***В.А. Шилинец**, доцент кафедры математики БГПУ*
***А.С. Стребков,** учитель средней школы № 213 г. Минска*
***В.В. Шайков,** учитель средней школы № 155 г. Минска*

ФОРМУЛА СУММЫ ЧЛЕНОВ КОНЕЧНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

В соответствии с Декретом Президента Республики Беларусь «Об отдельных вопросах общего среднего образования» № 15 от 17 июля 2008 года учащиеся IX' классов общеобразовательных школ за один учебный год должны изучить большой объём учебного материала. В связи с этим, а также недостатком учебного времени, у преподавателей математики возникает определённые методические трудности. В данной статье авторы предлагают разработку урока по теме «Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии» для учащихся IX' классов общеобразовательных школ.

ЦЕЛИ УРОКА:

***образовательная*:** вывод формулы суммы членов конечной геометрической прогрессии; формирование навыков нахождения суммы членов конечной геометрической прогрессии;

***развивающая*:** развитие важнейших личностных качеств, прежде всего в таких направлениях, как точность и ясность мысли, воля и целеустремлённость в поисках и принятии решений, сообразительность, интуиция, стремление к применению полученных знаний, творческая активность и самостоятельность;

***воспитательная*:** привитие любви к математике, воспитание эстетических качеств и способности воспринимать красоту и гармонию мира.

ХОД УРОКА

I. Объяснение нового материала

Учитель предлагает учащимся следующую задачу из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого.

Задача 1. Некто продал лошадь за 156 р. Но покупатель, приобретая лошадь, раздумал её покупать и возвратил продавцу, говоря:

– Нет мне расчёта покупать за эту цену лошадь, которая таких денег не стоит.

Тогда продавец предложил другое условие:

– Если, по-твоему, цена лошади высока, то купи только её подковные гвозди; лошадь же получишь в придачу бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне всего $\frac{1}{4}$ к., за второй – $\frac{1}{2}$ к., за третий – 1 к. и т.д.

Покупатель, соблазнённый низкой ценой и желая даром получить лошадь, принял условие продавца, рассчитывая, что за гвозди придётся уплатить не более 10 р.

На сколько покупатель проторговался?

Учащиеся предлагают составить последовательность чисел

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 2^2, \ldots, 2^{21}.$$

Данная последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем $q = 2$, $b_1 = \frac{1}{4}$ и $n = 24$.

Учащиеся предлагают найти сумму 24 первых её членов.

Вопрос. Можно ли решить эту задачу более рациональным способом?

Ответ. Да, если будем знать формулу суммы конечной геометрической прогрессии.

Такая формула существует, но рассмотрим ещё одну задачу.

Задача 2. Однажды незнакомец постучал в окно к богатому купцу и предложил такую сделку: «Я буду ежедневно в течение 30 дней приносить тебе по 100 000 р. А ты мне в первый день за 100 000 р. дашь 1 копейку, во второй день за 100 000 р. – 2 копейки, и так каждый день будешь увеличивать предыдущее число денег в два раза. Если тебе выгодна сделка, то с завтрашнего дня начнём». Купец обрадовался такой удаче. Он подсчитал, что за 30 дней получит от незнакомца 3 000 000 р. На следующий день пришли к нотариусу и узаконили сделку.

Вопрос. Кто в этой сделке проиграл: купец или незнакомец?

Учащиеся предлагают найти сумму 30 первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = 2$ и $b_1 = 1$.

Объявляется тема урока и его цели. Далее ученики с помощью учителя выводят формулу

$$S_n = \frac{b_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}. \qquad (1)$$

Пусть S_n есть сумма n членов геометрической прогрессии b_1, $b_1 q$, $b_1 q^2$, …:

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1}. \qquad (2)$$

Если знаменатель прогрессии q равен 1, то $S_n = nb_1$. Если же он отличен от 1, то поступим следующим образом. Умножим равенство (2) почленно на q. В результате получим:

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^n. \qquad (3)$$

Затем вычтем почленно из равенства (2) равенство (3):

$$S_n - qS_n = b_1\left(1 - q^n\right).$$

Отсюда находим

$$S_n = \frac{b_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}.$$

Таким образом, если знаменатель геометрической прогрессии не равен единице, то сумма n первых членов этой прогрессии равна дроби, в числителе которой стоит произведение первого члена на единицу минус n-я степень знаменателя прогрессии, а в знаменателе дроби – единица минус знаменатель прогрессии.

