 4) $\frac{2227}{9911}$.

6. Для конечной цепной дроби $[4; 3, 1, 2]$ вычислите последнюю и предпоследнюю подходящие дроби и найдите разность между ними.

7. Для числа $\frac{43}{40}$ вычислите последнюю и предпоследнюю подходящие дроби и найдите разность между ними.

8. Найдите цепную дробь, для которой предпоследняя подходящая дробь равна $\frac{14}{9}$, а последний элемент цепной дроби равен 3.

9. Подходящие дроби некоторой конечной цепной дроби равны: $\frac{3}{1}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{33}{10}$. Найдите третий элемент цепной дроби.

10. Докажите, что чётные подходящие дроби образуют убывающую последовательность, а нечётные подходящие дроби – убывающую последовательность.

11. Докажите, что любая чётная подходящая дробь меньше любой нечётной.

12. Найдите линейное представление $\text{НОД}(822,734)$, используя значение предпоследней подходящей дроби представления $\frac{822}{734}$ в виде конечной цепной дроби.

§3. КОЛЬЦО ЦЕЛЫХ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ. ПРОСТЫЕ ГАУССОВЫ ЧИСЛА

1. Делится ли целое гауссово число α на целое гауссово число β: 1) $\alpha = 2, \beta = 1 + i$; 2) $\alpha = 5 - 7i, \beta = 5 + 7i$; 3) $\alpha = 4 - i, \beta = 19 + 25i$?

2. Верно ли в кольце $\mathbb{Z}[i]$: 1) $(5 + 7i) \vdots (2 - i)$; 2) $(17 + 20i) \vdots (3 + 2i)$?

3. Описать множество целых гауссовых чисел, кратных $2 + 3i$. Дать геометрическую интерпретацию.

4. Выполните деление с остатком в кольце $\mathbb{Z}[i]$: 1) $7 + 2i$ на $3 - i$; 2) $5 + 4i$ на $1 + 2i$; 3) $11 + 10i$ на $4 + i$; 4) $17 - 3i$ на $8 + 5i$.

5. Найдите наибольший общий делитель двух чисел и его линейное представление в кольце $\mathbb{Z}[i]$: 1) $(7 + 3i)$ и $(2 + 2i)$; 2) $(13 + 9i)$ и $(4 + 3i)$; 3) $(32 + 9i)$ и $(4 + 11i)$; 4) $(96 - 38i)$ и $(31 + 77i)$.

6. Найти общее кратное целых гауссовых чисел $\alpha = 2 + i$ и $\beta = 2 - i$. Результат интерпретировать геометрически.

7. Является ли простым целое гауссово число: 1) 3; 2) 5; 3) $3 - i$; 4) $2 + 3i$; 5) $1 + 7i$?

8. Какие простые натуральные числа от 2 до 30 являются простыми целыми гауссовыми числами?

9. Разложить на простые множители (факторизовать) в кольце $\mathbb{Z}[i]$: 1) $2 + 3i$; 2) $7 - 3i$; 3) $9 + 12i$; 4) $-12 + 6i$; 5) $13i$.

§4. ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

1. Решите диофантово уравнение: 1) $12x - 45y = 6$; 2) $14x + 18y = 9$; 3) $127x - 52y = 1$; 4) $5x + 8y = 39$; 4) $259x + 119y = 8$; 5) $407x - 2816y = 33$.

2. Решите диофантово уравнение: 1) $6x + 10y + 15z = 7$; 2) $29x + 13y + 56z = 17$.

3. Разложить дробь $\frac{58}{77}$ в сумму или разность двух дробей со знаменателями 7 и 11.

4. Представить число 100 в виде суммы двух положительных слагаемых, одно из которых делится на 7, а другое – на 11.

5. Имеются банки ёмкостью 0,5 литра и 0,8 литра. Нужно разлить 12 литров вишнёвого варенья так, чтобы эти банки наполнить доверху. Как это можно сделать?

6. Определить день рождения, если известно, что сумма произведения числа месяца $(1, \dots, 31)$ на 12 и номера месяца $(1, \dots, 12)$ на 31 равна 436.

