В.А. Шилинец, *доцент кафедры математики БГПУ*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

График функции дает наглядное представление о ее свойствах. Отсюда следует большое образовательное и практическое значение графиков при обучении математике в средней школе. Свободное владение техникой построения графиков часто помогает решать многие задачи, и порой является единственным средством их решения. Кроме того, умение строить графики функций представляет большой самостоятельный интерес.

Предлагаемая вашему вниманию статья и посвящена вопросу использования графического метода при решении уравнений и неравенств с параметрами.

Графическая иллюстрация часто помогает дать некоторые качественные ответы – найти, например, число корней уравнения, грубо указать на числовой оси, где они могут находиться, и т.п. даже в том случае, когда дать для них точную формулу трудно или вообще невозможно. Применение графиков во многих случаях облегчает решение уравнений и неравенств, обеспечивает наглядность, сознательность и прочность усвоения материала, а также является хорошим средством для предупреждения формализма в знаниях учащихся.

Напомним идею графического метода.

Рассмотрим уравнение с одним неизвестным $f_1(x) = f_2(x)$. Построим в одной и той же прямоугольной декартовой системе координат графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Точки пересечения графиков этих функций соответствуют тем значениям аргумента x, при которых совпадают значения функций, т.е. решениям (корням) уравнения.

Таким образом, абсциссы точек пересечения графиков функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ являются корнями уравнения $f_1(x) = f_2(x)$.

Для эффективного использования графического метода необходимо знать основные элементарные функции, их свойства и графики, владеть основными методами построения графиков, опирающимися на простейшие приемы. Вспомним простейшие преобразования графиков функций.

Пусть $y = f(x)$ – одна из основных функций, и ее график построен.

Под преобразованием графика функции $y = f(x)$ будем подразумевать построение графика функции

а) $y = f(x)+c$, $y = f(x+c)$, б) $y = -f(x)$, $y = f(-x)$,

в) $y = k\,f(x)$, $y = f(k\,x)$, г) $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = |f(|x|)|$

на основе уже имеющегося (построенного) графика функции $y = f(x)$.

1. Чтобы построить график функции $y = f(x) + c$, где $c = const$, можно:

а) график функции $y = f(x)$ сдвинуть вдоль оси Oy на $|c|$ единиц масштаба в сторону, совпадающую со знаком c;

б) перенести параллельно ось Ox на $|c|$ единиц масштаба в сторону, противоположную знаку c.

2. Чтобы построить график функции $y = f(x + c)$, где $c = const$, можно:

а) график функции $y = f(x)$ сдвинуть вдоль оси Ox на $|c|$ единиц масштаба в сторону, противоположную знаку c;

б) перенести параллельно ось Oy на $|c|$ единиц масштаба в сторону, совпадающую со знаком c.

3. График функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси Ox.

4. График функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси Oy.

5. График функции $y = k\,f(x)$ ($k > 0$) получается из графика функции $y = f(x)$ «растяжением» от оси Ox в k раз при $k > 1$ и «сжатием» к оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз при $0 < k < 1$.

6. График функции $y = f(kx)$ ($k > 0$) получается из графика функции $y = f(x)$ «сжатием» к оси Oy в k раз при $k > 1$ и «растяжением» от оси Oy в $\frac{1}{k}$ раз при $0 < k < 1$.

7. График функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: для $x \ge 0$ сохраняется график функции $y = f(x)$, затем эта оставленная часть графика отображается симметрично относительно оси Oy, определяя график функции для $x \le 0$.

8. График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика функции $y = f(x)$, лежащая над осью Ox или на оси Ox, остается без изменения; часть графика, лежащая под осью Ox, симметрично отображается относительно оси Ox.

9. $y = |f(|x|)|$. Данную функцию можно рассматривать как совокупность двух функций

$$y = \left[\begin{array}{l} f(|x|), \text{ где } f(|x|) \ge 0, \\ -f(|x|), \text{ где } f(|x|) < 0. \end{array}\right.$$

Чтобы построить график функции $y = \left| f(|x|) \right|$, достаточно построить график функции $y = f(|x|)$, и ту часть графика, которая расположена в нижней полуплоскости, симметрично отобразить относительно оси Ox.

Весьма эффективен графический метод решения задач, содержащих модули. В таких задачах присутствуют выражения вида $y = |x|$, $y = |x| + a$, $y = |x + a|$, $|y| = x$, $|y| = x + a$, $|y| = |x|$. Графики этих выражений представляют собой или отдельные «уголки» с вершиной на одной из координатных осей или совокупности «уголков», вершины которых находятся на обеих координатных осях. Во всех случаях можно найти прямоугольные треугольники, образованные частями указанных графиков с осями Ox и Oy. Это дает возможность найти координаты точек, рассматривая прямоугольные равнобедренные треугольники. Такой подход – лучшая иллюстрация соединения алгебры с геометрией.

