

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ
ИНСТИТУТ ТЕПЛО- и МАССООБМЕНА им. А. В. ЛЫКОВА
Журнал основан в январе 1958 г.

ИФЖ

И **НЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

JOURNAL
OF ENGINEERING PHYSICS
AND THERMOPHYSICS

Отдельный оттиск
Offprint

Том 76, № 5

Vol. 76, No. 5

СЕНТЯБРЬ—ОКТАБРЬ
SEPTEMBER—OCTOBER

2003

УДК 536.24

А. В. Алифанов, В. М. Голуб

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРОВ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ХАНКЕЛЯ И ЛАПЛАСА

Рассмотрена задача равномерного нестационарного бокового нагрева двух ограниченных цилиндров с различными теплофизическими характеристиками, находящиеся в идеальном тепловом контакте. С помощью метода интегральных преобразований найдено точное аналитическое решение для определения трехмерного температурного поля в реальном пространстве. Исследованы особенности полученного решения, приведены примеры конкретных расчетов.

Рассмотрим систему идеального контакта в плоскости $z = 0$ двух ограниченных цилиндров с различными теплофизическими характеристиками (ТФХ) и нулевой начальной температурой. Цилиндры имеют одинаковый радиус R и длины соответственно l_1 и l_2 . В начальный момент времени на всей боковой поверхности цилиндров ($-l_1 \leq z \leq l_2$, $r = R$) начинает действовать источник тепла постоянной поверхностной мощности Q_R . На торцах цилиндров происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры по закону Ньютона с коэффициентами теплоотдачи α_1 и α_2 . Требуется найти распределение температурного поля в системе в любой момент времени. Математически поставленная задача имеет вид двух дифференциальных уравнений теплопроводности в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - a_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0, \quad -l_1 < z < 0; \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} - a_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) = 0, \quad 0 < z < l_2, \quad (1)$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$T_1(r, z, 0) = T_2(r, z, 0), \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1(r, -l_1, t)}{\partial z} = \alpha_1 T_1(r, -l_1, t), \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2(r, -l_2, t)}{\partial z} = -\alpha_2 T_2(r, l_2, t); \quad (2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(R, z, t)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(R, z, t)}{\partial r} = Q_R, \quad \frac{\partial T_1(0, z, t)}{\partial r} = \frac{\partial T_2(0, z, t)}{\partial r} = 0. \quad (3)$$

В области контакта ($z = 0$) потребуем выполнения условий сопряжения

$$T_1(r, 0, t) = T_2(r, 0, t), \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1(r, 0, t)}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(r, 0, t)}{\partial z}. \quad (4)$$

Последовательно применим к задаче (1)–(4) конечное интегральное преобразование Ханкеля

$$\bar{T}_i(\mu_m, z, t) = \int_0^R r J_0 \left(\mu_m \frac{r}{R} \right) T_i(r, z, t) dr$$

и преобразование Лапласа

$$\bar{\bar{T}}_i(\mu_m, z, s) = \int_0^\infty \exp(-st) \bar{T}_i(\mu_m, z, t) dt,$$

где μ_m – корни уравнения $J_1(\mu) = 0$. После указанных операций первоначальная задача сведется к следующей:

$$\frac{d^2 \bar{\bar{T}}_1}{dz^2} - \sigma_{1m}^2 \bar{\bar{T}}_1 = -\frac{RJ_0(\mu_m, Q_R)}{s\lambda_1}, \quad -l_1 < z < 0; \quad \frac{d^2 \bar{\bar{T}}_2}{dz^2} - \sigma_{2m}^2 \bar{\bar{T}}_2 = -\frac{RJ_0(\mu_m, Q_R)}{s\lambda_2}, \quad 0 < z < l_2; \quad (5)$$

$$\lambda_1 \frac{d\bar{\bar{T}}_1(\mu_m, -l_1, s)}{dz} = \alpha_1 \bar{\bar{T}}_1(\mu_m, -l_1, s), \quad \lambda_2 \frac{d\bar{\bar{T}}_2(\mu_m, l_2, s)}{dz} = -\alpha_2 \bar{\bar{T}}_2(\mu_m, l_2, s); \quad (6)$$

$$\bar{T}_1(\mu_m, 0, s) = \bar{T}_2(\mu_m, 0, s), \quad \lambda_1 \frac{d\bar{T}_1(\mu_m, 0, s)}{dz} = \lambda_2 \frac{d\bar{T}_2(\mu_m, 0, s)}{dz}, \quad (7)$$