7. На прямой $8x - 13y + 6 = 0$ найти количество точек с целочисленными координатами, которые лежат между прямыми $x = -100$ и $x = 150$.

8. Через сколько целых точек проходит треугольник с вершинами $A(2;1)$, $B(20;7)$, $C(8;15)$,?

9. Решить нелинейное диофантово уравнение методом разложения на множители: 1) $y^3 - x^3 = 91$; 2) $x + y = xy$.

10. Решить нелинейное диофантово уравнение методом испытания остатков: 1) $x^2 + 1 = 3y$; 2) $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$.

11. Найти все решения уравнения $x^2 + 2y^2 = z^2$ в целых положительных попарно взаимно простых числах x, y, z.

§5. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

1. Построить график функции $\mathrm{f(x)} = \{\mathrm{x}\}$.

2. Решить уравнение: $[\mathrm{x}] = 1 + 2\{\mathrm{x}\}$.

3. Найти показатель, с которым число 2 входит в каноническое разложение 40!

4. Записать каноническое разложение: 1) 15!; 2) 20!.

5. Истинны ли высказывания: 1) $\mathrm{C}_{1000}^{500} \vdots 7$; 2) $\mathrm{C}_{1000}^{5000} \vdots 7$? Ответ обосновать.

6. Сколькими нулями оканчивается 123!?

7. Сколькими нулями оканчивается 2000! в 15-ричной системе счисления?

8. Сколько натуральных n, не превышающих 1000, не делится ни на 5, ни на 7?

9. Найти количество натуральных чисел n, не превышающих 1000 и не делящихся ни на одно из простых чисел 5, 7, 11.

10. Вычислить: $\tau(6), \tau(10), \tau(60), \tau(360), \tau(1008), \tau(1542)$;
$\sigma(6),\ \sigma(10),\ \sigma(60), \sigma(360), \sigma(1008), \sigma(1542)$.

11. Вычислить: $\tau(\sigma(120))$.

12. Найти сумму и количество всех натуральных делителей числа 475 и перечислить эти делители.

13. Решить уравнение: $\tau(\mathrm{x}) = 33$ при условии, что $\mathrm{x} \vdots 24$.

14. Решить уравнение: $\sigma(\mathrm{x}) = \mathrm{x} + 3$.

15. Найти натуральное число n, которое делится только на два различных простых числа, если $\tau(\mathrm{n}) = 6$ и $\sigma(\mathrm{n}) = 28$.

16. Найти формулу для суммы квадратов натуральных делителей натурального числа n: $\sigma(\mathrm{n}) = \sum_{\mathrm{n} \vdots \mathrm{d}} \mathrm{d}^2$.

17. Вычислить: $\mu(30), \mu(101),\ \mu(210),\ \mu(300)$.

18. Вычислить сумму: $\mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(6) + \mu(9) + \mu(18)$.

19. Проверьте тождество $\sum_{\mathrm{n} \vdots \mathrm{d}} \mu(\mathrm{d})\tau\left({}^{\mathrm{n}}/_{\mathrm{d}}\right) = 1$ для $\mathrm{n} \in \{1, 5, 10, 20\}$. Верно ли это тождество для любого натурального n?

Глава 2. ОТНОШЕНИЕ СРАВНИМОСТИ В КОЛЬЦЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

§1. СРАВНЕНИЯ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

1. Какие из следующих сравнений являются верными: 1) $1 \equiv -6\ (mod\ 7)$; 2) $75 \equiv 18\ (mod\ 19)$; 3) $2^3 \equiv 1\ (mod\ 9)$; 4) $101 \equiv 12145\ (mod\ 2)$?

2. Среди чисел $11, 121, 124, 314, 216$ найдите все пары чисел, сравнимых между собой по модулю 5.

3. Среди чисел $41, 75, 182, 199,\ 245$ найдите все пары чисел, сравнимых между собой по модулю 17.

4. С каким наименьшим по абсолютной величине числом сравнимо число $n = 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 2123$ по модулю 7?

