обучения учащихся решению функциональных уравнений; внедрить разработку в учебный процесс общеобразовательной школы и проверить ее эффективность. Под функциональным уравнением понимают уравнение, в котором надо найти неизвестную функцию, связанную с известными функциями при помощи образования сложной функции. Решить функциональное уравнение – значит найти неизвестную функцию, при подстановке которой в исходное функциональное уравнение оно обращается в тождество. Соотношения, задающие функциональные уравнения, являются тождествами относительно некоторых переменных, а уравнениями их называют потому, что неизвестные функции – искомые. Многие функциональные уравнения содержат несколько переменных. Все эти переменные, если на них не наложены какие-то ограничения, являются независимыми. Всегда четко должно быть оговорено, на каком множестве функциональное уравнение задается. Общее решение функционального уравнения может зависеть от этого множества. Кроме области определения функций, важно знать, в каком классе функций надо найти решение, так как количество и поведение решений зависит от этого класса. Для функциональных уравнений, не сводящихся к дифференциальным или интегральным, известно немного общих методов решения.

Пример 1. Найти все функции $f: R \to R$, которые при всех $x, y \in R$ удовлетворяют уравнению

$$f(x+y^2+2y+1) = y^4+4y^3+2xy^2+5y^2+4xy+2y+x^2+x+1. \qquad (1)$$

Решение. Так как мы хотим получить выражение $f(x)$, то попробуем избавиться от слагаемого y^2+2y+1 под знаком функции. Уравнение $y^2+2y+1=0$ имеет одно решение $y=-1$. Подставляя $y=-1$ в (1), получаем $f(x)=x^2-x+1$. Остается сделать проверку и убедиться, что решение найдено.

Т.В. ГУЛЯЕВА, Н.К. ПЕЩЕНКО
УО «БГПУ имени Максима Танка» (г. Минск, Беларусь)

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО РЕАЛИЗАЦИИ СТРАТЕГИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ОБОГАЩЕНИЯ В ОБУЧЕНИИ ОДАРЕННЫХ УЧАЩИХСЯ

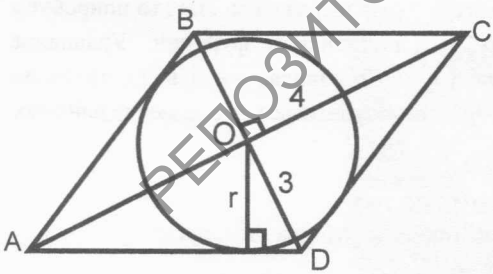
В психолого-педагогической теории и образовательной практике сложилось несколько стратегических линий разработки содержания учебно-познавательной деятельности одаренных детей. Среди них наиболее популярны такие стратегии, как стратегия «ускорения», «интенсификации», «вертикального обогащения», «горизонтального обогащения» и др.

Мы считаем, что применение стратегии «горизонтального обогащения» является наиболее эффективной формой обучения одаренных учащихся в современных условиях.

Стратегия «горизонтального обогащения» направлена на расширение и углубление изучаемого теоретического материала и класса решаемых стандартных и нестандартных задач. Для одаренных детей это дополнительная возможность реализовать свой интеллектуальный потенциал.

Одаренный ребенок – это ребенок с высокой восприимчивостью к учению и ярко выраженными творческими способностями. Такие дети требуют, как правило, дифференцированных учебных программ, а также методического сопровождения в познавательной деятельности. Мы считаем, что использование систем нестандартных исследовательских заданий по конкретным темам школьного курса математики при обучении талантливых и творческих учащихся можно рассматривать как одно из ведущих направлений педагогической деятельности в реализации стратегии «горизонтального обогащения». Заметим, что в такие системы целесообразно включать и задания на составление обучаемыми условий задач по готовым чертежам.

В качестве примера рассмотрим параллелограммы и вписанные в них окружности (9 класс). Предлагаемая нами система задач и ей подобные системы могут быть использованы учителем при проведении уроков математики в качестве дополнительного материала, при проведении факультативных занятий, для заданий на дом.



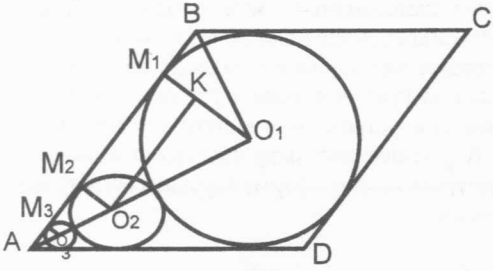
Предварительно важно повторить с учащимися теоретический материал, связанный с описанной и вписанной в четырехугольники окружностями. Затем можно решить несложную задачу в качестве своеобразной разминки, поскольку первые задачи не должны быть трудными, чтобы у обучаемых не пропал интерес к занятиям.

Задача № 1. Диагонали параллелограмма равны 6 и 8. Найдите радиус вписанной в параллелограмм окружности.