При решении других задач с параметрами также удобно пользоваться геометрическими интерпретациями. Бывает удобно изображать графики функций, входящих в левые и правые части рассматриваемых уравнений (неравенств). При решении систем уравнений или неравенств, аналогично, можно изображать геометрические места точек плоскости, удовлетворяющих рассматриваемым уравнениям или неравенствам. Это зачастую позволяет существенно упростить анализ задач, а в ряде случаев представляет собой единственный «ключ» к решению. Решение задачи становится наглядным и гораздо более «прозрачным».

Покажем на примерах целесообразность применения графиков при решении уравнений и неравенств.

Пример 1. Решите уравнение $|x - a| = |x - 6|$ [1].

Решение. Строим графики функций $y = |x - a|$ и $y = |x - 6|$ (рис. 1).

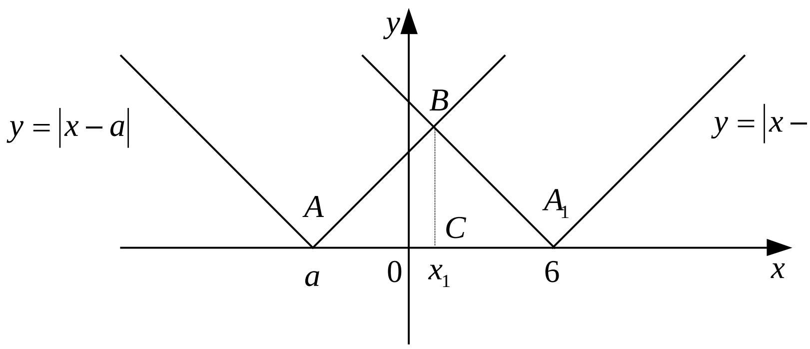

Рисунок 1

На плоскости xOy начнем двигать вдоль оси Ox слева направо «угол» $y = |x - a|$. Возможны два случая: а) построенные графики совпадают; б) не совпадают.

Пусть графики функций $y=|x-a|$ и $y=|x-6|$ совпадают. Это означает, что $a=6$, и решением уравнения служит вся числовая ось, т.е. $x\in(-\infty;+\infty)$.

Пусть графики функций $y=|x-a|$ и $y=|x-6|$ не совпадают. Рассмотрим треугольник ABA_1. Он прямоугольный равнобедренный, поэтому точка C – середина отрезка AA_1. Абсцисса x_1 точки C вычисляется по формуле: $x_1=\dfrac{a+6}{2}$.

Ответ. Если $a=6$, то $x\in(-\infty;+\infty)$; если $a\neq 6$, то $x=\dfrac{a+6}{2}$.

Пример 2. При каких значениях параметра m уравнение $|x^2-6x|=m$ имеет ровно три решения?

Решение. Построим график функции $y=|x^2-6x|$ (рис. 2).

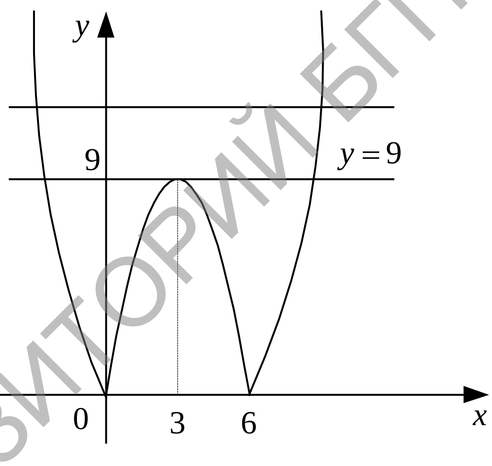

Рисунок 2

Проводим горизонтали $y=m$ при различных значениях m. Получаем, что при $m=9$ горизонталь $y=9$ пересекает график функции $y=|x^2-6x|$ в трех точках.

Ответ. $m=9$.

Пример 3. При каких значениях параметра a сумма целых корней уравнения $|x-5|+|x-8|=a$ равна 26?

Решение. Построим график функции $y=|x-5|+|x-8|$. Для этого запишем функцию по-другому $y=\begin{cases}-2x+13, \text{ если } x<5,\\ 3, \text{ если } 5\le x<8,\\ 2x-13, \text{ если } x\ge 8.\end{cases}$

Результат построения графика изображен на рисунке 3.

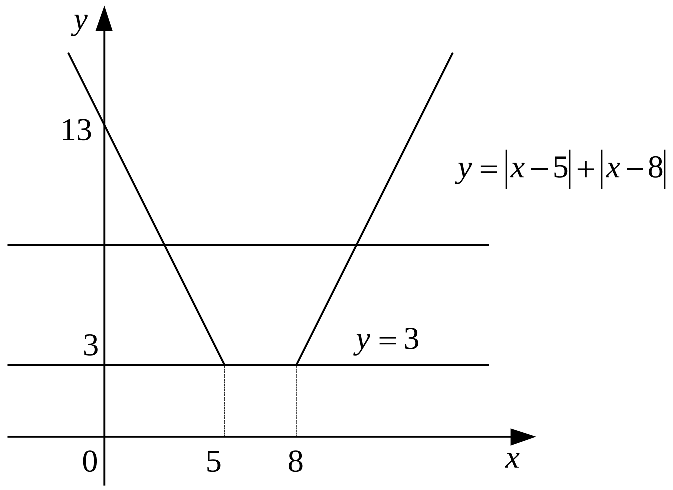

Рисунок 3

Проводим горизонтали $y = a$ при различных значениях a.