5. Найти остаток от деления: 1) 15^{131} на 14; 2) 15^{131} на 16; 3) $16^{1231}+18^{4131}$ на 17; 4) $13^{17} - 2^{12} \cdot 5^{15}$ на 3; 5) $25^{257}+6^{91}$ на 31.

6. Найти остаток от деления 48^{5n+4} на 11, где n – любое натуральное число.

7. Докажите, что при любом натуральном n: 1) $(10^n + 17) \vdots 3$; 2) $(3^{4n+3} - 17) \vdots 10$; 3) $(9^{2n+1} + 8^{n+2}) \vdots 73$?

8. Найти остаток от деления $f(24)$ на 13, если: 1) $f(x) = 5x^4 - 12x^3 + +18x^2 - 11$; 2) $f(x) = 12x^6 - 17x^4 + 15x^3 + 17x - 23$.

9. Известно, что $a^{100} \equiv 5\ (mod\ 7)$ и $a^{101} \equiv 45\ (mod\ 7)$. Найти остаток от деления a на 7.

10. Верно ли, что: 1) $28^2 \equiv 55^2\ (mod\ 60)$; 2) $11! \equiv 8!\ (mod\ 160)$; 3) $\sigma(115) \equiv 115\ (mod\ 115)$?

11. Найдите наименьшее (наибольшее) натуральное четырёхзначное число, сравнимое с 23 по модулю 109.

12. Доказать, что $(a + b)^p \equiv a^p + b^p\ (mod\ p)$, где $a, b \in \mathbb{N}$, p – простое число.

§2. ПОЛНАЯ И ПРИВЕДЕННАЯ СИСТЕМЫ ВЫЧЕТОВ

1. Составьте таблицы сложения и умножения в кольце классов вычетов $\mathbb{Z}_5$. Проверьте, что алгебраическая система $\langle \mathbb{Z}_5\ ;\ +,\ \cdot \rangle$ образует поле. Решите в $\mathbb{Z}_5$ уравнения: $\overline{4} + \overline{x} = \overline{2}$, $\overline{2} \cdot \overline{x} = \overline{1}$, $\overline{4} \cdot \overline{x}^2 + \overline{1} = \overline{0}$.

2. Составьте таблицы сложения и умножения в кольце классов вычетов $\mathbb{Z}_4$. Проверьте, что алгебраическая система $\langle \mathbb{Z}_4\ ;\ +,\ \cdot \rangle$ образует кольцо, но не является полем. Укажите все делители нуля кольца $\mathbb{Z}_4$.

3. Выпишите натуральные числа, не превосходящие 40, принадлежащие классу вычетов $\overline{3}$ по модулю 7.

4. Выпишите отрицательные целые числа, большие –25, принадлежащие классу вычетов $\overline{22}$ по модулю 9.

5. Найти обратимые элементы и обратные для них в группе $\mathbb{Z}_9^*$.

6. Найти $\overline{3}^{-1}$ в кольце $\mathbb{Z}_5$.

7. По модулю 15 выпишите: 1) ПСВ_{15}; 2) ПрСВ_{15}; 3) ПСВ_{15}, состоящую из чисел, которые делятся на 4; 4) ПрСВ_{15}, состоящую из чисел, сравнимых с 2 по модулю 14.

8. При каких m имеет место соотношение:
1) $|\text{ПСВ}_\text{m}| = 2$; 2) $|\text{ПСВ}_\text{m}| = 3\,|\text{ПрСВ}_\text{m}|$?

9. Вычислите значение функции Эйлера для числа: 1) 12; 2) 10000; 3) 113400.

10. Сколько натуральных чисел, меньших чисел: 1) 131; 2) 270; 3) 341; 4) 720 и взаимно простых с ними?

11. Вычислите сумму: $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(6) + \varphi(9) + \varphi(18)$.

12. Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 150?

13. Найдите количество натуральных чисел n, не превосходящих 615, таких что $\text{НОД}(\text{n}, 615) = 15$.

14. Решите уравнение: $\varphi(x) = {}^{x}/_{3}$.

§3. МАЛАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА И ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

1. Найти остаток от деления: 1) 13^{26} на 10; 2) 2^{30} на 13; 3) 5^{403} на 101; 4) $(3^{100} + 5^{100})^{100}$ на 15.

