***В.А. Шилинец**, доцент кафедры математики БГПУ*

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С АРКФУНКЦИЯМИ

Обучение математике происходит в процессе решения задач, среди которых особую роль играют задачи исследовательского характера. К таким задачам можно отнести уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции. Предлагаемая вашему вниманию статья и посвящена методам решения таких уравнений и неравенств.

Задачи, связанные с обратными тригонометрическими функциями, часто вызывают у школьников старших классов значительные трудности. Если с задачами на вычисление значений обратных тригонометрических функций учащиеся еще справляются, то уравнения и неравенства, содержащие эти функции, нередко ставят их в тупик. Связано это, прежде всего, с тем, что в школьной программе недостаточно времени уделяется изучению аркфункций.

Задачи с аркфункциями в логическом смысле столь же естественны, как и логарифмические функции по отношению к показательным функциям. Следует подчеркнуть, что уравнения, неравенства с аркфункциями столь же разнообразны, как и соответствующие задачи с прямыми тригонометрическими функциями. Они могут быть дополнением к тригонометрии, а также помогут в развитии гибкости математического мышления. Задачи с аркфункциями позволяют школьнику заглянуть «за страницы» учебника, попробовать начать творческую исследовательскую работу, расширить свой кругозор.

Данная статья будет полезной и для учителей математики, работающих в старших классах.

Напомним вначале важнейшие свойства обратных тригонометрических функций.

Рассмотрим на отрезке $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ функцию $y = \sin x$. Она является непрерывной и возрастающей. Множеством значений этой функции является отрезок $[-1;1]$. Следовательно, согласно с теоремой о существовании обратной функции на отрезке $[-1;1]$ определена функция, обратная для функции $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. Эту обратную функцию называют арксинусом и обозначают $y = \arcsin x$.

Областью определения функции $y = \arcsin x$ является отрезок $[-1;1]$, а множеством значений – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Функция $y = \arcsin x$ возрастает и непрерывна на своей области определения.

Докажем сейчас, что функция $y = \arcsin x$ является нечетной.

Заметим сначала, что область определения функции $y = \arcsin x$ симметрична относительно точки x=0, поэтому остается убедиться в том, что $\forall x \in [-1;1]$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \qquad (1)$$

Пусть $\arcsin(-x) = y_1$, $-\arcsin x = y_2$. Тогда имеем: $y_1, y_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и

$$\sin y_1 = \sin(\arcsin(-x)) = -x, \sin y_2 = \sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x.$$

Отсюда, так как функция синус возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, следует, что $y_1 = y_2$, т.е. имеет место равенство (1).

График функции $y = \arcsin x$ симметричен графику функции $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ относительно прямой $y = x$ (рис. 1).

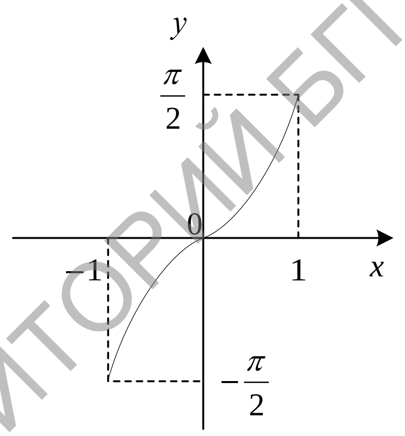

Рисунок 1

Рассмотрим на отрезке $0 \le x \le \pi$ функцию $y = \cos x$. Она является непрерывной и убывающей. Множеством значений этой функции является отрезок $[-1;1]$. Следовательно, согласно с теоремой о существовании обратной функции на отрезке $[-1;1]$ определена функция, обратная для функции $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$. Эту функцию называют арккосинусом и обозначают $y = \arccos x$.

Областью определения функции $y = \arccos x$ является отрезок $[-1;1]$, а множеством значений – отрезок $[0; \pi]$. Функция $y = \arccos x$ убывает и непрерывная на своей области определения.

График функции $y = \arccos x$ симметричен графику функции $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$ относительно прямой $y = x$ (рис. 2).

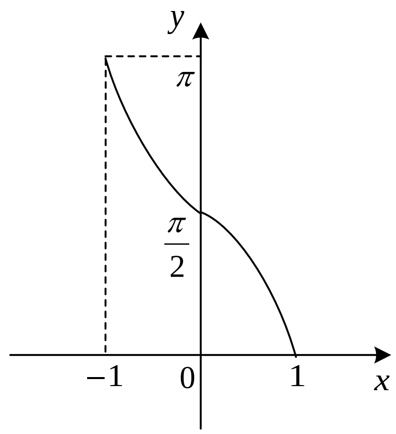

Рисунок 2

Рассмотрим на промежутке $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ функцию $y = tg\, x$. Она является непрерывной и возрастающей. Множеством значений этой функции является промежуток $(-\infty; +\infty)$. Значит, согласно с теоремой о существовании обратной функции на промежутке $(-\infty; +\infty)$ определена функция, обратная для функции $y = tg\, x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Эту обратную функцию называют арктангенсом и обозначают $y = arctg\, x$.