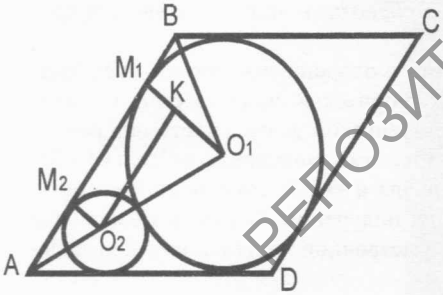
Решение. Обычно учащиеся сразу отмечают, что речь может идти только о ромбе, по теореме Пифагора находят его сторону AB = 5 и, используя метод площадей, вычисляют радиус. Ответ: 2,4.

Далее следует задачу усложнить, вписав в параллелограмм две окружности. Получаем **задачу 2.** В параллелограмм вписана окружность

радиуса 3, вторая окружность касается двух сторон параллелограмма и первой окружности. Расстояние между точками касания, лежащими на одной стороне параллелограмма, равно 3. Найдите радиус второй окружности.



Решение. Как и в предыдущей задаче, ABCD – ромб. Пусть O_1 и O_2 – центры данных окружностей, $r_1 = 3$ и r_2 их радиусы, M_1 и M_2 – точки касания окружностей со стороной AB. Как правило, учащиеся предлагают применить к треугольнику O_1KO_2 теорему Пифагора и получают уравнение $9+(3-r_2)^2=(3+r_2)^2$, из которого находят $r_2 = \frac{3}{4}$. Однако учителю следует обратить внимание обучаемых на формулу выражения расстояния между точками касания двух окружностей через их радиусы, т.е. $M_1M_2 = O_2K = 2\sqrt{r_1r_2}$. Она найдет применение при решении последующих задач и в то же время является новой, незнакомой для ребят, поскольку не рассматривается в школьном учебнике.

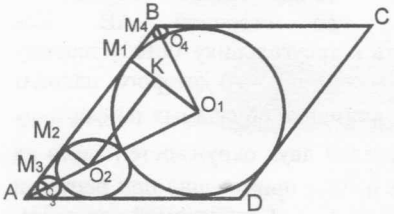


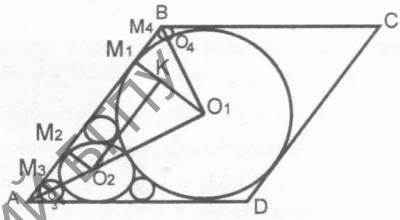
В следующей задаче вписываем в четырехугольник три окружности. Получаем **задачу № 3.** В ромб вписана окружность, а две другие касаются двух сторон ромба и последовательно друг друга. Расстояние между точками касания, лежащими на одной стороне параллелограмма, вписанной окружности и окружности, касающейся ее, равно 3, а между точками касания двух других окружностей – $\frac{3}{4}$. Радиус средней окружности равен $\frac{3}{4}$. Найдите радиусы двух других окружностей и площадь ромба.

Решение. Пусть O_1, O_2, и O_3 – центры данных окружностей, r_1, r_2, r_3 – их радиусы, причем, $r_2 = \frac{3}{4}$. M_1, M_2, M_3 – точки касания окружностей со стороной AB. Предлагаем учащимся воспользоваться формулой из предыдущей задачи. Поскольку $M_1M_2 = 2\sqrt{r_1r_2} = 3$, то $r_1 = 3$. А так как $M_2M_3 = 2\sqrt{r_2r_3} = \frac{3}{4}$, то $r_3 = \frac{3}{16}$. Найдем теперь площадь ромба. Пусть K – основание перпендикуляра, опущенного из O_2 на O_1M_1. Из подобия треугольников AM_2O_2 и O_2KO_1 находим, что $AM_2 = 1$. Поэтому

$AM_1 = AM_2 + + M_2M_1 = 1 + 3 = 4$. Так как угол AO_1B равен 90^0, то $(O_1M_1)^2 = BM_1 \times AM_1$. Откуда $BM_1 = \frac{9}{4}$, $AB = \frac{25}{4}$. Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{75}{2}$. Для экономии времени нахождение площади ромба можно задать на дом.

На развитие творческих способностей школьников и их познавательного интереса к математике положительно влияют и задания на самостоятельное составление условий задач по предлагаемым чертежам. Например, в четвертый ромб мы вписываем уже четыре окружности (четвертая окружность касается сторон угла B и вписанной окружности), а в пятый – пять или шесть и предлагаем учащимся самим сформулировать по готовым чертежам условия задач и решить их.





При этом учителю важно подчеркнуть, что составленная ими задача обязательно должна иметь решение, не содержать лишних данных и противоречий в условии.

В заключение отметим, что работа с одаренными детьми предполагает создание условий для развития их творческих способностей, что возможно при доминировании их исследовательской деятельности над репродуктивным усвоением знаний. Таким образом, происходит не только обогащение содержания изучаемого материала и углубление знаний учащихся, но и развитие инструментария для их получения. Только в этом случае у учащихся будут развиваться приемы умственной деятельности и вырабатываться исследовательские навыки.

И.М. КАЧАНОВСКАЯ
ГУО «Средняя школа № 9 г. Пинска» (г. Пинск, Беларусь)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5–6 КЛАССОВ

Несмотря на то, что предмет «Геометрия» не изучается в 5–6 классах, учащиеся прекрасно справляются с задачами такого типа, используя логику и сообразительность. Необходимо как можно раньше начинать