2. Найти остаток от деления: 1) $3^{2^{100}}$ на 73; 2) $2^{3^{1000}}$ на 176.

3. Доказать, что: 1) $(13^{176} - 1) \vdots 89$; 2) $(73^{12} - 1) \vdots 105$; 3) $(37^{120} - 1) \vdots 700$.

4. Найти две последние цифры числа: 1) 2^{341}; 2) 7^{325}; 3) 243^{402}.

5. Найти три последние цифры числа 3^{2005}.

6. Найти четыре последние цифры двоичной записи числа 28^{1000}.

7. Найти последнюю цифру числа: 1) 20^{48} в двенадцатеричной системе счисления; 2) $32^{101} + 35^{301}$ в пятнадцатиричной системе счисления; 3) 13^{7^5} в десятичной системе счисления.

8. Найти однозначное число, если известно, что его девятая степень оканчивается цифрой 7.

9. Доказать, что: 1) $1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + 4^{11} \equiv 0 \ (mod\ 5)$; 2) $1^{18} + 2^{18} + 3^{18} + 4^{18} + 5^{18} + 6^{18} \equiv -1 \ (mod\ 7)$.

10. В какой класс вычетов по модулю 351 попадает число $3^{5^{202}}$?

11. Найдите остаток от деления: 1) $2^{2^{2^{2}}}$ на 324; 2) $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ на 7, если в конструкции участвуют n двоек.

12. При каких натуральных числах n имеет место сравнение $n^5 + 7n + 8 \equiv 0 \ (mod\ 3)$?

§4. ЛИНЕЙНЫЕ СРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ СРАВНЕНИЙ

1. Сколько решений имеет сравнение:
1) $3x \equiv 7\ (mod\ 11)$; 2) $6x \equiv 7\ (mod\ 15)$; 3) $111x \equiv 75\ (mod\ 322)$.

2. Решите сравнение, используя теорему Эйлера: 1) $3x \equiv 4\ (mod\ 7)$; 2) $3x \equiv 5\ (mod\ 11)$; 3) $13x \equiv 19\ (mod\ 29)$.

3. Решите сравнение, используя свойства подходящих дробей: 1) $25x \equiv 17\ (mod\ 151)$; 2) $23x \equiv 14\ (mod\ 109)$; 3) $41x \equiv 32\ (mod\ 101)$.

4. Решите сравнение всеми возможными способами: 1) $5x \equiv 6\ (mod\ 7)$; 2) $5x \equiv 7\ (mod\ 8)$; 3) $15x \equiv 9\ (mod\ 11)$; 4) $11x \equiv 16\ (mod\ 23)$.

5. Решите сравнение: 1) $6x \equiv 9\ (mod\ 15)$; 2) $20x \equiv 12\ (mod\ 48)$; 3) $15x \equiv 35\ (mod\ 55)$; 4) $45x \equiv 75\ (mod\ 100)$.

6. При каких целых k разрешимо сравнение: $kx \equiv 3\ (mod\ 30)$?

7. Решите диофантово уравнение, используя теорию сравнений: 1) $3x + 8y = 5$; 2) $11x + 5y = 12$; 3) $12x + 20y = 15$; 4) $10x - 15y = 25$; 5) $45x - 29y = 5$.

8. В кольце $\mathbb{Z}_{30}$ решите уравнения: 1) $\overline{7}\overline{x} = \overline{11}$; 2) $\overline{17}\overline{x} = \overline{19}$; 3) $\overline{19}\overline{x} = \overline{23}$.

9. Решите систему сравнений:
1) $\begin{cases} x \equiv 10\ (mod\ 11) \\ x \equiv 12\ (mod\ 17) \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x \equiv 15\ (mod\ 17) \\ x \equiv 9\ (mod\ 20) \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x \equiv 3\ (mod\ 10) \\ x \equiv 9\ (mod\ 14) \end{cases}$.

