УДК 378:[51+53+004.94]

***И.В. Кирюшин,*** *кандидат физико-математических наук,*
*доцент кафедры математики БГПУ*

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ОБУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ФИЗИЧЕСКИХ И ИНЖЕНЕРНО–ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

**Введение**. Для подготовки компетентных специалистов следует искать новые подходы к преподаванию не только специальных, но и фундаментальных дисциплин, в частности математических. Большие перспективы в обучении математике студентов физических и инженерно–технических специальностей вузов открывает педагогическая интеграция математики и физики. Она может осуществляться посредством решения физических задач на практических занятиях по математике (математического моделирования) [1–3], через дидактический синтез математики и физики на теоретическом уровне (в лекционном курсе математики) [4], а также через компьютерное моделирование физических процессов и структур (КМФП) на лабораторных работах [5–6].

Интегративный метод КМФП в сравнении с прикладным математическим моделированием имеет ряд важных преимуществ [5–6]. В их числе более активное развитие теоретического и практического мышления как результат учебной деятельности по созданию компьютерных моделей. При этом быстрее происходит и формирование визуального мышления, т. е. способа решения интеллектуальных задач с опорой на внутренние визуальные образы (по А.Р. Лурия). Оно, в свою очередь, дает толчок продуктивному (творческому) математическому мышлению физиков и инженеров. Кроме того, метод КМФП может усиливать мотивацию к изучению математики в большей степени, чем математическое моделирование. Наконец, он обеспечивает возможности для индивидуального подхода к обучению. Все это создает условия для формирования профессиональной компетентности будущих специалистов.

Применение компьютерных технологий в курсе высшей математики рассматривали Е.М. Воробьев, В.А. Далингер, С.А. Дьяченко, Ж.И. Зайцева, П.И. Совертков, А.А. Черняк и др. Издано учебное пособие для студентов специальности «Прикладная математика» вузов РФ: компьютерный практикум по математике (не содержащий интеграционный материал) [7]. Дидактические принципы КМФП в курсе высшей математики до сих пор в литературе в должной мере не обсуждались. *Цель статьи* – предложить указанные принципы и рассмотреть практические примеры их реализации.

**Принципы компьютерного моделирования физических процессов и структур в обучении математике**. С учетом специфики имеющей место педагогической интеграции математики, физики и информатики, нам удалось выделить следующие дидактические принципы.

1. Принцип *приоритетности математики* означает, что физические задачи для компьютерного моделирования отбирают (составляют), исходя, в первую очередь, из необходимости раскрыть содержание математических понятий и методов.

2. Принцип *конкретности* указывает на важность компьютерного моделирования собственно физического явления (структуры), а не некоторой сугубо математической задачи, решение которой так или иначе может использоваться в физике. Принцип является необходимым для реализации следующего принципа профессиональности.

3. Принцип *профессиональности* требует обучения студентов пониманию физической сущности моделируемого процесса. Уровень этого понимания может быть низким, средним или высоким.

4. Принцип *широкой представленности* в компьютерной модели физического явления (объекта) тех *математических понятий и методов*, которые изучаются в курсе математики по данной теме, должен обеспечить условия для ее эффективного усвоения студентами.

5. В принципе *уяснения физического смысла частного математического содержания* компьютерной модели акцент ставится на конкретной математической составляющей в отличие от принципа профессиональности, требующего понимания общей физической сущности процесса.

6. Принцип *доступности* требует избегать широкого использования сложного математического материала, выходящего за рамки учебной программы (например, вводить (определять) специальные математические функции и оперировать ими).

7. Принцип *максимальной наглядности* (большое число графиков, выделение цветом, крупный размер изображений и т. д.) есть развитие обычного принципа наглядности, и он здесь особенно актуален, поскольку наглядность – одно из главных достоинств и условий применения метода компьютерного моделирования.

