НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Тема 6

Непараметрические методы проверки статистических гипотез

Тип выборок	Тип данных	
	Шкала наименований	Шкала порядка
Две зависимые выборки	М-критерий Макнамары	G-критерий знаков
Две независимые выборки	Критерий χ^2 Пирсона	U-критерий Манна-Уитни

КРИТЕРИЙ МАКНАМАРЫ

- Зависимые выборки (например, замеры «до» и «после»)
- Номинативная дитохомическая шкала

Результаты двукратного замера записываются в форме таблицы, имеющей форму 2×2. Поля в этой таблице обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C, D.

A	B
C	D

КРИТЕРИЙ МАКНАМАРЫ

- **Если B=C, критерий Макнамары не применяется.**
- Если сумма чисел B+C$\leq$20, используется способ расчета А.
- Если B+C >20, используется способ расчета Б.

Способ А:

1. Находится величина m = min (B, C).
2. Находится величина n=B+C.
3. По специальной таблице на пересечении столбца m и строки n находится величина эмпирического значения критерия Макнамары $M_{эмп}$. По таблице находятся не критические величины, а именно эмпирические значения критерия.
4. Величины $M_{кр}$ в случае способа А являются постоянными и равны соответственно $M_{кр} = 0,025$ для уровня значимости p=0,05 и $M_{кр} = 0,005$ для уровня значимости p=0,01.
5. Осуществляется статистический вывод. Если $M_{эмп} \geq M_{кр}$, принимается гипотеза H_0. Если $M_{эмп} < M_{кр}$, принимается гипотеза H_1.

ПРИМЕР

Психолога интересует вопрос — является ли выбранный им способ профессиональной ориентации к профессии экономиста достаточно эффективным? Отношение 20 учащихся к этой профессии выяснялось до и после проведения профориентационной работы.

		Второй опрос		
		Нравится	Не нравится	Сумма
Первый опрос	Нравится	A=2	B=2	4
	Не нравится	C=11	D=5	16
	Сумма	13	7	20

Формулируем статистические гипотезы:

H_0: выбранный способ профессиональной ориентации не обладает статистически значимой эффективностью;

H_1: выбранный способ профессиональной ориентации является эффективным с высокой степенью статистической достоверности.

Решение:

m=min(B, C)=min(2, 11)=2,

n=(B+C)=2+11=13.

Критические значения критерия Макнамары (способ А)

m / n	0	1	2	3
10	001	011	055	172
11		006	033	113
12		003	019	073
13		002	011	046
14		001	006	029

В таблице все величины даны без начального нуля и последующей запятой

Решение:

m=min(B, C)=min(2, 11)=2,

n=(B+C)=2+11=13.

эмпирическое значение критерия Макнамары: $M_{эмп}=0,011$.

$M_{кр\ 0,05} = 0,025$, $M_{кр\ 0,01} = 0,005$

$M_{эмп}=0,011 < M_{кр\ 0,05} = 0,025$

В качестве верной принимается гипотеза H_1 для p=0,05

Способ Б:

1. Производится расчет $M_{эмп}$ по следующей формуле:

$$M_{эмп} = \frac{(B - C)^2}{B + C}$$

2. $M_{эмп}$ сравнивается с критическими значениями. Они постоянны: $M_{кр\ 0,05} = 3,841$ и $M_{кр\ 0,01} = 6,635$;

3. Осуществляется статистический вывод:

Если $M_{эмп} \leq M_{кр}$, принимается гипотеза H_0.
Если $M_{эмп} > M_{кр}$, принимается гипотеза H_1.

Пример

В телестудии проводятся дебаты, нужна ли смертная казнь. Зрители, сидящие в зале, опрашиваются до начала дебатов и в конце передачи.