Областью определения функции $y = arctg\, x$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$, а множеством значений – интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Функция $y = arctg\, x$ возрастает и непрерывна на своей области определения.

Докажем сейчас, что функция $y = arctg\, x$ является нечетной.

Отметим сначала, что область определения функции $y = arctg\, x$ симметрична относительно точки $x = 0$, поэтому остается убедиться в том, что што $\forall x \in (-\infty; +\infty)$

$$arctg(-x) = -arctg\, x\,. \tag{2}$$

Пусть $arctg(-x) = y_1$, $-arctg\, x = y_2$. Поэтому имеем: $y_1, y_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и

$$tg\, y_1 = tg(arctg(-x)) = -x,\, tg\, y_2 = tg(-arctg\, x) = -tg(arctg\, x) = -x\,.$$

Отсюда, так как функция тангенс возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, следует, что $y_1 = y_2$, т.е. имеет место равенство (2).

График функции $y = arctg\, x$ симметричен графику функции $y = tg\, x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ относительно прямой $y = x$ (рис. 3).

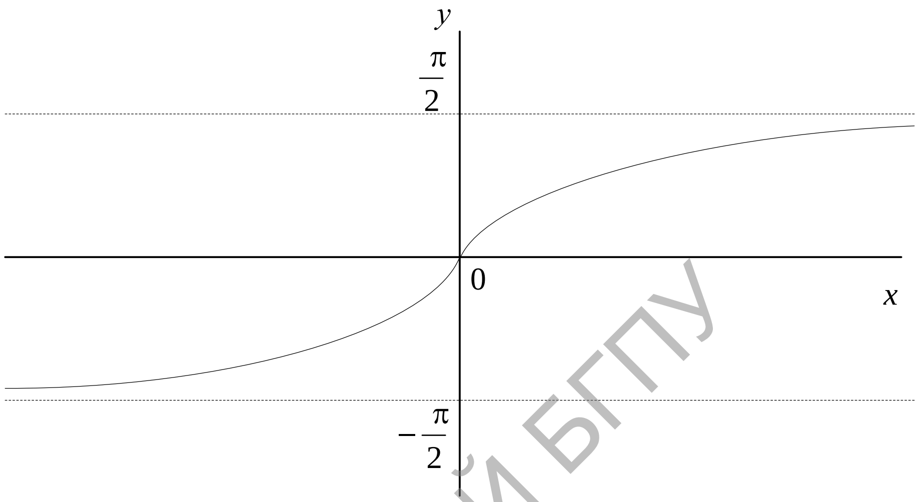

Рисунок 3

Рассмотрим на промежутке $0 < x < \pi$ функцию $y = ctg\, x$. Она является непрерывной и убывающей. Множеством значений этой функции является промежуток $(-\infty; +\infty)$. Таким образом, согласно с теоремой о существовании обратной функции на промежутке $(-\infty;+\infty)$ определена функция, обратная для функции $y = ctg\, x$, $0 < x < \pi$. Эту функцию называют арккотангенсом и обозначают $y = arcctg\, x$.

Область определения функции $y = arcctg\, x$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$, а множеством значений – интервал $(0; \pi)$. Функция $y = arcctg\, x$ убывает и непрерывна на своей области определения.

График функции $y = arcctg\, x$ симметричен графику функции $y = ctg\, x$, $0 < x < \pi$ относительно прямой $y = x$ (рис. 4).

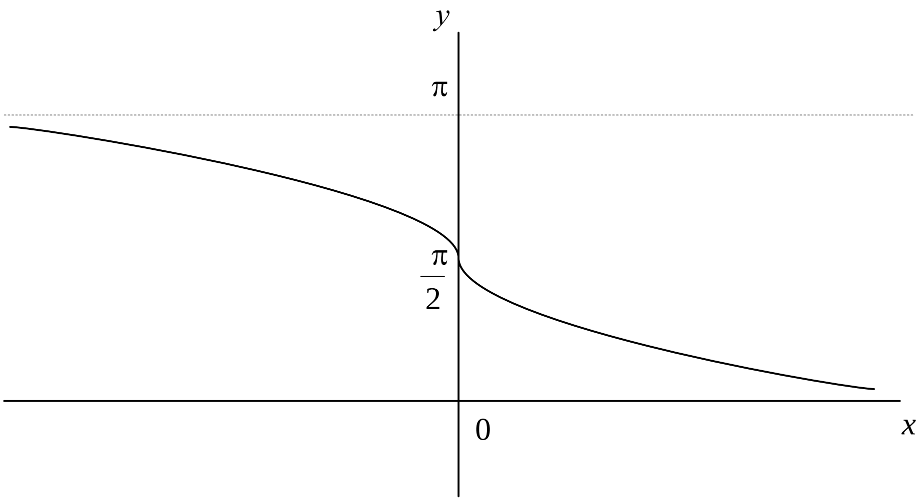

Рисунок 4

Перейдем к рассмотрению методов решения уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции.

