УДК 517.95

М. Т. Стэльмашук, *кандыдат фізіка–матэматычных навук, прафесар кафедры матэматычнага аналізу БДПУ;*

У. А. Шылінец, *кандыдат фізіка–матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматыкі БДПУ;*

Г. А. Андрэева, *студэнтка 5 курса фізічнага факультэта БДПУ*

АБ КРАЯВОЙ ЗАДАЧЫ ДЛЯ ФУНКЦЫЯНАЛЬНО-ІНВАРЫЯНТНЫХ ВЕКТАР-АНАЛІТЫЧНЫХ ФУНКЦЫЙ

Уводзіны. Функцыянальна-інварыянтныя рашэнні некаторых раўнанняў матэматычнай фізікі даследаваліся аўтарамі [1–14].

Як вядома [1–6], функцыянальна-інварыянтным рашэннем раўнання

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

называецца такое рашэнне $u=u(x,y)$, калі адвольная двойчы дыферэнцавальная функцыя $F(u)$ таксама з’яўляецца рашэннем гэтага раўнання.

Мэта дадзенага артыкула – рашэнне краявой задачы для аднаго класса функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый.

Асноўная частка. Нам спатрэбяцца некаторыя азначэнні.

Азначэнне 1. Будзем называць вектар-функцыю $\overline{\sigma}=\{u,v,w\}$ (u,v,w – камплексназначныя двойчы непарыўна дыферэнцавальныя функцыі ад каардынат x,y,z у некаторым абсягу G) вектар-аналітычнай [11–15], калі

$$div\overline{\sigma}=0, rot\overline{\sigma}=0. \qquad (1)$$

Калі вектар-аналітычнай з’яўляецца вектар-функцыя $\overline{\sigma}=\{u,v,w\}$,то вектар-аналітычнай будзем называць і гіперкамплексную функцыю $\sigma=u\varepsilon_1+v\varepsilon_2+w\varepsilon_3$, дзе $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – база якой-небудзь лінейнай асацыятыўна-камутатыўнай алгебры з адзінкай над полем камплексных лікаў.

Сістэма (1) з'яўляецца некаторым абагульненнем вядомай сістэмы Кашы-Рымана на трохмерную прастору і прыватным стацыянарным выпадкам сістэмы Максвэла для электрамагнітнага поля ў пустаце

$$div(\overline{E} + i\overline{H}) = 0, rot(\overline{E} + i\overline{H}) = \frac{i}{c}\frac{\partial(\overline{E} + i\overline{H})}{\partial t}, i^2 = -1, c = const,$$

калі меркаваць, што ў гэтай сістэме $\overline{E} + i\overline{H} = \overline{\sigma} = \{u, v, w\}$, дзе $u = u(x, y, z)$ і г. д.

Азначэнне 2. Гіперкамплексная функцыя $f = p(x, y, z)\varepsilon_1 + q(x, y, z)\varepsilon_2 + s(x, y, z)\varepsilon_3$ называецца манагеннай у сэнсе У.С. Фёдарава (F-манагеннай) [16] па другой гіперкамплекснай функцыі $\sigma = u\varepsilon_1 + v\varepsilon_2 + w\varepsilon_3$ у некаторым абсягу G, калі знойдзецца такая функцыя $\Psi = P(x, y, z)\varepsilon_1 + Q(x, y, z)\varepsilon_2 + R(x, y, z)\varepsilon_3$, што для ўсякіх пунктаў абсягу G маем

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \Psi \frac{\partial \sigma}{\partial x_k}, \tag{2}$$

дзе $k = 1,2,3; x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$.

Вядома, што сума, здабытак, дзель манагенных па σ функцый, а таксама функцыя, аналітычная ад σ, будуць манагеннымі па σ (калі, безумоўна, адзначаная дзель функцый існуе) [16] .

Азначэнне 3. Вектар-аналітычная функцыя $\sigma = u\varepsilon_1 + v\varepsilon_2 + w\varepsilon_3$ называецца функцыянальна-інварыянтнай, калі ўсякая функцыя f, манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава па σ, будучы запісанай у выглядзе $f = p\varepsilon_1 + q\varepsilon_2 + s\varepsilon_3$, таксама вызначае вектар-аналітычную функцыю $\bar{f} = \{p, q, s\}$, гэта значыць $div\,\bar{f} = 0, rot\,\bar{f} = 0$.

