УДК 517.5

В.А. ШИЛИНЕЦ
Минск, БГПУ имени Максима Танка

ОБОБЩЕННАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ ДЛЯ БИКВАТЕРНИОННЫХ F-МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В работе [1] предлагается подход, позволяющий задачи классической механики описать в терминах функций со значениями в гиперкомплексных числах. Оказывается, можно построить бикватернионную модель движения тела вблизи поверхности земли и сформулировать задачу Кеплера на языке дифференциальных уравнений для функций со значениями в кватернионах.

Кроме того, задача о движении твердого тела может быть описана в терминах функций со значениями в бикватернионах. Так винтовое перемещение твердого тела можно представить как решение дифференциального уравнения $\dfrac{dw}{d\Phi} = nw$, где n – бикватернион, Φ – дуальная переменная, w – функция дуальной переменной со значениями в бикватернионах.

Как известно [1], бикватернионами (обобщением кватернионов) называют элементы множества $\{\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k\}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – дуальные числа. Правило умножения бикватернионов задается правилом умножения мнимых единиц: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $ik = -j$, $ki = j$, $kj = -i$, $jk = i$.

В данной работе для F-моногенных бикватернионных функций, заданных в некоторой односвязной области $D \subset R^4$, строится обобщенная интегральная формула Коши.

Нам далее понадобятся следующие определения.

Определение 1. *Бикватернионной функцией, заданной в области $D \subset R^4$, будем называть функцию вида $f(x,y,z,t) = f^0 + if^1 + jf^2 + kf^3$, где $f^n = f^n(x,y,z,t)$ (n – индекс, $n = 0,1,2,3$) – дуальные функции, заданные в области D; $1, i, j, k$ – известный базис кватернионной алгебры.*

Далее полагаем, что $f \in C^2(D)$, т.е. $f^n \in C^2(D)$.

Определение 2. *Бикватернионная функция f называется моногенной в смысле В.С. Федорова* (F-*моногенной*) [2] *по бикватернионной функции $p = x + \varepsilon y + e(z + \varepsilon t)$ ($e = i\lambda_1 + j\lambda_2 + k\lambda_3$, λ_n ($n = 1,2,3$) – действительные*

числа, $\sum_{n=1}^{3}\lambda_n^2 = 1$, $\varepsilon^2 = 0$) *в области* $D \subset R^4$, *если в этой области найдетс*
такая бикватернионная функция θ, *что*

$$f'_x = p'_x\theta,\ f'_y = p'_y\theta,\ f'_z = p'_z\theta,\ f'_t = p'_t\theta. \qquad (1$$

Обозначим функцию θ через $\frac{\partial f}{\partial p}$. Тогда равенства (1) можно записат в виде

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial p},\ f'_y = \varepsilon\frac{\partial f}{\partial p},\ f'_z = e\frac{\partial f}{\partial p},\ f'_t = e\varepsilon\frac{\partial f}{\partial p}. \qquad (2$$

Пусть G – четырехмерная ограниченная область с границей ∂G ($\partial G \subset D, G \subset D$). Полагаем далее, что $p = x + \varepsilon y + e(z + \varepsilon t)$ и функция f F-моногенная по p, определены на замкнутой трехмерной поверхности ∂G, гомеоморфной сфере конечного диаметра и достаточно гладкой для возможности использовать формулу Остроградского.

Для бикватернионной функции $f(x,y,z,t) = f^0 + if^1 + jf^2 + kf^3$ и произвольной точки $M(x_0, y_0, z_0, t_0) \notin \partial G$ полагаем [3]:

$$I_{\partial G} = \int_{\partial G}\left\{\alpha_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y} - e\frac{\partial\varphi}{\partial z} - e\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \alpha_2\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \alpha_3\left(e\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \alpha_4\left(e\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right\} f dS,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности ∂G в её текущей точке $P(x,y,z,t)$,

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + (t-t_0)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x-x_0}{r^4},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{y-y_0}{r^4},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{z-z_0}{r^4}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{t-t_0}{r^4}.$$

Пусть M – произвольная данная точка области D, $M \notin \overline{G}$.

Теорема 1. *Для любой бикватернионной функции* f, F-*моногенной п бикватернионной функции* p *в области* D, *имеем* $I_{\partial G} = 0$.