8. Принцип *широкого варьирования параметров* служит для создания у студентов ясного представления, как о математических, так и о физических особенностях того или иного моделируемого процесса (объекта).

9. Принцип *многозадачности* обусловливает необходимость компьютерного моделирования в рамках одной изучаемой математической темы сразу нескольких физических явлений и структур (двух-трех и более), имеющих совершенно разные математические модели. Этот принцип позволяет показать большие возможности математики.

10. Принцип *обобщения* связан с отбором таких физических процессов (объектов), которые бы описывались единой математической моделью (например, гармонические колебания математического, физического и упругого маятников).

11. Принцип *необходимого сочетания* указанных *принципов многозадачности и обобщения* объединяет их в одно дидактическое целое. Если принцип многозадачности демонстрирует широкие возможности применения изучаемых математических понятий в физической науке, то принцип обобщения подчеркивает общие, универсальные математические особенности в различных физических явлениях и, тем самым, облегчает процесс абстрагирования, так важный для формирования математических понятий у студентов.

12. Принцип *парадоксальности* состоит в использовании для компьютерного моделирования именно тех физических процессов (объектов), которые имеют нетривиальное математическое описание: на первый взгляд простая физическая задача порождает достаточно сложные математические выкладки. Принцип показывает важность математики для специалиста, необходимость ее глубокого изучения, а его действие, очевидно, ограничивается принципом доступности.

13. Принцип *повторения* состоит в том, чтобы обратить внимание студентов на уже известные им, изученные значительно раньше математические понятия, используемые в данной компьютерной модели. Это позволяет заново, по-другому, проиллюстрировать уже знакомые математические понятия, способствует закреплению пройденного материала.

14. В ходе обучения студентов математическим понятиям и методам следует также научить их пользоваться соответствующими встроенными функциями из того компьютерного математического пакета, который применяется для моделирования (например, при изучении степенных рядов в курсе математического анализа научить раскладывать функцию в ряд Маклорена автоматически с помощью такого оператора из пакета MathCad, как “series”) (принцип *универсальности*). Это позволяет ознакомить обучаемых с широкими возможностями компьютерных математических пакетов, умение использовать которые является важным для квалифицированного специалиста.

15. Учебные математические методы при компьютерном моделировании можно сочетать с применением встроенных функций там, где это целесообразно по соображениям удобства, наглядности, экономии времени и др. (принцип *комплементарности*). Так, при изучении степенных рядов в курсе математического анализа наряду с “учебным” разложением некоторой функции в ряд Тейлора можно одновременно по необходимости использовать различные встроенные функции (например, тригонометрические).

16. Принцип *модульности* означает, что каждая компьютерная модель должна занимать свой собственный (один) программный модуль. Это вытекает из соображений удобства и завершенности (легко найти модель, изменить ее и т.д.).

17. Принцип *продуктивности* подразумевает творческое овладение материалом. Это может достигаться путем постановки ряда исследовательских задач для самостоятельной (в том числе домашней) работы (например, определить диапазон изменения той или иной переменной, рассмотреть влияние значения какого-либо параметра на искомую величину, оценить точность модели и др.). Продуктивное, творческое мышление, как известно, находится в оппозиции к мышлению репродуктивному, ограниченному рамками изложенных фактов, а потому, принцип продуктивности является очень важным для формирования профессиональной компетентности специалистов.

18. Для компьютерного моделирования необходимо использовать самую простую компьютерную среду (принцип *простой компьютерной среды*). Это диктуется ограниченной продолжительностью занятия и соображениями доступности. На наш взгляд, удобнее всего применять среду MathCad. Следует, однако, учитывать, что математических возможностей простой среды может оказаться недостаточно и придется использовать другие компьютерные пакеты (например, с пакета MathCad переходить на Maple).

19. В принципе *единой компьютерной среды* мы утверждаем, что необоснованное использование разных компьютерных сред как в рамках изучения одной темы, так и на протяжении всего математического курса представляется нецелесообразным из-за неизбежного рассеивания внимания студентов, концентрации на второстепенных деталях и отвлечения от главного – постижения математики.