При $a = 3$ получим, что уравнение $|x-5|+|x-8|=3$ имеет решения $x \in [5;8]$. Целые значения x этого отрезка: $x = 5$, $x = 6$, $x = 7$, $x = 8$, их сумма равна 26.

Если $a > 3$, то прямая $y = a$ пересекает график функции в двух точках, симметричных относительно прямой $x = 6{,}5$. Для одной из них (с абсциссой x_1) выполняется соотношение $y_1 = -2x_1 + 13$, для другой (с абсциссой x_2) – соотношение $y_2 = 2x_2 - 13$. Но $y_1 = y_2$, $-2x_1 + 13 = 2x_2 - 13$, $x_1 + x_2 = 13$, то есть при любом $a > 3$ сумма решений уравнения всегда будет равна 13. Значит, подходит только $a = 3$.

Ответ. $a = 3$.

Пример 4. (XIX Межрегиональная олимпиада школьников России по математике и криптографии.) Найдите число решений системы уравнений

$$\begin{cases} x + |y| = 1, \\ y + a|x| = 2 \end{cases}$$

при всех возможных значениях параметра a.

Решение. Приведем геометрическое решение данной задачи.

1. Рассмотрим графики уравнений исходной системы при $a > 0$ (рис. 4).

Отсюда видно, что при $a > 0$ система может иметь одно, два, три или четыре решения.

Ровно три решения система имеет при тех $a > 0$, при которых луч $y = 2 - ax, x > 0,$ проходит через точку $B(1;0)$, то есть при $a = 2$.

При $a > 2$ луч $y = 2 - ax, x > 0,$ пересекает линию $|y| = 1 - x$ в двух точках. Поэтому в данном случае система имеет ровно четыре решения.

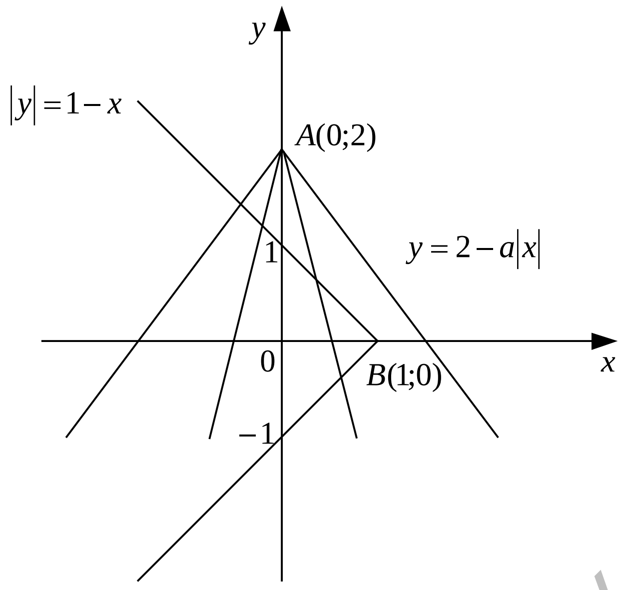

Рисунок 4

При $0<a<2$ луч $y=2-ax, x>0$, не пересекает линию $|y|=1-x$. Поэтому в данном случае система имеет одно или два решения. Два решения получаются пересечением луча $y=2-a|x|, x<0$, и линии $|y|=1-x$ в двух точках. Это может быть, если луч $y=2-a|x|, x<0$, имеет угловой коэффициент (который равен a) больший, чем 1.

Итак, при $1<a<2$ система имеет ровно два решения. Если же $0<a\le 1$, то система имеет одно решение.

2. Рассмотрим графики уравнений исходной системы при $a<0$ (рис. 5).

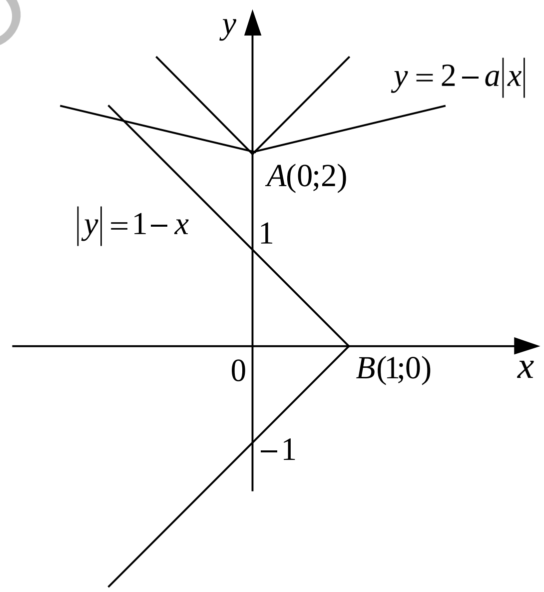

Рисунок 5

Отсюда видно, что при $a<0$ система может не иметь решения или иметь одно решение.