◄ Используя известную формулу Остроградского, получаем:

$$I_{\partial G} = \int_G\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y} - e\frac{\partial\varphi}{\partial z} - e\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)f\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)f\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\left(e\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)f\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(e\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)f\right)\right\}dG =$$

$$= \int_G \left\{ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \right) f + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y} - e\frac{\partial\varphi}{\partial z} - e\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)\frac{\partial f}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + \left(e\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)\frac{\partial f}{\partial z} + \left(e\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)\frac{\partial f}{\partial t} \right\} dG.$$

Отсюда и из условий (2) F-моногенности бикватернионной функции f по функции p в области D, поскольку $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$, получаем:

$$I_{\partial G} = \int_G \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y} - e\frac{\partial\varphi}{\partial z} - e\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)\frac{\partial f}{\partial p} + \left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)\varepsilon\frac{\partial f}{\partial p} + \right.$$
$$\left. + \left(e\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) e\frac{\partial f}{\partial p} + \left(e\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) e\varepsilon\frac{\partial f}{\partial p} \right\} dG = 0. \quad ►$$

Теорема 2. *Если бикватернионная функция f является F-моногенной по бикватернионной функции p в области D, то для любой точки M, лежащей внутри G, имеем:*

$$f(M) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial G} \left\{ \left(\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \alpha_4\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) + \varepsilon\left(\alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + \right.$$
$$\left. + e\left(\alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) + e\varepsilon\left(\alpha_4\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) \right\} f dS. \tag{3}$$

◄ Пусть G_1 – шар с центром в точке $M(x_0, y_0, z_0, t_0)$, расположенный внутри G.

Если l – радиус сферы ∂G_1, то имеем

$$I_{\partial G_1} = \int_{\partial G_1} \left\{ (\alpha_1 + \varepsilon\alpha_2 + e\alpha_3 + e\varepsilon\alpha_4)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (\alpha_2 - \varepsilon\alpha_1)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + (\alpha_3 - e\alpha_1)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (\alpha_4 - e\varepsilon\alpha_1)\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\} f dS = \tag{4}$$

$$= \int_{\partial G_1} \left\{ (\alpha_1 + \varepsilon\alpha_2 + e\alpha_3 + e\varepsilon\alpha_4)\frac{x - x_0}{l^4} + (\alpha_2 - \varepsilon\alpha_1)\frac{y - y_0}{l^4} + \right.$$
$$\left. + (\alpha_3 - e\alpha_1)\frac{z - z_0}{l^4} + (\alpha_4 - e\varepsilon\alpha_1)\frac{t - t_0}{l^4} \right\} f dS =$$
$$= \int_{\partial G} \left\{ \frac{1}{l^3}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2) \right\} f dS.$$

Известно, что $\sum_{k=1}^{4} \alpha_k{}^2 = 1$, $dS = l^3 d\omega$ ($d\omega$ – элемент единичной сферы).

Из равенства (4) получаем

$$f(M) = \frac{1}{2\pi^2} I_{\partial G_1}. \tag{5}$$

Из теоремы 1 следует, что $I_{\partial G} = I_{\partial G_1}$. Тогда из равенства (5) будем иметь:

$$f(M) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{\partial G} \left\{ \left(\alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha_4 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \varepsilon \left(\alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\left. + e \left(\alpha_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + e\varepsilon \left(\alpha_4 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right\} f dS.$$

Полученная обобщенная интегральная формула Коши (3) позволяет решить следующую краевую задачу.

Задача. Пусть G – четырехмерная ограниченная область с границей ∂G ($\partial G \subset D, G \subset D$). Полагаем далее, что бикватернионная функция $p = x + \varepsilon y + e(z + \varepsilon t)$ и бикватернионная функция f, F-моногенная по p, определены на замкнутой трехмерной поверхности ∂G, гомеоморфной сфере конечного диаметра и достаточно гладкой для возможности использовать формулу Остроградского.

Требуется найти в любой внутренней точке области G значение функции f, F-моногенной по p, если известны её значения на поверхности ∂G.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радыно, Н.Я. О модели описания винтового перемещения твердого тела в терминах бикватернионов / Н.Я. Радыно // Международная математическая конференция «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» : тезисы докладов. – Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2010. – С. 135.

2. Фёдоров, В.С. Основные свойства обобщённых моногенных функций / В.С. Фёдоров // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 257–265.

3. Фёдоров, В.С. Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве / В.С. Фёдоров // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 227–233.