У дадзенай працы мы абмяжуемся выпадкам такой алгебры, у якой $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \lambda, \varepsilon_3 = \lambda^2$, прычым $\lambda^3 = 1$.

У працы [8] даказана, што функцыя

$$\sigma = u(x,y,z) + \lambda v(x,y,z) + \lambda^2 w(x,y,z) \ (\lambda^3 = 1) \tag{3}$$

будзе функцыянальна-інварыянтнай вектар-аналітычнай функцыяй у абсягу G, калі

$$\left.\begin{aligned} u &= \Gamma_1 - v - w, \\ v &= \frac{i}{\sqrt{3}}(\gamma\, h(\tau) - \bar{\gamma}\, H(\bar{\tau})), \\ w &= \frac{i}{\sqrt{3}}(h(\tau) - H(\bar{\tau})), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

дзе $\gamma = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}); h(\tau)\,(H(\bar{\tau}))$ – адвольная аналітычная функцыя камплекснай зменнай $\tau = \tau_1 + i\tau_2\ (\bar{\tau} = \tau_1 - i\tau_2)$; $\tau_1 = x + \beta_1 y + \gamma_1 z$, $\tau_2 = \beta_2 y + \gamma_2 z$, $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\gamma_1 = -\frac{1}{2}$, $\gamma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\Gamma_1 = const$.

Пры гэтым кожная функцыя f, F-манагенная па σ, таксама з'яўляецца функцыянальна-інварыянтнай вектар-аналітычнай функцыяй.

Разгледзім наступную краявую задачу.

Задача. Няхай ∂G – некаторая замкнутая двухмерная паверхня, гомеаморфная сферы канечнага дыяметра і дастаткова гладкая для магчымасці скарыстать формулу Астраградскага (G – унутранасць паверхні ∂G).

Патрабуецца знайсці ў любым пункце $M(x,y,z) \in G$ значэнні функцый u, v, w, якія вызначаюцца роўнасцямі (4), калі вядомы значэнні гэтых функцый на паверхні ∂G.

Для рашэння сфармуляванай задачы выкарыстоўваем інтэгральнае выяўленне У.С. Фёдарава [16].Калі

1) функцыя f – манагеннаяў сэнсе У.С. Фёдарава па ζ у абсягу $D \supset G \cup \partial G$;

$$2)\ \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\zeta(N)}{\partial\xi_k}\right)^2=0,\ \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\zeta(N)}{\partial\xi_k^2}=0\quad (N(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in D),\tag{5}$$

то для кожнага пункта $M(x,y,z)\in G\quad (x=x_1, y=x_2, z=x_3)$ маем

$$f(M)=\frac{1}{\omega_n\zeta_1(M)}\int_{\partial G}\sum_{j=1}^{n}\left\{\alpha_j\left(\zeta_j\Psi^1+\zeta_1\Psi^j\right)-\alpha_1\zeta_j\Psi^j\right\}fdS,\tag{6}$$

дзе $\omega_n=\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, $n=3$, пад знакам інтэграла $f=f(\mu)$, пункт $\mu(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\in\partial G$,

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ – кіроўныя косінусы вонкавай нармалі да ∂G,

$\zeta_j=\dfrac{\partial\zeta(\mu)}{\partial\mu_j}$, $\Psi^j=\dfrac{\mu_j-x_j}{r^3}\ (j=1,2,3)$, $r=\sqrt{(\mu_1-x_1)^2+(\mu_2-x_2)^2+(\mu_3-x_3)^2}$.

Магчыма праверыць, што функцыя

$$\zeta^1\equiv\tau=x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$$

$$\left(\zeta^2\equiv\bar{\tau}=x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z-i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\right)$$

задавальняюць ўмовам Фёдарава (5). Скарыстаўшы інтэгральнае выяўленне (6), атрымаем наступныя інтэгральныя выяўленні для фунцый h і H:

$$h(M)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial G}\left\{\alpha_1\Psi^1+\alpha_2\Psi^2+\alpha_3\Psi^3-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(\alpha_2\Psi^1-\alpha_1\Psi^2\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(\alpha_3\Psi^1-\alpha_1\Psi^3\right)\right\}hdS,\tag{7}$$

$$H(M)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial G}\left\{\alpha_1\Psi^1+\alpha_2\Psi^2+\alpha_3\Psi^3-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(\alpha_2\Psi^1-\alpha_1\Psi^2\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(\alpha_3\Psi^1-\alpha_1\Psi^3\right)\right\}HdS.\tag{8}$$

Заключэнне. Такім чынам, падставіўшы атрыманыя з формул (7) і (8) функцыі $h(M), H(M)$ у роўнасці (4), атрымаем рашэнне сфармуляванай краявой задачы.