20. Принцип *единства во времени* означает, что изучение математических понятий (методов), а также компьютерное моделирование физических явлений (структур) должно осуществляться одновременно: в рамках лабораторной работы, проводимой в компьютерном классе (не считая, разумеется, лекций и практических занятий).

Указанные принципы по своим признакам образуют четыре основных категории: математические (1, 4, 9–11, 13, 17), профессиональные (физические) (2, 3, 5, 9, 10, 17), компьютерные (14–16, 18, 19) и методические (6–8, 11–13, 17, 20). Все принципы, разумеется, имеют дидактическую направленность, но в каждом из них есть такая важная сторона, по которой они и сгруппированы. Некоторые принципы принадлежат сразу к нескольким категориям. Наличие различных категорий принципов является отражением того факта, что использованием в курсе математики КМФП достигается педагогическая интеграция математики, физики и информатики.

**Примеры практической реализации.** При изучении темы “Степенные ряды и их приложения” в курсе математического анализа рассмотрим колебания плоского математического маятника (длины $l$ и массы $m$) [8, с. 408]. Из закона сохранения энергии следует, что $mv^2/2 = mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$, где $v$ – скорость маятника, $\varphi$ – угол его отклонения от вертикали, $\varphi_0$ – угловая амплитуда, $g$ – ускорение силы тяжести. Учитывая, что $v = l d\varphi/dt$ ($t$ – время), получим уравнение движения маятника:

$$d\varphi/dt = \sqrt{2g(\cos\varphi - \cos\varphi_0)/l}\,.$$

Разделяем переменные: $$d\varphi/\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} = \sqrt{g/l}\,dt\,.$$

Учитывая, что $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2(\varphi/2)$, получим:

$$d\varphi/\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi/2)} = 2\sqrt{g/l}\,dt\,. \qquad (1)$$

Перейдем от $\varphi$ к новой переменной $\alpha$ с помощью выражения $\sin(\varphi/2) = k\cdot\sin\alpha$, где $k = \sin(\varphi_0/2)$. Продифференцируем это выражение:

$$(1/2)\cos(\varphi/2)d\varphi = k\cdot\cos\alpha d\alpha\,.$$

Следовательно, $d\varphi = 2k\cdot\cos\alpha d\alpha/\cos(\varphi/2) = 2k\cdot\cos\alpha d\alpha/\sqrt{1-\sin^2(\varphi/2)} =$ $= 2k\cdot\cos\alpha d\alpha/\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}$. С другой стороны: $\sin^2(\varphi_0/2)-\sin^2(\varphi/2) =$ $= k^2(1-\sin^2\alpha) = k^2\cos^2\alpha$. Подставив полученные соотношения в уравнение (1), будем иметь:

$$d\alpha/\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha} = \sqrt{g/l}\,dt.$$

При $t = 0$ значения $\varphi = 0$ и $\alpha = 0$. Тогда, интегрируя последнее уравнение, найдем:

$$\int_0^\alpha d\alpha/\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha} = \sqrt{g/l}\,t. \qquad (2)$$

Четверти периода колебаний маятника соответствует изменение угла от 0 до величины $\varphi_0$. При этом значение $\alpha$ изменяется от 0 до $\pi/2$. Тогда период $T$ колебаний, зависящий от амплитуды $\varphi_0$, будет равен:

$$T(\varphi_0) = 4\sqrt{l/g}\int_0^{\pi/2} d\alpha/\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha},\ k = \sin(\varphi_0/2). \qquad (3)$$

Имеющийся здесь интеграл в квадратурах не берется. Разложив подинтегральную функцию в биномиальный ряд по степеням $\sin\alpha$, учитывая равномерную сходимость степенных рядов (которые можно интегрировать почленно) и пользуясь формулой Валлиса