Система не имеет решений при тех $a<0$, при которых луч $y=2-a|x|, x<0,$ не пересекает линию $|y|=1-x$, то есть при $a\le -1$.

При $-1<a<0$ луч $y=2-a|x|, x<0,$ пересекает линию $|y|=1-x$ ровно в одной точке. Поэтому в данном случае система имеет ровно одно решение.

3. При $a=0$ система, очевидно, имеет ровно одно решение, а именно $(-1;2)$.

Ответ. При $a\le -1$ – нет решений; при $-1<a\le 1$ – одно решение; при $1<a<2$ – два решения; при $a=2$ – три решения; при $a>2$ – четыре решения.

Пример 5. При каждом значении параметра b решите уравнение $|x-3|+|x+13|=2x+b$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $f(x)=2x+b$, где

$f(x)=|x-3|+|x+13|=\begin{cases}2x+10, x\ge 3,\\ 16, -13<x<3,\\ -2x-10, x\le -13,\end{cases}$ и решим его, используя график кусочно-линейной функции $y=f(x)$ (рис. 6).

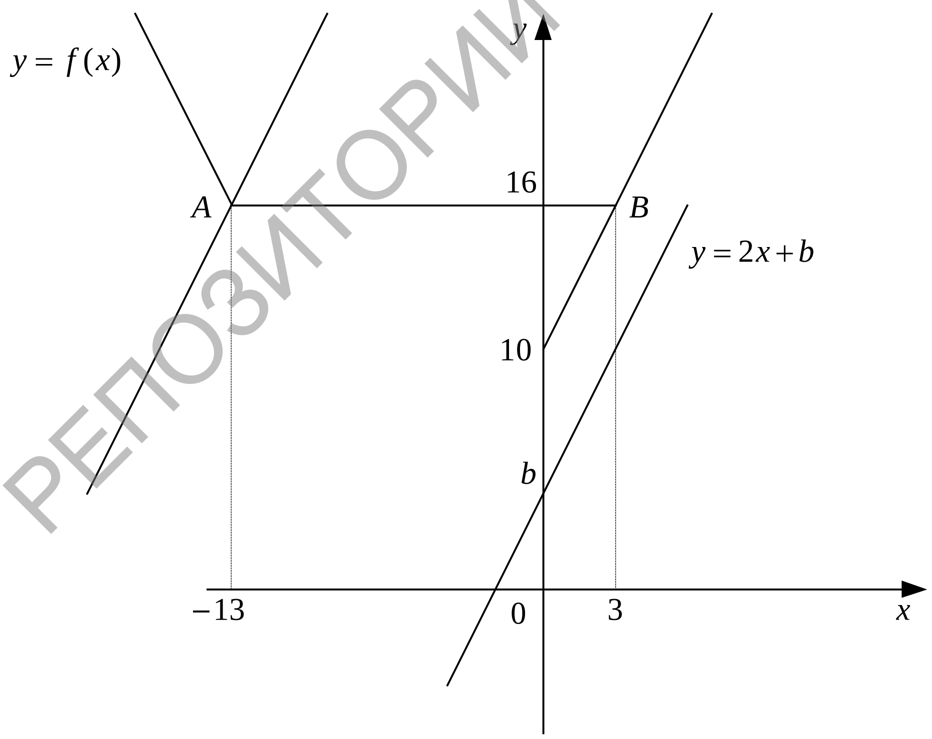

Рисунок 6

На этом графике точки излома имеют координаты $A(-13;16), B(3;16)$. Найдем значения параметра b в уравнениях прямых $y=2x+b$, проходящих через эти точки:

$$16=2\cdot(-13)+b, \text{ откуда } b=42;\ 16=2\cdot 3+b, \text{ откуда } b=10.$$

Таким образом, имеем: при $b<10$ $x\in\varnothing$; при $b=10$ $x\geq 3$; при $10<b<42$ $2x+b=16$, $x=\dfrac{16-b}{2}$; при $b\geq 42$ $2x+b=-2x-10$, $x=-\dfrac{b+10}{4}$.

Ответ. Если $b\in(-\infty;10)$, то $x\in\varnothing$; если $b=10$, то $x\in[3;+\infty)$; если $b\in(10;42)$, то $x=\dfrac{16-b}{2}$; если $b\in[42;+\infty)$, то $x=-\dfrac{b+10}{4}$.

Пример 6. Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения

$$|x+2|+1=a-2x.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде $a=|x+2|+2x+1$.

Для решения задачи определим количество точек пересечения графика функции $y=|x+2|+2x+1$ и прямой $y=a$. Построим график функции $y=|x+2|+2x+1$, который состоит из двух частей: при $x\geq -2$ $y=3x+3$; при $x<-2$ $y=x-1$ (рис. 7).