где

$$\sigma_{1m} = \sqrt{\frac{s}{a_1} + \gamma_m^2}; \quad \sigma_{2m} = \sqrt{\frac{s}{a_2} + \gamma_m^2}; \quad \gamma_m = \frac{\mu_m}{R}.$$

В итоге от задачи (1)–(4) с дифференциальными уравнениями в частных производных мы пришли к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (5) с граничными условиями (6) и условиями сопряжения (7). Общие решения уравнений (5) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(\mu_m, z, s) &= A_m \operatorname{ch} \sigma_{1m} z + B_m \operatorname{sh} \sigma_{1m} z + \frac{a_1 R J_0(\mu_m) Q_R}{\lambda_1 s (s + a_1 \gamma_m^2)}, \\ \bar{T}_2(\mu_m, z, s) &= C_m \operatorname{ch} \sigma_{2m} z + D_m \operatorname{sh} \sigma_{2m} z + \frac{a_2 R J_0(\mu_m) Q_R}{\lambda_2 s (s + a_2 \gamma_m^2)}. \end{aligned}$$

После определения с использованием граничных условий и условий сопряжения постоянных интегрирования A_m , B_m , C_m , D_m получим выражения для температур контактирующих цилиндров в пространстве изображений

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(\mu_m, z, s) &= \frac{R Q_R J_0(\mu_m)}{\lambda_1} \left\{ \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{s \sigma_{2m} Z_m} \lambda_1 (\sigma_{2m} \operatorname{sh} \sigma_{2m} l_2 + h_2 \operatorname{ch} \sigma_{2m} l_2 - h_2) (\sigma_{1m} \operatorname{ch} \sigma_{1m} (l_1 + z) + \right. \\ &+ h_1 \operatorname{sh} \sigma_{1m} (l_1 + z)) - \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{s \sigma_{1m} Z_m} \left[\lambda_2 \frac{\sigma_{2m}}{\sigma_{1m}} (\sigma_{2m} \operatorname{sh} \sigma_{2m} l_2 + h_2 \operatorname{ch} \sigma_{2m} l_2) (\sigma_{1m} \operatorname{ch} \sigma_{1m} (l_1 + z) + h_1 \operatorname{sh} \sigma_{1m} (l_1 + z) - \right. \\ &\left. \left. - \operatorname{sh} \sigma_{1m} z) + \alpha_1 (\sigma_{2m} \operatorname{ch} \sigma_{2m} l_2 + h_2 \operatorname{sh} \sigma_{2m} l_2) \operatorname{ch} \sigma_{1m} z \right] + \frac{a_1}{s (s + a_1 \gamma_m^2)} \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_2(\mu_m, z, s) &= \frac{R Q_R J_0(\mu_m)}{\lambda_2} \left\{ \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{s \sigma_{1m} Z_m} \lambda_2 (\sigma_{1m} \operatorname{sh} \sigma_{1m} l_1 + h_1 \operatorname{ch} \sigma_{1m} l_1 - h_1) (\sigma_{2m} \operatorname{ch} \sigma_{2m} (l_2 - z) + \right. \\ &+ h_2 \operatorname{sh} \sigma_{2m} (l_2 - z)) - \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{s \sigma_{2m} Z_m} \left[\lambda_1 \frac{\sigma_{1m}}{\sigma_{2m}} (\sigma_{1m} \operatorname{sh} \sigma_{1m} l_1 + h_1 \operatorname{ch} \sigma_{1m} l_1) (\sigma_{2m} \operatorname{ch} \sigma_{2m} (l_2 - z) + h_2 \operatorname{sh} \sigma_{2m} (l_2 - z) - \right. \\ &\left. \left. - \operatorname{sh} \sigma_{2m} z) + \alpha_2 (\sigma_{1m} \operatorname{ch} \sigma_{1m} l_1 + h_1 \operatorname{sh} \sigma_{1m} l_1) \operatorname{ch} \sigma_{2m} z \right] + \frac{a_2}{s (s + a_2 \gamma_m^2)} \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Z_m(\mu_m, s) &= \sqrt{a_1 a_2} (\lambda_1 \sigma_{1m} (\sigma_{1m} \operatorname{sh} \sigma_{1m} l_1 + h_1 \operatorname{ch} \sigma_{1m} l_1) (\sigma_{2m} \operatorname{ch} \sigma_{2m} l_2 + h_2 \operatorname{sh} \sigma_{2m} l_2) + \\ &+ \lambda_2 \sigma_{2m} (\sigma_{1m} \operatorname{ch} \sigma_{1m} l_1 + h_1 \operatorname{sh} \sigma_{1m} l_1) (\sigma_{2m} \operatorname{sh} \sigma_{2m} l_2 + h_2 \operatorname{ch} \sigma_{2m} l_2)), \quad h_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda_1}, \quad h_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda_2}. \end{aligned}$$