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\alpha d\alpha = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

получим представление $T(\varphi_0)$ с помощью ряда:

$$T(\varphi_0) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\sin^4\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)+\ldots\right) =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\sin^{2n}\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right). \qquad (4)$$

Легко видеть, что при $\varphi_0 \to 0$ период $T \to 2\pi\sqrt{l/g}$, то есть для малых амплитуд с высокой степенью точности можно принять, что $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Эта формула для периода гармонических колебаний известна студентам еще из курса физики средней школы. С увеличением амплитуды колебания становятся ангармоническими, неизохронными. Для не слишком больших амплитуд может быть справедливо достаточно точное соотношение:

$$T(\varphi_0) = 2\pi\sqrt{l/g}\left(1+\varphi_0^{\,2}/16\right). \qquad (5)$$

Оно получается, если в разложении (4) ограничиться двумя первыми слагаемыми и $\sin(\varphi_0/2)$ заменить $\varphi_0/2$.

Аналогичная математическая модель получается и для физического маятника [9, с. 221]. В этом случае, однако, в качестве величины $l$ следует использовать приведенную длину физического маятника: $l = I/(mh)$, где $I$ – момент инерции маятника массы $m$ относительно оси вращения, $h$ – расстояние между центром масс и точкой подвеса маятника.

Следует построить графики аппроксимационных зависимостей $T = T(\varphi_0)$ (не раскладывая $\sin(\varphi_0/2)$ в ряд) (рисунок 1), зависимостей оценок соответствующих остатков и относительных погрешностей от амплитуды (рисунок 2). Этот пример показывает, как простые физические процессы могут потребовать использования сложной математической модели, что демонстрирует несомненную важность математики для физиков и инженеров.

**Обсуждение результатов**. Рассмотрим теперь применение вышеизложенных принципов компьютерного моделирования к математическому и физическому маятникам. *Приоритетность математики* реализована здесь через отбор таких физических процессов, математические модели которых содержат необходимые понятия и методы по теме “Степенные ряды и их приложения”: ряд, остаток ряда, разложение в степенной ряд, равномерная сходимость ряда, интегрирование рядов. Как видим, одновременно выполняется и принцип *широкой представленности изучаемых математических понятий и методов*. Принцип *конкретности* заключен в моделировании математического и физического маятников, и в частности в установлении периода их колебаний. Понимание физической сущности моделируемого процесса (принцип