10. Решите систему сравнений:
1) $\begin{cases} 2x \equiv 1\ (mod\ 5) \\ 3x \equiv 5\ (mod\ 7) \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x \equiv 8\ (mod\ 10) \\ 4x \equiv 4\ (mod\ 15) \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 4x \equiv 8\ (mod\ 14) \\ 15x \equiv 12\ (mod\ 27) \end{cases}$.

11. Решите систему сравнений:
1)) $\begin{cases} x \equiv 1\ (mod\ 5) \\ x \equiv 2\ (mod\ 6) \\ x \equiv 3\ (mod\ 7) \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x \equiv 4\ (mod\ 5) \\ x \equiv 1\ (mod\ 12) \\ x \equiv 7 (mod\ 14) \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x \equiv 10\ (mod\ 11) \\ x \equiv 5\ (mod\ 12) \\ x \equiv 12\ (mod\ 13) \end{cases}$.

12. Решите систему сравнений:
1) $\begin{cases} 2x \equiv 3\ (mod\ 5) \\ 3x \equiv 5\ (mod\ 7) \\ 3x \equiv 3\ (mod\ 9) \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 5x \equiv 2\ (mod\ 8) \\ 7x \equiv 3\ (mod\ 11) \\ 5x \equiv 1\ (mod\ 12) \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 4x \equiv 3\ (mod\ 5) \\ 2x \equiv 7\ (mod\ 9) \\ 3x \equiv 1\ (mod\ 10) \end{cases}$.

13. При каких значениях параметра t следующие системы совместны:
1) $\begin{cases} x \equiv 5\ (mod\ 18) \\ x \equiv 8\ (mod\ 21) \\ x \equiv t\ (mod\ 35) \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x \equiv 3\ (mod\ 11) \\ x \equiv 1\ (mod\ 15) \\ x \equiv t\ (mod\ 18) \end{cases}$?

14. Решить сравнение $17x \equiv 7\ (mod\ 30)$, сведя его к системе сравнений (это сравнение можно решить и не сводя его к системе сравнений).

15. Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 3 даёт остаток 2, при делении на 5 даёт остаток 3, а при делении на 7 даёт остаток 2.

16. Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 3, 5, 7, 11 даёт, соответственно, остатки 1, 2, 3, 9.

17. Найти все натуральные числа между 100 и 300, которые при делении на 3, 5, 7 дают, соответственно, остатки 3, 4, 5.

§5. ПЕРВООБРАЗНЫЕ КОРНИ И ИНДЕКСЫ

1. Найдите порядок числа по данному модулю: 1) $P_{11}(3)$; 2) $P_{12}(5)$; 3) $P_{15}(11)$; 4) $P_{17}(5)$; 5) $P_{12}(-53)$; 6) $P_{13}(10)$; 7) $P_{31}(10)$.

2. Найдите $P_{13\cdot 31}(10)$.

3. Найдите все возможные порядки элементов по модулю: 1) 7; 2) 8; 3) 9.

4. Найдите все классы вычетов $\overline{x}_7$, для которых: 1) $P_7(x) = 3$; 2) $P_7(x) = 5$; 3) $P_7(x) = 6$.

5. Зная, что число 5 есть первообразный корень по модулю 7, найти $P_7(5^2)$, $P_7(5^3)$, $P_7(5^4)$.

6. Зная, что 2 – первообразный корень по модулю 11, запишите приведенную систему вычетов по модулю 11 и найдите все первообразные корни по модулю 11.

7. Зная, что 3 – первообразный корень по модулю 17, запишите приведенную систему вычетов по модулю 17 и найдите все первообразные корни по модулю 17.

8. Найдите все первообразные корни, вычислив предварительно наименьший из них, по модулям: 19; 23; 31.

9. Найти все первообразные корни по модулям: 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

10. Составьте таблицу индексов по модулю p, где $p \in \{3, 5, 7, 13, 17, 23\}$, используя наименьший первообразный корень по модулю p. Сколько всевозможных таблиц индексов по модулю p можно построить?

11. Пользуясь таблицей индексов по модулю 37, найдите: 1) первообразный корень, по которому построена таблица; 2) все первообразные корни по модулю 37.