После вывода формулы (1) возвращаемся к задаче 1 и задаче 2.

Задача 1. Вычисляем:

$$S_{24} = \frac{\frac{1}{4}\left(2^{24} - 1\right)}{1} = \frac{1}{4}\left(\left(2^6\right)^4 - 1\right) =$$

$$= 2^{-2}\left(2^{24} - 1\right) = 4194303\frac{3}{4} \approx 42\ 000 \text{ (руб.)}.$$

При таких условиях, учитывая цены в те времена, не обидно дать и лошадь в придачу.

Задача 2. Вычисляем:

$$S_{30} = \frac{1\left(1 - 2^{30}\right)}{1 - 2} = 2^{30} - 1 = \left(2^5\right)^6 - 1 = 1073741932 \text{ (к.)}.$$

Ответ очевиден – купец проиграл.

II. Закрепление изученного материала

Задача 3 «Легенда о шахматной доске». По преданию, индийский принц Сирам (VI век), восхищённый игрой и разнообразием возможных положений шахматных фигур, позвал к себе её изобретателя, учёного Сету, и сказал ему:

– Я желаю достойно вознаградить тебя за прекрасную игру, которую ты придумал. Я достаточно богат, чтобы исполнить любое твоё желание.

Изобретатель Сету был человеком бедным, скромным, но не терпел хвастунов. И когда принц заявил, что выполнит любое его желание, хитро прищурился, и сказал:

– Хорошо, господин. Прикажи выдать мне за первую шахматную клетку 1 зёрнышко, за вторую – 2, за третью – 4, за четвёртую – 8, за пятую – 16, за шестую – 32…

– Хватит, хватит! Приди вечером, да не забудь мешок! – расхохотался Сирам.

Сета с низким поклоном удалился.

А мудрецы тем временем взялись за расчёты. И вечером в ужасе предстали перед принцем, ожидая страшного наказания.

– В чём дело? Почему я не вижу мешков с зерном? – вскричал принц.

Самый старый мудрец негромко произнёс:

– О, господин! У Вас нет такого количества зерна. Даже если распахать всю поверхность Земли…

Сирам удивился и попросил назвать ему количество зёрен.

– 18 квинтиллионов 446 квадриллионов 744 триллиона 73 биллиона 709 миллионов 551 тысяча 615, – ответил мудрец.

Смог ли принц Сирам выполнить желание Сеты?

Решение. Действительно, требуемое количество зёрен равно:

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = \frac{1 \cdot \left(1 - 2^{64}\right)}{1 - 2} =$$

$$= 18446744073709551615.$$

Масса такого количества пшеничных зёрен больше триллиона тонн. Это превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.

Если бы такое число зёрен равномерно рассыпать по всей земной суше, то образовался бы слой пшеницы толщиной около 9 мм.

Чтобы собрать такое количество зёрен, следует распахать все планеты Солнечной системы (в 2000 раз больше всей поверхности Земли).

Задача 4 «Вознаграждение воина». Служившему воину дано вознаграждение: за первую рану 1 копейка, за другую – 2 копейки, за третью – 4 копейки и т.д. По исчислению нашлось, что воин получил всего вознаграждения 655 р. 35 к. Каково число его ран?

Решение. Рассмотрим геометрическую прогрессию $\left(b_n\right)$: $1, 2, 4, \ldots$, где $b_1 = 1$, $q = 2$, $S_n = 65\,535$. Воспользуемся формулой для нахождения суммы n первых членов геометрической прогрессии. Составим уравнение:

$$65\,535 = \frac{1 \cdot \left(1 - 2^n\right)}{1 - 2},\ 65\,535 = 2^n - 1,\ n = 16.$$

При такой системе вознаграждения воин должен получить 16 ран и остаться при этом в живых, чтобы удостоиться награды в 655 р. 35 к.

Задача 5 «Городские слухи». Удивительно, как быстро разбегаются по городу слухи. Иной раз не пройдёт и двух часов со времени какого-нибудь происшествия, которое видели всего несколько человек, а новость уже облетела весь город: все о ней знают, все слышали. Итак, задача:

В городе 50000 жителей. Приезжий в 8.00 рассказывает новость трём соседям; каждый из них в ближайшие четверть часа рассказывает новость уже трём своим соседям и т.д. Во сколько эта новость станет известной половине города?