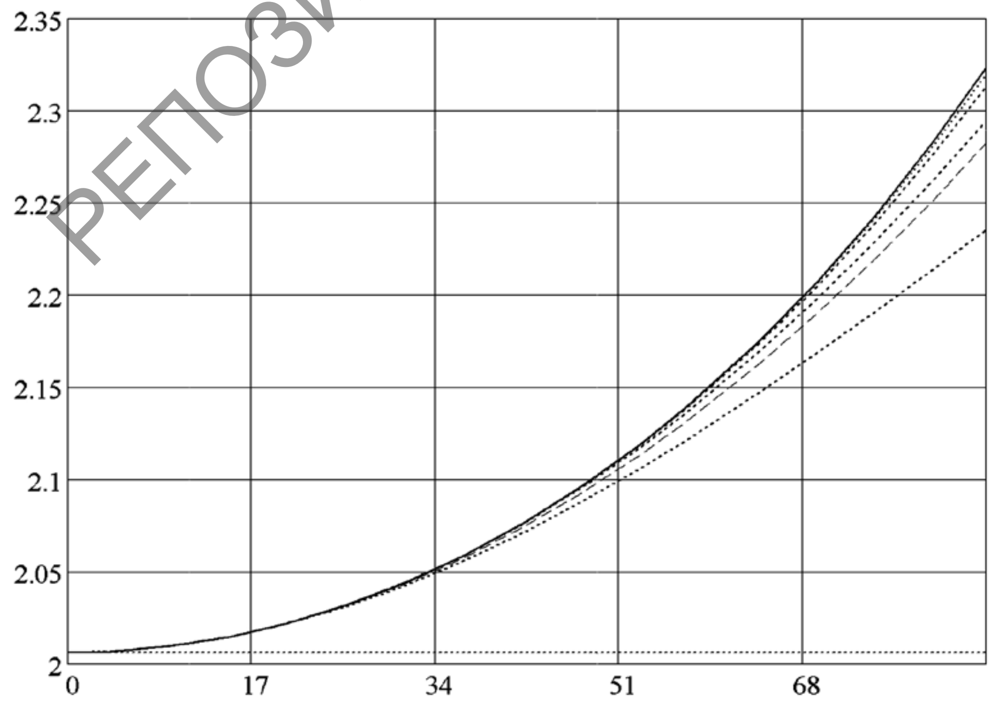


Рисунок 1 – Графики аппроксимационных зависимостей периода колебаний (с) маятника длины $l$ = 1 (м) от амплитуды колебаний (град.) $T = T(\varphi_0)$ для различного числа первых членов ряда (выражение (4)): 1, 2, 3, 4, 5 (пунктир, снизу вверх); 10 (сплошная линия). Уравнение (5) – штрихпунктир.

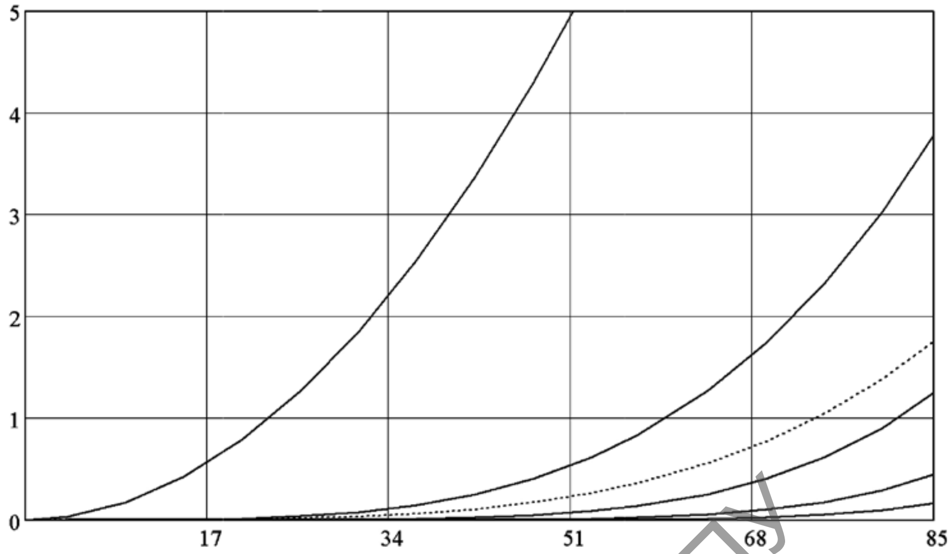


Рисунок 2 – Графики зависимостей оценки относительной погрешности (%) аппроксимации периода колебаний маятника ($l$ = 1 м) от их амплитуды $\varphi_0$ (град.) для различного числа первых членов ряда (выражение (4)): 1, 2, 3, 4, 5 (сплошные линии, сверху вниз). Для уравнения (5) – пунктир.

*профессиональности*) обеспечивается простотой физической модели и очевидностью исходного положения, следующего из закона сохранения энергии.

Понимание *физического смысла частного математического содержания* обеспечивается поэтапным выводом результатов, простой физической моделью и ясностью исходных посылок. Принцип *доступности* также реализован через последовательный вывод результатов без введения сложных понятий, выходящих за рамки изучаемого курса математики и способных серьезно затормозить процесс восприятия студентами математической модели. Так, мы не вводим понятия неполного и полного нормальных эллиптических интегралов Лежандра 1-го рода, содержащихся в уравнениях (2–3) соответственно, поскольку раздел специальных функций в данном курсе не изучается. Далее, в данной теме мы не используем принцип многозадачности, а опираемся только на принцип *обобщения*, анализируя два физических процесса, имеющих одинаковую математическую модель.