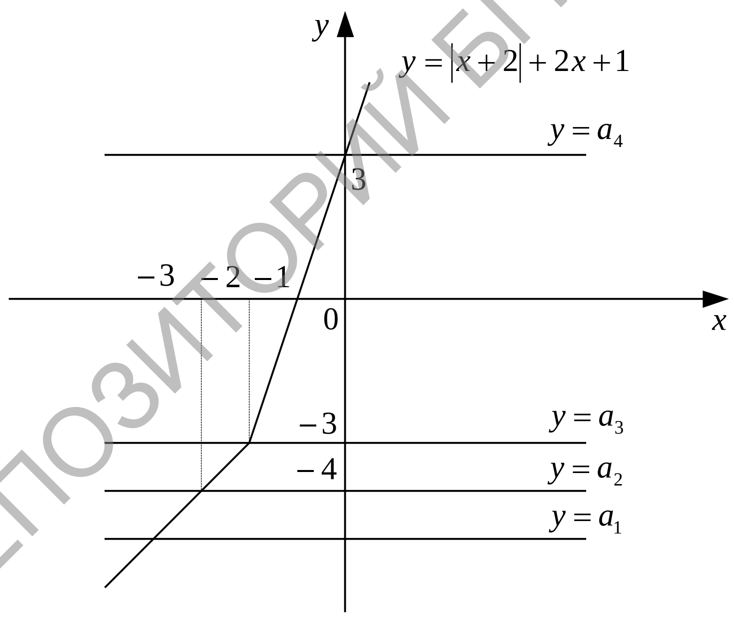

Рисунок 7

Из рисунка видно, что при любом значении параметра a исходное уравнение имеет один корень.

Ответ. При любом значении параметра a уравнение имеет один корень.

Пример 7. Найдите все значения k, при которых прямая $y=kx$ пересекает в трех различных точках ломаную, заданную условием $y=\begin{cases}2x+4, \text{ если } x<-3,\\ -2, \text{ если } -3\leq x\leq 3,\\ 2x-8, \text{ если } x>3.\end{cases}$

Решение. Построим ломаную (рис. 8), заданную условием $y = \begin{cases} 2x+4, \text{ если } x < -3, \\ -2, \text{ если } -3 \le x \le 3, \\ 2x-8, \text{ если } x > 3. \end{cases}$

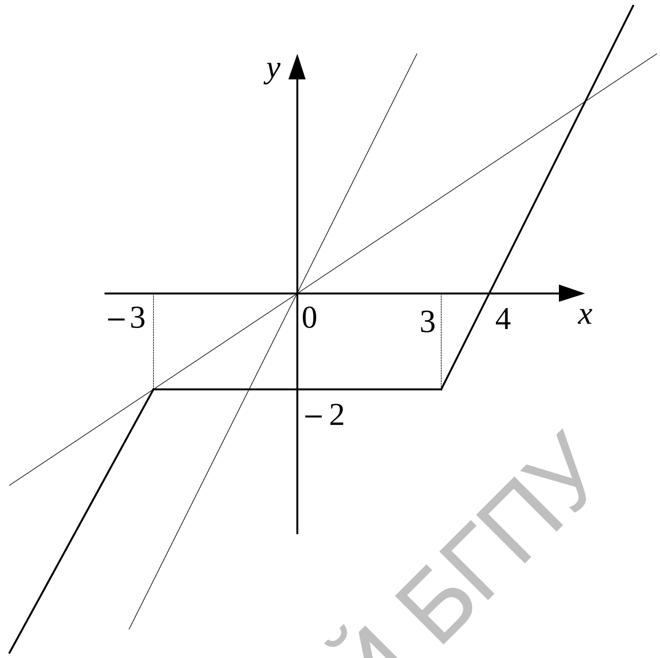

Рисунок 8

Прямая $y = kx$ пересекает в трех различных точках эту ломаную, если ее угловой коэффициент больше углового коэффициента прямой, проходящей через точку $(-3;-2)$, и меньше углового коэффициента прямой, параллельной прямым $y = 2x - 8$ и $y = 2x + 4$,

Найдем угловой коэффициент прямой, проходящей через точку $(-3;-2)$: $-2 = -3k$, $k = \frac{2}{3}$.

Угловой коэффициент k прямой, параллельной прямой $y = 2x - 8$, равен 2. Прямая $y = kx$ имеет с ломаной три общие точки при $\frac{2}{3} < k < 2$.

Ответ. $k \in \left(\frac{2}{3};2\right)$.

Пример 8. При каких условиях уравнение $\left|3 - |x-2|\right| = 0$ имеет четыре корня [2]?

Решение. Рассмотрим два промежутка:

1) $(-\infty;2)$. На этом промежутке $\left|3 - |x-2|\right| = |x+1|$.

2) $[2;+\infty)$. На этом промежутке $\left|3 - |x-2|\right| = |5-x|$.

Построим графики функций $y = |x+1|, x \in (-\infty;2)$, и $y = |5-x|, x \in [2;+\infty)$. В совокупности эти два графика дадут график функции $y = \left|3 - |x-2|\right|$ (рис. 9).