Решение. Итак, в 8.15 утра новость была известна в городе только четверым: приезжему и трём местным жителям. Узнав эту новость, каждый из трёх граждан поспешил рассказать её трём другим. Это потребовало также четверти часа. Значит, спустя полчаса после прибытия новости в город о ней знали уже $4 + 3 \cdot 3 = 13$ человек. Каждый из девяти вновь узнавших поделился в ближайшие четверть часа с тремя другими гражданами. В 8.45 утра новость стала известна $13 + 3 \cdot 9 = 40$ гражданам.

Таким образом, осведомление города будет происходить по следующему расписанию:

в 9.00 новость узнают	$40 + 3 \cdot 27 = 121$ (чел.);
9.15	$121 + 3 \cdot 81 = 364$;
9.30	$364 + 3 \cdot 243 = 1093$;
9.45	$1093 + 3 \cdot 729 = 3280$;
10.00	$3280 + 3 \cdot 2187 = 9841$;
10.15	$9841 + 3 \cdot 6561 = 29\,524$ (чел.).

Задачу можно решить и по-другому, используя формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии. В рассматриваемом случае $q = 3$, $b_1 = 1$, $S_n = 25000$, n – неизвестно.

Подставляя известные числа в формулу (1), получим:

$$25\,000 = \frac{1 \cdot \left(1 - 3^n\right)}{1 - 3},$$

$$3^n = 50\,001.$$

Чтобы найти n, заметим, что

$$3^6 = 729,\ 3^3 = 27,\ \text{а}\ 3^9 = 3^6 \cdot 3^3 = 729 \cdot 27 < 730 \cdot 30 = 21\ 900.$$

Таким образом, n должно быть не меньше 10.

При $n = 10$ имеем:

$$S_{10} = \frac{b_1\left(1 - q^{10}\right)}{1 - q} = \frac{1 \cdot \left(1 - 3^{10}\right)}{1 - 3} = \frac{1 - 59\,049}{-2} = 29\,524 > 25\,000.$$

Следовательно, на 10-м шаге более половины жителей города будут знать новость. Легко подсчитать, что это произойдёт в 10.15 утра.

III. «Карусель» – обучающая самостоятельная работа

Класс делится на группы по шесть учеников. Каждый ученик получает листок с заданием. Задач на каждом листке шесть.

1. Дано: (b_n) – геометрическая прогрессия, $b_1 = 3,\ q = 5.$ Найти: S_4 – ?	Фамилия, имя ________________ Ответ ________________
2. Дано: (b_n) – геометрическая прогрессия, $b_2 = 8,\ b_3 = 4.$ Найти: S_6 – ?	Фамилия, имя ________________ Ответ ________________
3. Дано: (b_n) – геометрическая прогрессия, $b_1 = 5,\ q = 3,\ S_n = 200.$ Найти: n – ?	Фамилия, имя ________________ Ответ ________________
4. Дано: (b_n) – геометрическая прогрессия, $q = -\frac{1}{2},\ S_8 = \frac{85}{64}.$ Найти: b_1 – ?	Фамилия, имя ________________ Ответ ________________
5. Дано: (b_n) – геометрическая прогрессия, $b_1 = 15,\ S_3 = 21\frac{2}{3}.$ Найти: q – ?	Фамилия, имя ________________ Ответ ________________
6. Дано: (b_n) – геометрическая прогрессия, $q = 3,\ b_4 = 54.$ Найти: S_4 – ?	Фамилия, имя ________________ Ответ ________________

Каждые три минуты учитель говорит: «Меняемся». Ученики передают свой лист по кругу. «Карусель» останавливается, если к каждому вернётся лист, на котором в задаче 1 стоит его фамилия. Таким образом, каждый ученик решает все задачи.

IV. Подведение итогов урока

Учащиеся сдают свои самостоятельные работы. Оценки за самостоятельную работу учитель оглашает на следующем уроке.

Список использованной литературы

1. Задачи по математике. Начала анализа: Справ. пособие / Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 608 с.
2. Чистяков, В.Д. Старинные задачи по элементарной математике / В.Д. Чистяков. – Мн.: Вышэйшая школа, 1978. – 272 с.
3. Латотин, Л.А. Математика: учеб. пособие для 10-го кл. учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования, с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни) / Л.А. Латотин, Б.Д. Чеботаревский; пер. с белорус. яз. И.П. Ефременко. – 2-е изд. – Мн.: Нар. асвета, 2006. – 416 с.