		После дебатов		
		Против смертной казни	За смертную казнь	Сумма
До дебатов	Против смертной казни	A=28	B=13	41
	За смертную казнь	C=8	D=27	35
	Сумма	36	40	76

Формулируем статистические гипотезы:

H_0: в ходе дебатов не произошло статистически достоверного изменения мнения зрителей о необходимости смертной казни;

H_1: в ходе дебатов мнение зрителей изменилось в сторону необходимости смертной казни с высокой степенью статистической достоверности.

Решение:

Так как B+C=13+8=21 >20, то используется способ Б.

$M_{эмп}$ =[(B-C)^2]/(B+C) =[(13-8)^2]/(13+8)=25/21=1,19.

$M_{кр\ 0,05}$ = 3,841 и $M_{кр\ 0,01}$ = 6,635

$M_{эмп} < M_{кр}$ даже для p=0,05

Нет оснований отвергать гипотезу H_0

даже для p=0,05

G-КРИТЕРИЙ ЗНАКОВ

- Зависимые выборки;
- Шкала порядка.

Критерий знаков предназначен для установления общего направления сдвига исследуемого признака. Он позволяет установить, в какую сторону в выборке в целом изменяются значения признака при переходе от первого измерения ко второму.

Алгоритм подсчета

1. Подсчитать количество нулевых реакций и исключить их из рассмотрения. В результате **n** уменьшится на количество нулевых реакций.
2. Определить преобладающее направление изменений. Считать сдвиги в преобладающем направлении «типичными».
3. Определить количество «нетипичных» сдвигов. Считать это число эмпирическим значением $G_{эмп}$.
4. По таблице определить критические значения $G_{кр}$ для данного **n**.
5. Сопоставить $G_{эмп}$ с $G_{кр}$.

Если $G_{эмп} \leq G_{кр}$, то в качестве верной принимается гипотеза H_1.

Если $G_{эмп} > G_{кр}$, то в качестве верной принимается гипотеза H_0.

Пример

Психолог проводит тренинг, целью которого является снижение уровня тревожности. С помощью критерия знаков выяснить, будет ли эффективен данный вариант тренинга

Уровень тревожности	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
До тренинга	30	39	35	34	40	35	22	22	32	23
После тренинга	34	39	26	33	34	40	25	23	33	24
Сдвиг	+	0	-	-	-	+	+	+	+	+

сумма нулевых сдвигов=1; $n=10-1=9$

сумма положительных сдвигов=6;

сумма отрицательных сдвигов=3. $G_{эмп}=3$

Выдвигаем статистические гипотезы:

H_0: тренинг не оказал статистически достоверное влияние на снижение уровня тревожности;

H_1: тренинг статистически достоверно способствовал снижению уровня тревожности.

Критические значения G-критерия знаков

n	p	
	0,05	0,01
5	0	-
6	0	-
7	0	0
8	1	0
9	1	0
10	1	0
11	2	1

$n=9$

$G_{эмп}=3$

$G_{кр\ 0,05}=1;$

$G_{кр\ 0,01}=0;$

$G_{эмп} > G_{кр\ 0,05}.$

Нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 для $p=0,05$: тренинг не привел к существенным изменениям в уровне тревожности испытуемых.

Критерий χ^2 Пирсона

- Независимые выборки;
- Номинативная шкала.

Наиболее распространенной является ситуация применения критерия χ^2 для сравнения **двух** эмпирических распределений.

Гипотезы

H_0: различия в сравниваемых эмпирических распределениях не являются статистически достоверными;

H_1: различия в сравниваемых эмпирических распределениях являются статистически достоверными.

Данные располагаются в таблице сопряженности:

	Категория 1	Категория 2	…	Категория *k*	Всего
Первое распределение	x_{11}	x_{12}	…	x_{1k}	n_1
Второе распределение	x_{21}	x_{22}	…	x_{2k}	n_2

n_1 — количество измерений первого распределения (объем первой выборки),
n_2 — количество измерений второго распределения (объем второй выборки),
k — количество категорий распредления,
x_{1i} — число измерений первого распределения, отнесенных к i-той категории,
x_{2i} — число измерений второго распределения, отнесенных к i-той категории.