Для получения явных выражений для температурных полей необходимо произвести над уравнениями (8) и (9) операции обратных преобразований Лапласа и Ханкеля [1–3]. В связи с этим актуальным является вопрос о существовании оригиналов температуры от полученных решений. Известно, что не всякая функция $f(s)$ в пространстве преобразований Лапласа может быть изображением некоторой функции $f(t)$ в реальном пространстве [2]. Как показывает анализ решений (8) и (9), они удовлетворяют всем требованиям существования оригиналов и соответствующих обратных преобразований. Единственная особенность имеется лишь на границе контакта ($z = 0$). Но она приводит только к появлению в окончательном решении некоторой обобщенной функции и не является препятствием для проведения процедуры обратного преобразования. Эта особенность будет обсуждена несколько ниже. В процессе обращения решений (8) и (9) были использованы табличные интегралы преобразований Лапласа [4], а также теоремы разложения Ваченко–Захарченко и умножения изображений Бореля [2]. Ввиду громоздкости данных уравнений и соответственно процедур обратного преобразования приведем только конечный результат, опуская ход самих математических выкладок. Пространственное температурное поле в системе ограниченных разнородных цилиндров, находящихся в идеальном тепловом контакте и нагреваемых с боковой поверхности тепловым потоком постоянной мощности Q_R , определяется следующими выражениями:

$$T_1(r, z, t) = \frac{2Q_R}{\lambda_1 R} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{k0} \cos \gamma_{k0} z + B_{k0} \sin \gamma_{k0} z}{a_1^2 \gamma_{k0}^2 Z_{k0}} (1 - \exp(-a_1^2 \gamma_{k0}^2 t)) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_m}{R} r\right)}{\gamma_m^2 J_0(\mu_m)} \times \right. \\ \times \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{km}}{(\gamma_{km}^2 + \gamma_m^2) Z_{km}} ((A_{km} \cos \gamma_{km} z + B_{km} \sin \gamma_{km} z) F(t) + (A'_{km} \cos \gamma_{km} z + B'_{km} \sin \gamma_{km} z) G(t)) + \right. \\ \left. + (1 - \exp(-a_1^2 \gamma_m^2 t)) + \frac{\lambda_1 (1 - \exp(-a_2^2 \gamma_m^2 t)) - \lambda_2 (1 - \exp(-a_1^2 \gamma_m^2 t))}{\lambda_2 + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \lambda_1} \eta(z) \right] \Bigg\}, \quad (10)$$

$$T_2(r, z, t) = \frac{2Q_R}{\lambda_2 R} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{k0} \cos q_{k0} z + D_{k0} \sin q_{k0} z}{a_1^2 \gamma_{k0}^2 Z_{k0}} (1 - \exp(-a_1^2 \gamma_{k0}^2 t)) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_m}{R} r\right)}{\gamma_m^2 J_0(\mu_m)} \times \right. \\ \times \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_{km}}{(\gamma_{km}^2 + \gamma_m^2) Z_{km}} ((C_{km} \cos q_{km} z + D_{km} \sin q_{km} z) F(t) + (C'_{km} \cos q_{km} z + D'_{km} \sin q_{km} z) G(t)) + \right. \\ \left. + (1 - \exp(-a_2^2 \gamma_m^2 t)) + \frac{\lambda_2 (1 - \exp(-a_1^2 \gamma_m^2 t)) - \lambda_1 (1 - \exp(-a_2^2 \gamma_m^2 t))}{\lambda_1 + \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \lambda_2} \eta(z) \right] \Bigg\}. \quad (11)$$