12. Используя таблицы индексов по модулю 13 и основанию 2 (первообразному корню), найти $ind_6 9$ по тому же модулю.

13. Индексированием найти порядки чисел от 2 до $p-1$ по простому модулю p: 1) $p = 5$; 2) $p = 7$; 3) $p = 11$.

14. С помощью таблиц индексов найдите: 1) $P_{11}(9)$; 2) $P_{17}(6)$; 3) $P_{37}(17)$.

15. С помощью таблиц индексов найдите остатки от деления: 1) 13^{19} на 31; 2) 31^{18} на 37; 3) 300^{302} на 11.

16. С помощью таблиц индексов найдите остатки от деления: 1) $29^{30^{10}}$ на 11; 2) $37^{32^{12}}$ на 11; 3) $18^{11^{19}}$ на 23.

17. Найдите все индексы числа: 1) 4 по модулю 7; 2) 4 по модулю 11.

§6. КВАДРАТИЧНЫЕ ВЫЧЕТЫ И СИМВОЛ ЛЕЖАНДРА

1. Пользуясь свойствами индексов, решить *линейное* сравнение: 1) $5x \equiv 2\ (mod\ 13)$; 2) $7x \equiv 9\ (mod\ 17)$; 3) $24x \equiv 20\ (mod\ 44)$.

2. Пользуясь свойствами индексов, укажите число решений и решите *степенное* сравнение: 1) $x^6 \equiv 5\ (mod\ 11)$; 2) $x^{15} \equiv 6\ (mod\ 37)$; 3) $5x^7 \equiv 1\ (mod\ 13)$; 4) $3x^3 \equiv 2\ (mod\ 37)$; 5) $13x^3 \equiv 24\ (mod\ 37)$.

3. Пользуясь свойствами индексов, укажите число решений и решите *показательное* сравнение: 1) $2^x \equiv 5\ (mod\ 11)$; 2) $16^x \equiv 11\ (mod\ 17)$; 2) $2 \cdot 3^x \equiv 7\ (mod\ 19)$; 3) $3 \cdot 2^{7x} \equiv 7\ (mod\ 11)$; 4) $21^{3x} \equiv 21^5 (mod\ 29)$.

4. Через какие точки с целыми координатами проходит кривая: 1) $3x^2 + 20 = 13y$; 2) $5x^4 + 24 = 11y$?

5. Разрешимо ли квадратичное сравнение: 1) $x^2 \equiv 3\ (mod\ 5)$; 2) $x^2 \equiv 4\ (mod\ 7)$; 3) $x^2 \equiv 3\ (mod\ 11)$; 4) $x^2 \equiv 4\ (mod\ 11)$?

6. Пользуясь таблицами индексов, найдите все квадратичные вычеты по модулям: 1) 7; 2) 11; 3) 17; 4) 37.

7. С помощью критерия Эйлера установите, какие из чисел 3, 5, 7, 9, 11 являются квадратичными вычетами по модулю: 1) 13; 2) 17; 3) 19.

8. Вычислите символы Лежандра: 1) $\left(\frac{102}{17}\right)$; 2) $\left(\frac{-77}{23}\right)$; 3) $\left(\frac{125}{47}\right)$; 4) $\left(\frac{47}{73}\right)$; 5) $\left(\frac{35}{97}\right)$; 6) $\left(\frac{204}{311}\right)$; 7) $\left(\frac{23}{383}\right)$; 8) $\left(\frac{514}{727}\right)$; 9) $\left(\frac{-3000}{103}\right)$.

9. С помощью символа Лежандра выясните, какие из следующих сравнений имеют решения и, если имеют, найдите эти решения: 1) $x^2 \equiv 56\ (mod\ 89)$; 2) $x^2 \equiv 231\ (mod\ 101)$; 3) $x^2 \equiv 65\ (mod\ 193)$; 4) $x^2 \equiv 219\ (mod\ 383)$.

10. Решите сравнения, предварительно сведя их к двучленным: 1) $3x^2 + 7x + 8 \equiv 0\ (mod\ 17)$; 2) $x^2 - 3x + 23 \equiv 0\ (mod\ 61)$; 3) $9x^2 + 29x + 62 \equiv 0\ (mod\ 67)$.