Алгоритм подсчета

1. Находим эмпирическое значение критерия по формуле:

$$\chi^2_{эмп} = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_1 x_{2i} - n_2 x_{1i})^2}{x_{2i} + x_{1i}},$$

В случае распределения 2×2 эмпирическое значение $\chi^2_{эмп}$ рассчитывается по формуле:

$$\chi^2_{эмп} = \frac{(n_1 + n_2) \cdot \left(\left| x_{11} \cdot x_{22} - x_{12} \cdot x_{21} \right| - \frac{n_1 + n_2}{2} \right)^2}{n_1 \cdot n_2 \cdot (x_{11} + x_{21}) \cdot (x_{12} + x_{22})}$$

В случае трех и более распределений используется алгоритм вычисления эмпирического значения $\chi^2_{эмп}$ из книги «Основы математической статистики»

2. Вычисляем число степеней свободы $df = k-1$.
3. По таблице находим критическое значения критерия $\chi^2_{кр}$ для имеющегося числа степеней свободы.
4. Сравниваем эмпирическое и критическое значения критерия.

Если $\chi^2_{эмп} > \chi^2_{кр}$, то на соответствующем уровне значимости в качестве верной принимается альтернативная гипотеза H_1 и отвергается нуль-гипотеза H_0.

Если $\chi^2_{эмп} \leq \chi^2_{кр}$, то на соответствующем уровне значимости нет оснований отвергать в качестве верной нуль-гипотезу H_0.

Пример

Проводится сравнение уровня мотивации к логопедическим занятиям учащихся младших классов с ТНР (40 человек) и с НВОНР (20 человек):

	Нулевой	Низкий	Средний	Высокий	Всего
Дети с ТНР	x_{11}=15	x_{12}=14	x_{13}=8	x_{14}=3	40
Дети с НВОНР	x_{21}=0	x_{22}=5	x_{23}=10	x_{24}=5	20

Формулируем гипотезы:

H_0: различия в уровне мотивации не являются статистически достоверными;

H_1: различия в уровне мотивации являются статистически достоверными.

Вычисляем эмпирическое значение критерия:

$$\chi^2_{эмп} = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_1 x_{2i} - n_2 x_{1i})^2}{x_{2i} + x_{1i}},$$

$$\chi^2_{эмп} = \frac{1}{20\cdot 40}\left[\frac{(40\cdot 0-20\cdot 15)^2}{15+0}+\frac{(40\cdot 5-20\cdot 14)^2}{14+5}+\frac{(40\cdot 10-20\cdot 8)^2}{8+10}+\frac{(40\cdot 5-20\cdot 3)^2}{3+5}\right]=$$

$$=\frac{1}{20\cdot 40}\left[\frac{90000}{15}+\frac{6400}{19}+\frac{57600}{18}+\frac{19600}{8}\right]=14{,}984$$

Вычисляем количество степеней свободы df=4–1=3

Критические значения критерия

χ^2 Пирсона

df	p	
	0,05	0,01
1	3,841	6,635
2	5,991	9,210
3	7,815	11,345
4	9,488	13,277
5	11,070	15,086

$\chi^2_{эмп} = 14{,}984$

$\chi^2_{кр\ 0,05} = 7{,}815$

$\chi^2_{кр\ 0,01} = 11{,}345$

$\chi^2_{эмп} > \chi^2_{кр\ 0,01}$

В качестве верной принимается альтернативная гипотеза H_1 и отвергается нуль-гипотеза H_0 на уровне значимости p=0,01.

U-критерий Манна-Уитни

- Независимые выборки;
- Порядковая шкала;
- Позволяет выявить различия между малыми выборками по уровню какого-либо признака , когда n_1, $n_2 \geq 3$ или $n_1=2$, $n_2 \geq 5$.

Гипотезы

H_0: уровень признака в группе 2 не ниже уровня признака в группе 1.

H_1: уровень признака в группе 2 ниже уровня признака в группе 1.