Здесь

$$F(t) = \left(1 - \frac{\gamma_{km}^2}{\beta_{km}^2} \exp(-a_2^2 \gamma_m^2 t) - \frac{\gamma_m^2}{\beta_{km}^2} \left(\exp(-a_2^2 \gamma_m^2 t) - \frac{a_2}{a_1} \exp(-a_1 (\gamma_{km}^2 + \gamma_m^2) t) \right) \right), \\ G(t) = \left(1 - \exp(-a_1^2 \gamma_m^2 t) - \frac{\gamma_m^2}{\gamma_{km}} (\exp(-a_1^2 \gamma_m^2 t) - \exp(-a_1 (\gamma_{km}^2 + \gamma_m^2) t)) \right), \\ Z_{km} = \left(\lambda_1 \left(h_1 \left(\frac{\gamma_{km}}{\beta_{km}} (1 + h_2 l_2) + \frac{\beta_{km}}{\gamma_{km}} \right) - \gamma_{km} \beta_{km} l_1 \right) + \lambda_2 \left(h_2 \left(\frac{\beta_{km}}{\gamma_{km}} (1 + h_1 l_1) + \frac{\gamma_{km}}{\beta_{km}} \right) - \frac{a_1 \gamma_{km} \beta_{km} l_2}{a_2} \right) \right) \times \\ \times \cos \gamma_{km} l_1 \cos q_{km} l_2 + \left(\lambda_1 \left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} h_2 \left(\frac{h_1}{\gamma_{km}} - \gamma_{km} l_1 \right) - \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \gamma_{km} h_1 l_2 \right) - \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \lambda_2 \times \right. \\ \times \left. \left(\gamma_{km} (2 + h_2 l_2) + \frac{\beta_{km}^2}{\gamma_{km}} (1 + h_1 l_1) \right) \right) \cos \gamma_{km} l_1 \sin q_{km} l_2 + \left(\lambda_2 \left(\frac{h_1 h_2}{\beta_{km}} - \beta_{km} \left(h_2 l_1 + \frac{a_1}{a_2} h_1 l_2 \right) \right) - \right. \\ - \lambda_1 \left(\beta_{km} (2 + h_1 l_1) + \frac{\gamma_{km}^2}{\beta_{km}} (1 + h_2 l_2) \right) \cos q_{km} l_2 \sin \gamma_{km} l_1 + \left(\lambda_1 \left(\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \gamma_{km}^2 l_2 - \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} h_2 (2 + h_1 l_1) \right) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \lambda_2 (\beta_{km}^2 l_1 - h_1 (2 + h_2 l_2)) \right) \sin \gamma_{km} l_1 \sin q_{km} l_2,$$

$$A_{k0} = 2 \left\{ (a_1 \lambda_2 - a_2 \lambda_1) (\sqrt{a_1} \gamma_{k0} \cos \gamma_{k0} l_1 + \sqrt{a_1} h_1 \sin \gamma_{k0} l_1) (h_2 \cos q_{k0} l_2 - q_{k0} \sin q_{k0} l_2) + \right. \\ \left. + a_1 a_1 (\sqrt{a_1} \gamma_{k0} \cos q_{k0} l_2 + \sqrt{a_2} h_2 \sin q_{k0} l_2) + h_2 a_2 \lambda_1 (\sqrt{a_1} \gamma_{k0} \cos \gamma_{k0} l_1 + \sqrt{a_1} h_1 \sin \gamma_{k0} l_1) \right\},$$

$$B_{k0} = 2 \left\{ (a_1 \lambda_2 - a_2 \lambda_1) \sqrt{a_1} (h_1 \cos \gamma_{k0} l_1 - \gamma_{k0} \sin \gamma_{k0} l_1) (h_2 \cos q_{k0} l_2 - q_{k0} \sin q_{k0} l_2) - \right.$$

Корни уравнения (12) для систем медь-титан и сталь-цирконий

m	μ_m	γ_{1m}		γ_{2m}		γ_{3m}		γ_{4m}		γ_{5m}	
		CuTi	FeZr	CuTi	FeZr	CuTi	FeZr	CuTi	FeZr	CuTi	FeZr
0	0	2.68	6.33	13.91	33.14	33.75	71.60	54.50	96.31	72.73	138.91
1	3.83	38.55	52.01	70.96	86.04	86.87	127.96	111.12	159.42	136.25	194.94
2	7.02	26.17	5.28	68.59	61.10	92.38	101.05	124.59	147.50	150.98	177.30
3	10.17	55.15	19.18	90.11	68.26	127.12	115.94	154.89	158.41	175.86	199.30
4	13.32	36.84	27.57	82.59	76.42	121.73	128.27	154.78	169.16	179.95	217.34
5	16.47	21.48	33.06	66.98	85.69	110.79	137.94	151.04	181.53	178.78	229.26