11. Для каких простых p число является квадратичным невычетом: 1) 3; 2) 13?

12. Докажите, что по простому модулю: 1) произведение двух квадратичных вычетов есть квадратичный вычет; 2) произведение двух квадратичных невычетов есть квадратичный вычет; 3) произведение квадратичного вычета на квадратичный невычет есть квадратичный невычет.

13. Решите уравнение $\overline{x}^3 - \overline{1} = \overline{0}$ в поле: 1) $\mathbb{Z}_{103}$; 2) $\mathbb{Z}_{107}$.

§7. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ СРАВНЕНИЙ

1. Определите число цифр в предпериоде (t) и число цифр в периоде (s) при обращении в десятичную обыкновенной дроби (не обращая её в десятичную дробь):

1) $\frac{1}{29}$; 2) $\frac{50}{21}$; 3) $\frac{59}{21}$; 4) $\frac{2}{33}$; 5) $\frac{22}{91}$; 6) $\frac{1}{93}$; 7) $\frac{660}{121}$; 8) $\frac{1}{11\cdot 17}$; 9) $\frac{1}{13\cdot 17}$;
10) $\frac{83}{40}$; 11) $\frac{1}{528}$; 12) $\frac{1}{540}$; 13) $\frac{7}{658}$; 14) $\frac{51}{160}$; 15) $\frac{361}{200}$; 16) $\frac{201}{264}$; 17) $\frac{7}{2200}$; 18) $\frac{31}{2200}$.

2. Найдите длину периода при обращении следующих обыкновенных дробей в десятичные: 1) несократимой дроби со знаменателем 41; 2) несократимой дроби со знаменателем 1260.

3. Превратите смешанную дробь в десятичную дробь: 1) $7\frac{41}{132}$; 2) $1\frac{19}{40}$; 3) $10\frac{1}{20}$; 4) $30\frac{1}{7}$.

4. Найдите знаменатель дроби $\frac{1}{b}$, которая представляется чистой периодической дробью с двумя цифрами в периоде.

5. Найдите число всех правильных несократимых дробей, обращающихся в чистую периодическую десятичную дробь: 1) с тремя цифрами в периоде; 2) с семью цифрами в периоде.

6. Превратите бесконечную десятичную периодическую дробь в обыкновенную дробь: 1) $0,(234)$; 2) $0,(9207)$; 3) $0,(324)$; 4) $0,(6781)$.

7. Запишите число, представленное в десятичной системе счисления, в указанной системе счисления: 1) 729 в семеричной системе счисления; 2) 2786 в двоичной системе счисления; 3) 3625 в троичной и одиннадцатиричной системах счисления; 4) 17527 в восьмеричной системе счисления. Сделать проверку.

8. Запишите следующие числа в десятичной системе счисления: 1) $\overline{42125}_{(5)}$; 2) $\overline{11001101}_{(2)}$; 3) $\overline{26014}_{(7)}$.

9. Вычислить, не переводя в десятичную систему счисления: 1) $\overline{425}_{(7)}\cdot\overline{54}_{(7)}-\overline{251}_{(7)}\cdot\overline{43}_{(7)}$; 2) $\overline{232011}_{(5)}:\overline{104}_{(5)}+\overline{2112}_{(5)}\cdot\overline{131}_{(5)}$.

10. Найдите значение x, если: 1) $\overline{106}_{(x)}=\overline{153}_{(7)}$; 2) $\overline{236}_{(x)}=\overline{1240}_{(5)}$.

11. Найдите двузначное число в десятичной системе счисления, которое в двоичной, четверичной и восьмеричной системах счисления представлено одинаковыми цифрами.

12. Вывести признак делимости на: 1) 7; 2) 13; 3) 19; 4) 39; 5) 59.

13. Используя соответствующие признаки делимости, установить делимость: 1) 8918 на 7; 2) 9633 на 13; 3) 9633 на 39; 4) 7493 на 59.

14. Вывести признак делимости на число, оканчивающееся единицей.