Алгоритм подсчета

1. Особым способом пометить данные выборки № 1 (одним цветом, символом, например, «Х» или «1»), аналогично отметить данные выборки № 2 — другим цветом, символом, например, «Y» или «2».
2. Объединить все данные обеих выборок в единый ряд по степени возрастание признака, не считаясь с тем, к какой выборке они относятся, как если бы мы работали с одной большой выборкой.
3. Проранжировать значения объединенного ряда. Всего рангов получится столько, сколько у нас (n_1+n_2).
4. Вновь распределить данные по выборкам, ориентируясь на выбранные условные обозначения.

Алгоритм подсчета

5. Подсчитать сумму рангов отдельно T_1 для выборки 1 и T_2 для выборки 2. Проверить, совпадает ли сумма рангов с расчетной:

$$T_1 + T_2 = \frac{N(N+1)}{2}, \quad \text{где} \quad N = n_1 + n_2.$$

6. Определить большую из двух ранговых сумм.

Алгоритм подсчета

7. Определить значение $U_{эмп}$ по формуле:

$$U_{эмп} = (n_1 \cdot n_2) + \frac{n_x(n_x + 1)}{2} - T_x,$$

где n_1 — количество испытуемых в выборке 1;
n_2 — количество испытуемых в выборке 2;
T_x — большая из двух ранговых сумм;
n_x — количество испытуемых в группе с большей суммой рангов.

Алгоритм подсчета

8. Определить критические значения U по таблице.

Если $U_{эмп} \leq U_{кр}$, гипотеза H_0 отвергается, а в качестве верной принимается гипотеза H_1 на соответствующем уровне значимости.

Если $U_{эмп} > U_{кр}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_0.

Пример

Вызывает ли небольшая доза алкоголя замедление времени реакции у людей. Время реакции измерялась у контрольной группы (не принимавшей алкоголь) и у экспериментальной группы (принявшей небольшую дозу алкоголя за 30 минут до эксперимента):

	Время реакции (мсек)							
Экспериментальная группа	140	147	153	160	165	170	171	193
Контрольная группа	130	135	138	144	148	155	168	

Формулируем гипотезы:

H_0: различия во времени реакции у экспериментальной и контрольной группах не являются статистически достоверными;

H_1: с высокой степенью статистической достоверности алкоголь замедляет время реакции.

Определяем ранги в объединенной выборке:

Время реакции	140	147	153	160	165	170	171	193	130	135	138	144	148	155	168	Сумма
Номер выборки	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	
Ранги	4	6	8	10	11	13	14	15	1	2	3	5	7	9	12	
Ранги 1	4	6	8	10	11	13	14	15								81
Ранги 2									1	2	3	5	7	9	12	39

Проверяем правильность вычислений ранговых сумм:

$T_1+T_2=81+39=120$,

$N \cdot (N+1)/2=(8+7) \cdot (8+7+1)/2=15 \cdot 8=120$.

$T_x=T_1=81$, $n_x=n_1=8$.

Вычисляем эмпирическое значение критерия:

$$U_{эмп}=8 \cdot 7+\frac{8 \cdot (8+1)}{2}-81=56+36-81=11.$$

В таблице находим критические значения для n_1=7 и n_2=8:

Критические значения U-критерия Манна-Уитни

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_2	p=0,05							
7	0	2	4	6	8	11		
8	1	3	5	8	10	13	15	
9	1	4	6	9	12	15	18	21
p=0,01								
7	-	0	1	3	4	6		
8	-	0	2	4	6	7	9	
9	-	1	3	5	7	9	11	14

$U_{кр\ 0,05} = 13$
$U_{кр\ 0,01} = 7$

$U_{эмп} = 11$

$U_{эмп} = 11 < U_{кр\ 0,05}$

Можно говорить о подтверждении альтернативной гипотезы на уровне значимости p=0,05.

Для уровня значимости p=0,01 такой вывод сделать нельзя.