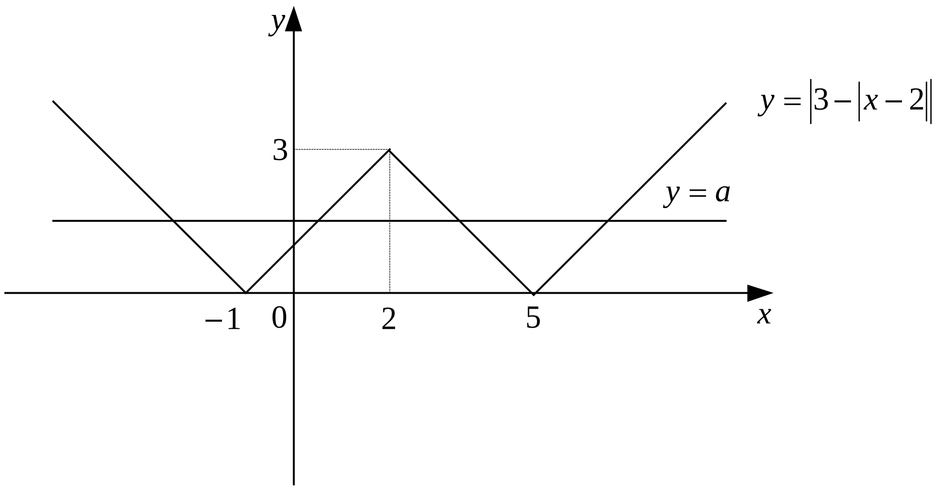

Рисунок 9

Исходное уравнение имеет четыре корня, если графики функций $y = \left|3 - |x-2|\right|$ и $y = a$ имеют четыре общие точки. Очевидно, $0 < a < 3$.

Ответ. $0 < a < 3$.

Пример 9. При каких условиях система уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ имеет четыре корня [2]?

Решение. Построим график уравнения $|x| + |y| = 4$ (рис. 10).

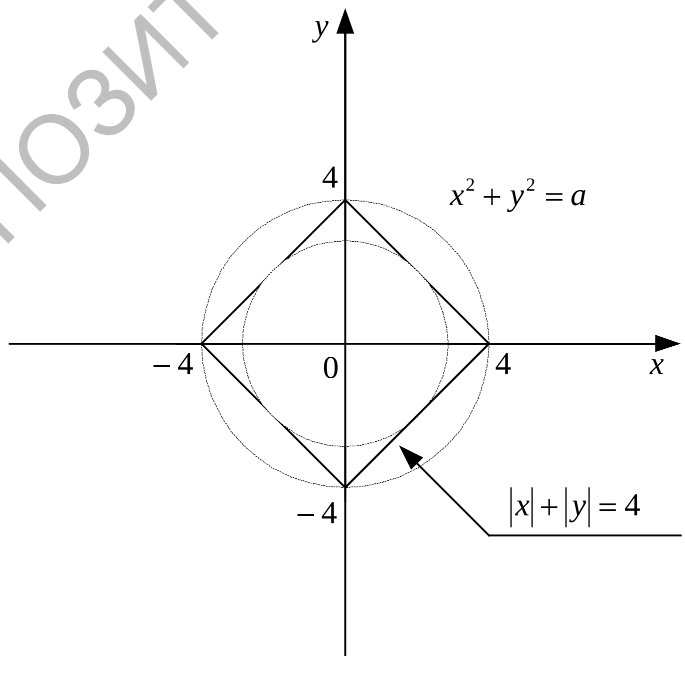

Рисунок 10

При построении этого графика надо использовать тот факт, что оси Ox и Oy являются осями симметрии, так как переменные x и y стоят под знаком модуля. Следовательно, достаточно построить часть графика в первой четверти координатной плоскости, а затем воспользоваться симметричностью.

В результате получим, что квадрат со стороной $4\sqrt{2}$ является графиком уравнения $|x|+|y|=4$ (рис. 10).

Графиком уравнения $x^2+y^2=a$ является окружность с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{a}$.

Исходная система уравнений имеет четыре решения, если графики уравнений $|x|+|y|=4$ и $x^2+y^2=a$ имеют четыре общие точки: 1) $\sqrt{a}=4, a=16$ (окружность описана около квадрата); 2) $\sqrt{a}=2\sqrt{2}, a=8$ (окружность вписана в квадрат).

Ответ. 8 или 16.

Пример 10. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\cos x-2\sqrt{x^2+9}\le-\frac{x^2+9}{a+\cos x}-a$$

имеет единственное решение [3].

Решение. Перенесем выражение, стоящее в правой части, в левую:

$$\cos x-2\sqrt{x^2+9}+\frac{x^2+9}{a+\cos x}+a\le 0.$$

Приведем левую часть неравенства к общему знаменателю:

$$\frac{\cos^2 x+(x^2+9)+a^2+2a\cos x-2a\sqrt{x^2+9}-2\cos x\sqrt{x^2+9}}{a+\cos x}\le 0.$$

В числителе имеем полный квадрат трехчлена, т.е. $\dfrac{(\cos x+a-\sqrt{x^2+9})^2}{a+\cos x}\le 0$.