$$- \alpha_1 a_1 \sqrt{a_2} (h_2 \cos q_{k0} l_2 - q_{k0} \sin q_{k0} l_2) + h_2 a_2 \lambda_1 \sqrt{a_1} (h_1 \cos \gamma_{k0} l_1 - \gamma_{k0} \sin \gamma_{k0} l_1) \},$$

$$A_{km} = 2\lambda_1 (\gamma_{km} \cos \gamma_{km} l_1 + h_1 \sin \gamma_{km} l_1) (q_{km} \sin q_{km} l_2 - h_2 \cos q_{km} l_2 + h_2),$$

$$B_{km} = 2\lambda_1 (h_1 \cos \gamma_{km} l_1 - \gamma_{km} \sin \gamma_{km} l_1) (q_{km} \sin q_{km} l_2 - h_2 \cos q_{km} l_2 + h_2),$$

$$A'_{km} = 2 \left[\lambda_2 (\gamma_{km} \cos \gamma_{km} l_1 + h_1 \sin \gamma_{km} l_1) (h_2 \cos q_{km} l_2 - q_{km} \sin q_{km} l_2) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \frac{\alpha_1 \gamma_{km}}{\beta_{km}} (q_{km} \cos q_{km} l_2 + h_2 \sin q_{km} l_2) \right],$$

$$B'_{km} = 2\lambda_2 (h_2 \cos q_{km} l_2 - q_{km} \sin q_{km} l_2) (h_1 \cos \gamma_{km} l_1 - \gamma_{km} \sin \gamma_{km} l_1 + h_1),$$

$$C_{k0} = 2 \{ (a_2 \lambda_1 - a_1 \lambda_2) (h_1 \cos \gamma_{k0} l_1 - \gamma_{k0} \sin \gamma_{k0} l_1) (\sqrt{a_1} \gamma_{k0} \cos q_{k0} l_2 + \sqrt{a_2} h_2 \sin q_{k0} l_2) + \\ + \alpha_2 a_2 (\sqrt{a_1} \gamma_{k0} \cos \gamma_{k0} l_1 + \sqrt{a_1} h_1 \sin \gamma_{k0} l_1) + h_1 a_1 \lambda_2 (\sqrt{a_1} \gamma_{k0} \cos q_{k0} l_2 + \sqrt{a_2} h_2 \sin q_{k0} l_2) \},$$

$$C_{km} = 2 \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \left[\lambda_1 (h_1 \cos \gamma_{km} l_1 - \gamma_{km} \sin \gamma_{km} l_1) (q_{km} \cos q_{km} l_2 + h_2 \sin q_{km} l_2) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \frac{\alpha_2 \beta_{km}}{\gamma_{km}} (\gamma_{km} \cos \gamma_{km} l_1 + h_1 \sin \gamma_{km} l_1) \right],$$

$$C'_{km} = 2 \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \lambda_2 (q_{km} \cos q_{km} l_2 + h_2 \sin q_{km} l_2) (\gamma_{km} \sin \gamma_{km} l_1 - h_1 \cos \gamma_{km} l_1 + h_1),$$

$$D_{km} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} B_{km}, \quad D'_{km} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} B'_{km}, \quad \beta_{km} = \sqrt{\gamma_{km}^2 + \left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right) \gamma_m^2}, \quad q_{km} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \beta_{km},$$

$$\eta(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \neq 0, \\ 1 & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

Величины γ_{km} являются корнями трансцендентного уравнения

$$\lambda_1 \gamma_{km} (\sqrt{a_1} \beta_{km} \cos q_{km} l_2 + \sqrt{a_2} h_2 \sin q_{km} l_2) (h_1 \cos \gamma_{km} l_1 - \gamma_{km} \sin \gamma_{km} l_1) + \\ + \lambda_2 \sqrt{a_1} \beta_{km} (\gamma_{km} \cos \gamma_{km} l_1 + h_1 \sin \gamma_{km} l_1) (h_2 \cos q_{km} l_2 - q_{km} \sin q_{km} l_2) = 0. \quad (12)$$

Анализ полученных уравнений (10) и (11) показывает, что они имеют гораздо более сложную структуру, чем решения для однородных цилиндров [1, 5], одномерных задач контактной теплопроводности [1, 5, 6], а также пространственных задач в полуограниченных и неограниченных областях [5-8]. Кроме сложного общего вида конечных выражений, необходимо отдельно обратить внимание на две их особенности.