Принцип *комплементарности* выразился в использовании при разложении в ряд (4) встроенной функции «синус». В данном компьютерном *модуле* мы основываемся на таких уже известных студентам понятиях и методах, как дифференцирование, интеграл с переменным верхним пределом, дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными (принцип *повторения*). Принцип *парадоксальности* представлен здесь во всей своей полноте: довольно простая физическая модель потребовала нетривиального математического описания, разумеется, ограниченного требованиями принципа доступности. Реализация остальных, не упомянутых здесь (методических) принципов, как обычно, зависит от подхода к ним преподавателя, от его способностей и опыта.

**Заключение.** Предлагаются дидактические принципы компьютерного моделирования физических процессов и структур на лабораторных работах по математике. На эти принципы следует опираться в данном инновационном методе обучения математике студентов физических и инженерно–технических специальностей вузов. Все принципы можно разбить на четыре группы: математические, профессиональные (физические), компьютерные и методические. К числу основных относятся принципы приоритетности математики, конкретности, профессиональности, широкой представленности изучаемых математических понятий и методов, уяснения физического смысла частного математического содержания. Для иллюстрации разработанного подхода приводятся практические примеры его применения: моделирование математического и физического маятников при изучении степенных рядов в курсе математического анализа. Использование предлагаемых принципов создает условия для подготовки специалистов, обладающих профессиональной компетентностью, которая соответствует требованиям времени.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Ветрова, В.Т. Сборник физических задач по общему курсу высшей математики: Учеб. пособие для вузов / В.Т. Ветрова. – Минск: Вышэйшая школа, 1997. – 202 с.
2. Беломестнова, В.Р. Математическое моделирование как средство интеграции курса математики с физическими дисциплинами при обучении студентов физических специальностей / В.Р. Беломестнова // Омский научный вестник. – 2006. – № 7 (43). – С.192–201.
3. Малыгина, О.А. Изучение математического анализа на основе системно–деятельностного подхода: Учеб. пособие / О.А. Малыгина. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 416 с.
4. Кирюшин, И.В. Теоретическая интеграция математики и физики в курсе математического анализа / И.В. Кирюшин // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2010. – № 2. – С. 34–39.
5. Кирюшин, И.В. Построение межпредметных связей математики и физики в курсе математического анализа с использованием компьютерного моделирования физических процессов / И.В. Кирюшин // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2009. – № 4. – С.16–21.
6. Кирюшин, И.В. Реализация межпредметных связей высшей математики через компьютерное моделирование физических явлений / И.В. Кирюшин // Современные проблемы высшего профессионального образования: материалы II Междунар. науч.-метод. конф.: в 2 ч. / Курск. гос. техн. ун-т. – Курск, 2010. – Ч.1. – С. 63–65.
7. Воробьев, Е.М. Компьютерный практикум по математике. Математический анализ. Линейная алгебра: учебное пособие / Е.М. Воробьев. – М.: КДУ, 2009. – 604 с.
8. Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики: в 2 ч. / Н.Н. Бухгольц. – 6-е изд. – М.: Наука, 1965. – Ч.1. – 468 с.
9. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов: в 5 т. / Д.В. Сивухин. – М.: Наука, 1979. – Т.1: Механика. – 520 с.

***SUMMARY***

The didactic principles for computer modeling of the physical processes and structures in the course of higher mathematics are proposed. They can be used in the mathematical training for students of the physical and engineering specialties. To illustrate the designed approach two practical examples are given: modeling of the mathematical and physical pendulums when studying the power series. The designed integrative method can provides necessary conditions in the training of the specialists possessing modern professional competence.

Поступила в редакцию 25.10.2010 г.