Для того чтобы последнее неравенство имело единственное решение, необходимо выполнение условия

$$(\cos x+a-\sqrt{x^2+9})^2=0\text{, или } \cos x+a=\sqrt{x^2+9}.$$

Полученное уравнение решим графическим способом. Построим графики функций $y=\cos x+a$ и $y=\sqrt{x^2+9}$ (рис.11).

Уравнение имеет единственное решение, когда у графиков функций $y=\cos x+a$ и $y=\sqrt{x^2+9}$ есть только одна общая точка. Эта точка с координатами (0;3), т.е. $a=2$.

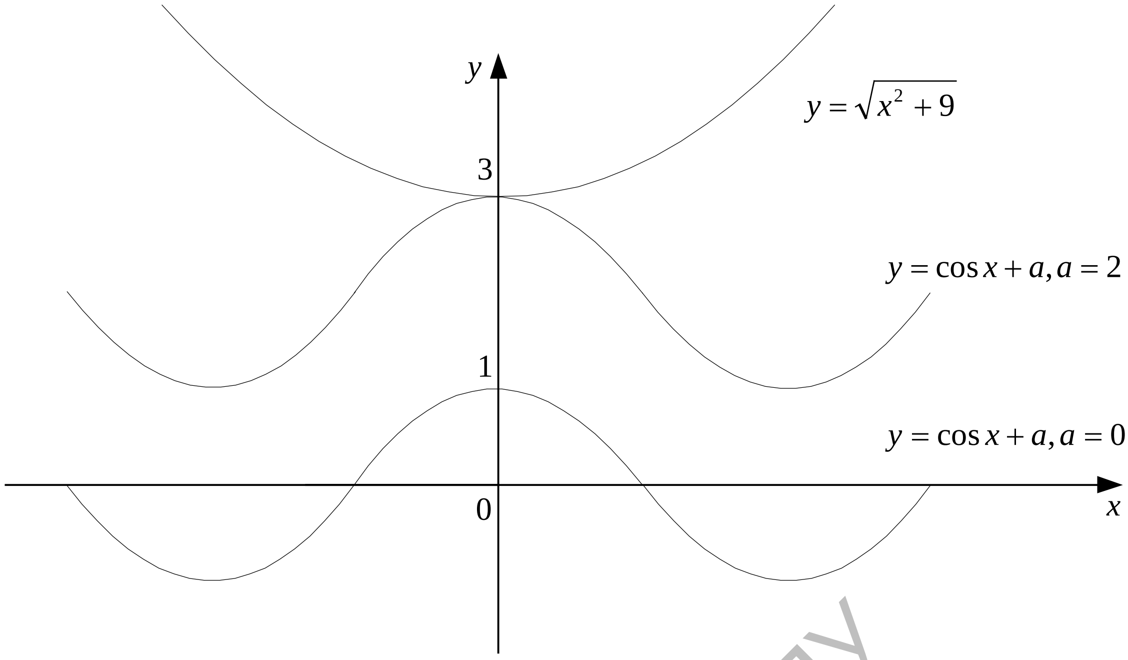

Рисунок 11

Ответ. $a=2$.

Пример 11. Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|3x-a|+2\le|x-4|$ образуют отрезок длины 1.

Решение. Преобразуем исходное неравенство к виду $|3x-a|\le|x-4|-2$.