Первая состоит в том, что в уравнениях (10), (11) в показателях при экспонентах и в знаменателях членов сумм рядов входит комбинация величин $\gamma_{km}^2 + \gamma_m^2$. В случаях однородных материалов данные слагаемые являются корнями независимых трансцендентных уравнений для осевого и радиального направлений. При рассмотрении же задач с ограниченными контактирующими телами, имеющими различные теплофизические характеристики, корни продольных трансцендентных уравнений зависят от величин γ_m , что очевидно из выражения (12). Именно поэтому в нашем решении они имеют двойной индекс km . Происходящее явление можно назвать гибридизацией осевых и радиальных корней. Предположим, что для достижения оптимальной точности решения необходимо ввести в рассмотрение m радиальных членов суммы и k - осевых. Тогда в случае однородного материала нам понадобится решить $m + k$ трансцендентных уравнений. Если же рас-

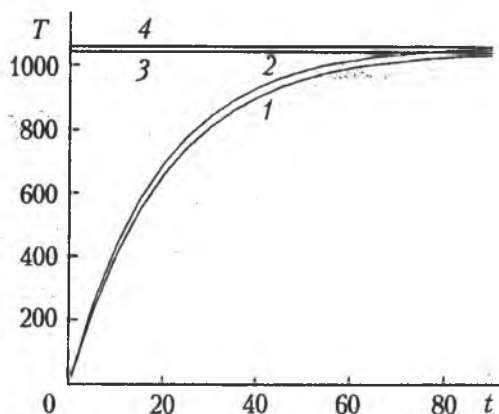


Рис. 1. Изменение температуры в плоскости контакта на поверхности цилиндров в процессе нагрева: 1 - система медь-титан; 2 - сталь-цирконий; 3 и 4 - стационарные температуры, рассчитанные по результатам [9] для этих систем

считается задача для двух разнородных контактирующих тел, это число увеличивается до $m(k+1)$. Анализ уравнения (12) показывает, что причиной такой зависимости является именно различие теплофизических характеристик соприкасающихся объектов. Действительно, если положить $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $a_1 = a_2 = a$, $h_1 = h_2 = h$, $l_1 = 0$, $l_2 = l$, то получим хорошо известное [1, 2, 5] трансцендентное уравнение для ограниченного однородного тела с одинаковыми коэффициентами теплоотдачи на поверхностях $z = 0$ и $z = l$

$$h(\gamma \cos \gamma l + h \sin \gamma l) + \gamma(h \cos \gamma l - \gamma \sin \gamma l) = 0.$$

Вторая особенность полученного решения заключается в наличии в нем точечной единичной функции $\eta(z)$. Математически ее появление предопределено тем, что выражения для температур в пространстве изображений (8) и (9) имеют конечные пределы в точке $z = 0$ при условии $s \rightarrow \infty$:

$\left(\lambda_2 + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \lambda_1\right)^{-1}$ для $\bar{T}_1(\mu_m, z, s)$ и $\left(\lambda_1 + \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \lambda_2\right)^{-1}$ для $\bar{T}_2(\mu_m, z, s)$. Этот эффект отсутствует при рассмотрении контактных одномерных [1, 5] и неограниченных [5-8] задач теплопроводности. Необходимо также отметить, что в стационарном случае решение нашей задачи не имеет никаких особенностей в плоскости контакта и описывается гладкими функциями [9].

В заключение приведем результаты расчетов температурных полей в процессе диффузионной сварки двух различных систем, состоящих из цилиндров с различными теплофизическими характеристиками (медь-титан и сталь-цирконий). С целью большей наглядности сравнения размеры цилиндров и параметры нагрева выбраны идентичными (радиусы и длины цилиндров - по 40 мм, коэффициенты теплоотдачи на всех торцах - 100 Вт/(м²·град), мощность нагрева - 1 кВт/м²). Таким образом, динамика пространственного распределения температуры будет зависеть только от характеристик нагреваемых материалов. В таблице приведены