ЛІТАРАТУРА

1. Соболев, С.А. Функционально-инвариантные решения волнового уравнения / С.А. Соболев // Труды физ.-мат. института АН СССР.–1934.– Вып. 5.– С. 117-128.
2. Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов.– М.:ГИТТЛ, 1953.– Т. 3.– Ч. 2.– С. 196-204.
3. Еругин, Н.П. О функционально-инвариантных решениях / Н.П. Еругин // Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук.–1948.– Вып. 15.–С. 101-134.
4. Еругин, Н.П. Функционально-инвариантные решения уравнений гиперболического типа с двумя неизвестнымипеременными / Н.П. Еругин // Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук.–1949.– Вып. 16.–С. 142-166.
5. Смирнов, М.М. Функционально-инвариантные решения волнового уравнения / М.М. Смирнов // Доклады АН СССР.–1949.–Т. 67.– № 6.– С. 977-980.
6. Кошляков, Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов.– М.:ГИФМЛ, 1962.– С. 128-139.
7. Стельмашук, Н.Т. об одном исследовании системы Максвелла с помощью F-моногенных функций / Н.Т. Стельмашук // Журнал выч. матем. и матем. физики.–1967.– Т. 7.– № 2.– С. 431-436.
8. Стельмашук, Н.Т. О функционально-инвариантных решениях некоторых систем уравнений математической физики / Н.Т. Стельмашук // Rev. Roum. de Math. Pur. et Appl.–1968.– Т. 13.– № 9.– P. 1455-1459.
9. Стельмашук. Н.Т. Построение функционально-инвариантных решений системы Максвелла для электромагнитного поля в пустоте / Н.Т. Стельмашук // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.–1974.– № 4.– С. 35-39.
10. Пенчанский, С.Б. О функционально-инвариантных решениях одной системы дифференциальных уравнений в частных производных / С.Б.

Пенчанский // Дифференциальные уравнения.–1985.– Т. 21.– № 8.– С. 1449-1450.

11. Стельмашук, Н.Т. Об интегральном представлении функционально-инвариантных вектор-аналитических функций / Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.–2006.– № 1.– С. 44-47.
12. Стэльмашук, М.Т. Аб краявой задачы для функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый / М.Т. Стэльмашук, У.А. Шылінец // Весці БДПУ.–1995.– № 1.– С. 85-88.
13. Стельмашук, Н.Т. Об интегральном представлении функционально-инвариантных вектор-аналитических функций / Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи.– Самара: СамГТУ, 2007.– С. 172-174.
14. Стэльмашук, М.Т. Рашэнне краявой задачы для аднаго класа функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый / М.Т. Стэльмашук, У.А. Шылінец, Т.Л. Струнеўская // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2007.– № 1.– С. 23-26.
15. Reinich, G.Y. Analitic functions and math. physics / G.Y. Reinich // Bull. Amer. Math. Soc.–1931.– Vol. 37.– P. 689-714.
16. Федоров, В.С. Основные свойства обобщенных моногенных функций / В.С. Федоров // Известия вузов. Математика.–1958.– № 6.– С. 257-265.
17. Федоров, В.С. Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве / В.С. Федоров // Известия вузов. Математика.–1957.– № 1.– С. 227-233.

УДК 517.95

Стэльмашук М.Т., Шылінец У.А., Андрэева Г.А. **Аб краявой задачы для функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый // Весці БДПУ. Серыя 3. 2010. № 2. – С. 17-19.**

Пры дапамозе інтэгральнага выяўлення У.С. Фёдарава атрымана рашэнне краявой задачы для функцыянальна-інварыянтных вектар-аналітычных функцый.

Бібліягр.– 17 назваў.

SUMMARY

Solution of boundary value problem for functionally-invariant vector-analitic functions is obtained.