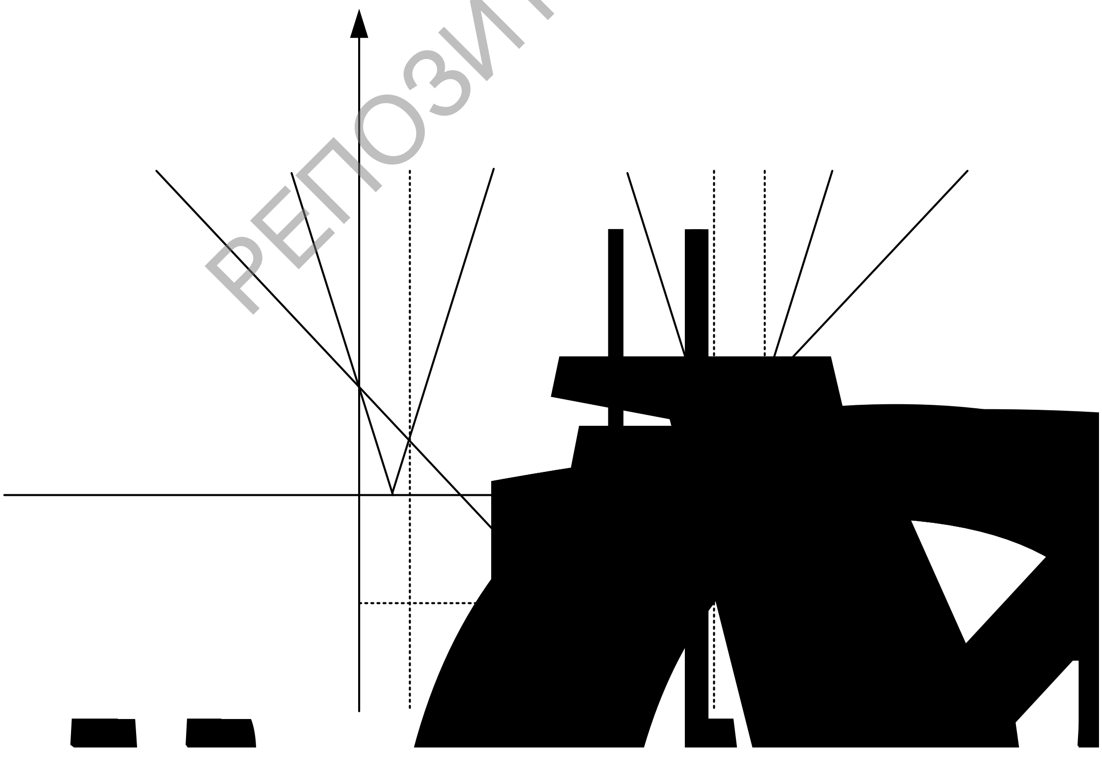

Рисунок 12

Раскрывая модуль в выражении, стоящем в правой части неравенства, получим:

$$g(x) = |x-4| - 2 = \begin{cases} x-6, \text{ если } x \ge 4, \\ -x+2, \text{ если } x < 4. \end{cases}$$

При каждом фиксированном значении параметра a график функции $y_a(x) = |3x - a|$ получается параллельным переносом графика функции $y = |3x|$ вдоль оси Ox на $\dfrac{a}{3}$ единиц.

Решению исходного неравенства соответствуют все такие значения x, при которых точки плоскости Oxy с координатами $(x; g(x))$ расположены не ниже точек с координатами $(x; y_a(x))$. Из рисунка 12 видно, что решением исходного неравенства является отрезок, когда график функции $y_a(x)$ пересекает прямую $y = x - 6$ при $x \ge 4$ или прямую $y = -x + 2$ при $x \le 4$.

В первом случае абсциссы точек пересечения графиков функций получаются из решения уравнений $x - 6 = 3x - a_1$ и $x - 6 = -3x + a_1$. Отсюда получаем $x = \dfrac{a_1 - 6}{2}$ и $x = \dfrac{a_1 + 6}{4}$. В этом случае длина отрезка равна $\dfrac{a_1 - 6}{2} - \dfrac{a_1 + 6}{4} = \dfrac{a_1 - 18}{4}$. Соответственно, длина равна 1 при $a_1 = 22$.

Во втором случае абсциссы точек пересечения графиков функций получаются из решения уравнений $-x + 2 = 3x - a_2$ и $-x + 2 = -3x + a_2$. Отсюда получаем $x = \dfrac{2 + a_2}{4}$ и $x = \dfrac{a_2 - 2}{2}$. В этом случае длина отрезка равна $\dfrac{2 + a_2}{4} - \dfrac{a_2 - 2}{2} = \dfrac{6 - a_2}{4}$. Следовательно, длина отрезка равна 1 при $a_2 = 2$.

Ответ. $2; 22$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. При каких значениях параметра p. уравнение $x^2 - 4|x| + 2 = p$ имеет ровно три решения?
2. Для каждого значения параметра a решите уравнение $2|x| + |x - 1| = a$.
3. При каких значениях параметра a число корней уравнения $\left||x^2 - 2x| - 7\right| = a$ в четыре раза больше a?
4. При каких значениях параметра a число корней уравнения $\left|x^2 - 8|x| + 7\right| = a$ равно a?
5. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 + 4x| = a$ имеет 4 решения?

6. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |x| + |y| = 3 \end{cases}$ имеет 8 решений, 4 решения, не имеет решений?

7. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором система $\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 + 9 + 2y \le 0, \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y = a \end{cases}$ имеет решения.

8. Решите для всех значений параметра a уравнение $|x+3| - a|x-1| = 4$.

9. Решите при всех значениях параметра a систему уравнений $\begin{cases} y = 1 - x, \\ |x| + |y| = a. \end{cases}$

10. Найдите все значения a, при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$ пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

11. Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \le |x + 3|$ образуют отрезок длины 1.

Список использованной литературы

1. Ильина, С.Д. Графические решения уравнений, содержащих знак модуля / С.Д. Ильина // Математика в школе.– 2001.– № 8.– С.33-34.
2. Веременюк, В.В. Математика: учимся быстро решать тесты: пособие для подготовки к тестированию и экзамену / В.В. Веременюк, Е.А. Крушевский, И.Д. Беганская, – Мн.: ТетраСистемс, 2005.– 144 с.
3. Хабибуллин, К.Я. Стандартный прием в нестандартных задачах / К.Я. Хабибуллин // Математика в школе.– 2000.– № 8.– С. 14-15.
4. Черкасов, О.Ю. Математика для поступающих в серьезные вузы / О. Ю. Черкасов, А.Г. Якушев.– М.: Московский Лицей, 1998.– 400 с.