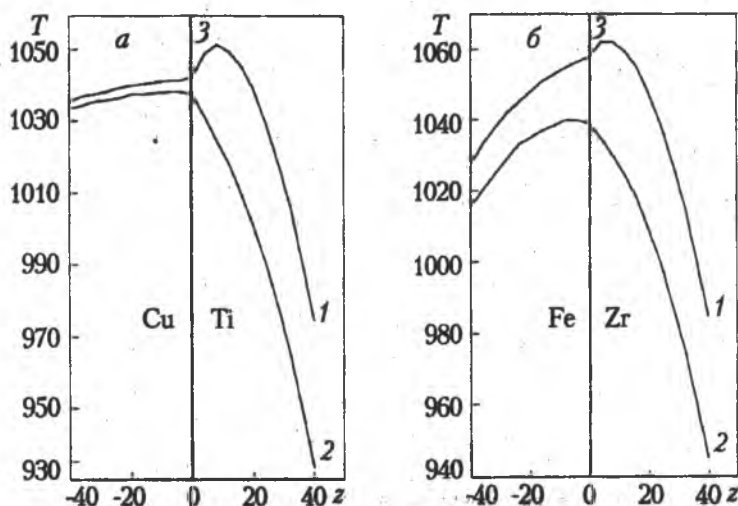


Рис. 2. Осевое распределение температуры в системах медь-титан (а) и сталь-цирконий (б): 1 - вдоль образующей цилиндров; 2 - вдоль центральной оси; 3 - граница плоскости контакта

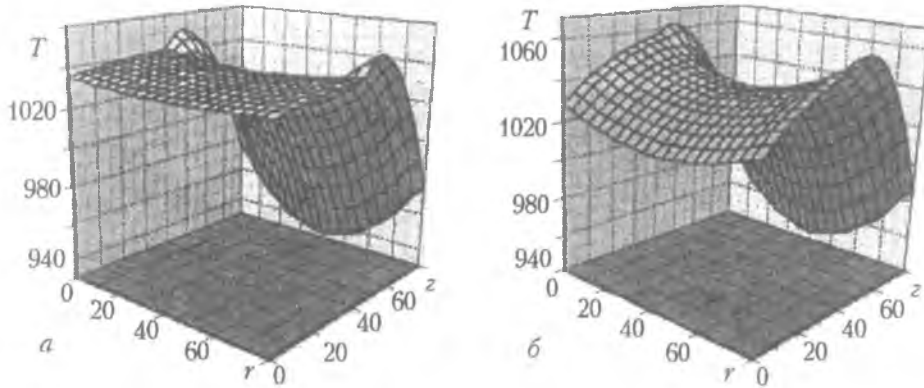


Рис. 3. Пространственное распределение температурного поля в центральной плоскости цилиндров: а – медь-титан; б – сталь-цирконий

первые пять корней уравнения $J_1(\mu) = 0$, которые связаны с величинами γ_m соотношением $\mu_m = \gamma_m R$, и соответствующие им корни трансцендентного уравнения (12) γ_{km} .

Как видно из таблицы, величины γ_{km} действительно сильно зависят как от корней радиального уравнения $J_1(\mu) = 0$ (изменяются с изменением μ_m в пределах одной системы), так и от вида контактирующих материалов (различны для одинаковых μ_m в разных системах).

На рис. 1 представлены графики изменения температуры в плоскости контакта на поверхности цилиндров для обеих систем. На нем же приведены величины температуры в стационарном состоянии при аналогичных условиях нагрева и теплоотдачи, рассчитанные по результатам [9]. Как следует из графиков, результаты расчетов (уровень выхода на стационарный режим) согласуются с удовлетворительной степенью точности.

Почти совпадающие кривые изменения температуры на рис. 1 могут привести к выводу о том, что при одинаковых условиях теплообмена распределение температурного поля в различных системах находится в слабой зависимости от их ТФХ. Но это не совсем так. На рис. 2 приведено продольное распределение температуры на поверхности соприкасающихся цилиндров и вдоль их центральной оси в состоянии, близком к стационарному. На поверхности максимум смещен от границы раздела (плоскости симметрии систем) в сторону материала с меньшим коэффициентом температуропроводности a (титана или циркония). На центральной оси сразу же за плоскостью контакта температура быстро падает в этом же направлении. Эти эффекты характерны для обеих систем, но в случае меди и титана они выражены гораздо ярче. Можно отметить также незначительное изменение температуры от поверхности к центру для медного цилиндра. Различие в характере температурных полей более отчетливо заметно на рис. 3, где приведено их пространственное распределение в центральных плоскостях цилиндров. Наблюдается снижение температуры к центральной оси и торцевым поверхностям, которое соответствует граничным условиям (3) (боковой нагрев) и (2) (теплоотдача через торцы). Но различие в поведении температурной функции для разных материалов весьма существенно. Особенно это касается меди, величина нагрева которой практически постоянна по всему объему. Это связано с тепловыми свойствами исследуемых материалов, которые изменяются в достаточно больших пределах. Например, коэффициенты температуропроводности в системе сталь-цирконий достаточ-

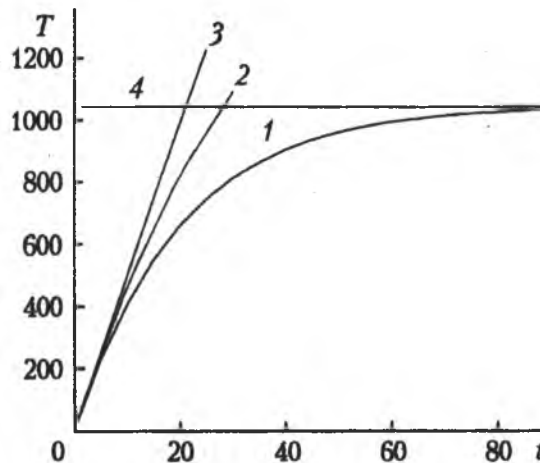


Рис. 4. Скорость изменения температуры в плоскости контакта в зависимости от величины коэффициента теплоотдачи для системы медь-титан: 1 – $\alpha = 100$ Вт/(м²·°С); 2 – 50; 3 – 5; 4 – стационарная температура, рассчитанная по результатам [9]

но близки ($a_1/a_2 \approx 1.8$), а для меди и титана они отличаются более чем в десять раз ($a_1/a_2 \approx 12.6$). Этим и объясняется различный вид температурного поля на рис. 3.

Большой практический интерес представляет такой параметр, как время выхода процесса на стационарный режим. Из рис. 1 следует, что этот период весьма значителен (около одного часа). В то же время, как показывает практика, стационарное состояние достигается гораздо быстрее. Это можно объяснить тем, что при нагреве в вакууме основным механизмом теплоотвода является излучение, и в начале процесса коэффициент теплоотдачи α принимает небольшие значения в силу того, что температура нагреваемых тел незначительно отличается от температуры окружающей среды. При этом температура системы будет возрастать гораздо быстрее. На рис. 4 представлено ее изменение при различных величинах α . Видно, что при малом коэффициенте теплоотдачи, характерном для начала процесса, рабочий режим достигается буквально через несколько минут. Этот результат находится в хорошем соответствии с практическими данными.

Таким образом, полученное аналитическое решение поставленной задачи позволяет адекватно описывать пространственное распределение температурного поля и его динамику в системе ограниченных разнородных тел при постоянном коэффициенте теплоотдачи и производить достаточно точную оценку процесса нагрева с учетом изменения граничных условий.

Обозначения

R – радиус цилиндров, м; l_1, l_2 – длины цилиндров, м; Q_R – поверхностная мощность теплового потока, Вт/м²; α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи, Вт/(м²·°C); a_1, a_2 – коэффициенты температуропроводности, м²/с; λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности, Вт/(м·°C); h_1, h_2 – приведенные коэффициенты теплоотдачи, м⁻¹; T_1, T_2 – температуры цилиндров, °C; $\bar{T}_1, \bar{T}_2$ – температуры цилиндров в области изображений, °C·м²·с; J_0 и J_1 – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков; γ_{km} – корни трансцендентного уравнения (12); s – параметр преобразования Лапласа; t – время, с; z, τ – переменные интегрирования. Индексы 1 и 2 относятся к первому и второму цилиндрам соответственно.

Литература

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., 1964.
2. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности. М., 1985.
3. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М., 1949.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М., 1969.
5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., 1961.
6. Ковалов В. П. Двумерные нестационарные осесимметричные задачи теплопроводности. Мясск., 1986.
7. Мандрик П. А., Ковалов В. П. // ИФЖ. 2001. Т. 74, № 2. С. 157–163.
8. Мандрик П. А. // ИФЖ. 2001. Т. 74, № 5. С. 153–159.
9. Алифанов А. В., Голуб В. М. // ИФЖ. 2003. Т. 76, № 1. С. 173–177.