Простейшими уравнениями, содержащими переменную под знаком одной из обратных тригонометрических функций, будем называть уравнения вида

$$\arcsin x = a, \arccos x = a, arctg\, x = a, arcctg\, x = a .$$

Рассмотрим подробно решение каждого из данных уравнений, ибо любое другое уравнение будет приводиться либо к одному из них, либо к их совокупности, либо к их системе.

Пример 1. Решите уравнение

$$\arcsin x = a . \qquad (3)$$

Решение. Так как значения $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то уравнение равносильно следующей системе: $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le a \le \frac{\pi}{2}, \\ x = \sin a. \end{cases}$ Таким образом, если $|a| \le \frac{\pi}{2}$, то уравнение (3) имеет единственное решение $x = \sin a$. Если $|a| > \frac{\pi}{2}$, то уравнение (3) не имеет решений.

Пример 2. Решите уравнение

$$\arccos x = a . \qquad (4)$$

Решение. Так как значения $\arccos x \in [0;\pi]$, то уравнение (4) имеет единственное решение $x = \cos a$, если $0 \le a \le \pi$. При других значениях a уравнение (4) решений не имеет.

Пример 3. Решите уравнение

$$arctg\ x = a\,. \tag{5}$$

Решение. Имеем: $arctg\ x = a \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}, \\ x = tga\,. \end{cases}$ Если же $|a| \ge \frac{\pi}{2}$, то уравнение (5) не имеет решений.

Пример 4. Решите уравнение

$$arcctg\ x = a\,. \tag{6}$$

Решение. $arcctg\ x = a \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < \pi, \\ x = ctga\,. \end{cases}$ При других значениях a уравнение (6) решений не имеет.

Простейшими неравенствами с аркфункциями являются неравенства

$$\arcsin x \ge a, \arcsin x > a, \arcsin x \le a, \arcsin x < a \tag{7}$$

и такие же неравенства, левая часть в которых заменена на $\arccos x,\ arctg\,x,\ arcctg\,x$. Все они решаются единообразно, поэтому ограничимся рассмотрением решений неравенств (7).

Пример 5. Решите неравенство

$$\arcsin x \ge a\,. \tag{8}$$

Решение. Если $a \le -\frac{\pi}{2}$, то в силу определения $\arcsin x$ решением неравенства (8) будет отрезок $-1 \le x \le 1$. Если $-\frac{\pi}{2} < a \le \frac{\pi}{2}$, то вычисляя синус от обеих частей неравенства (8) и учитывая, что $\sin t$ возрастает на множестве $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, получим в качестве решения отрезок $\sin a \le x \le 1$. Наконец, если $a > \frac{\pi}{2}$, то в силу определения $\arcsin x$ решений нет.

Пример 6. Решите неравенство

$$\arcsin x > a\,. \tag{9}$$

Решение. Если $a < -\frac{\pi}{2}$, то решением неравенства (9) является отрезок $[-1;1]$. Если $-\frac{\pi}{2} \le a < \frac{\pi}{2}$, то вычисляя синус от обеих частей неравенства (9), получим в качестве решения промежуток $\sin a < x \le 1$. Наконец, если $a \ge \frac{\pi}{2}$, то неравенство (9) не имеет решений, так как по определению $\arcsin x$ не может быть больше, чем $\frac{\pi}{2}$.

Пример 7. Решите неравенство

$$\arcsin x \le a\,. \tag{10}$$

Решение. Неравенство (10) можно свести к уже изученному случаю. Для этого обе части неравенства умножим на число -1 и воспользуемся нечетностью $\arcsin x$: $-\arcsin x \ge -a \Leftrightarrow \arcsin(-x) \ge -a$.

Если теперь обозначить $-x = t$, $-a = b$, то получим знакомое неравенство $\arcsin t \ge b$. Опираясь на решение неравенства (8), запишем сразу ответ для нашего неравенства (10):

1) если $a < -\dfrac{\pi}{2}$ (т.е. $b > \dfrac{\pi}{2}$), то решений нет;

2) если $-\dfrac{\pi}{2} \le a < \dfrac{\pi}{2}$ (т.е. $-\dfrac{\pi}{2} < b \le \dfrac{\pi}{2}$), то $-1 \le x \le \sin a$;

3) если $a \ge \dfrac{\pi}{2}$ (т.е. $b \le -\dfrac{\pi}{2}$) то $-1 \le x \le 1$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\arcsin x < a. \tag{11}$$

Решение. Сразу приведем результат, получаемый по той же схеме, что и в примере 7:

1) если $a \le -\dfrac{\pi}{2}$, то неравенство (11) не имеет решений;

2) если $-\dfrac{\pi}{2} < a \le \dfrac{\pi}{2}$, то $-1 \le x < \sin a$;

3) если $a > \dfrac{\pi}{2}$, то $-1 \le x \le 1$.

Заметим, что неравенства $\arccos x \ge a$, $\arccos x > a$, $\arccos x \le a$, $\arccos x < a$ легко сводятся к предыдущим неравенствам, если учесть, что $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $|x| \le 1$.

Перейдем теперь к более сложным уравнениям и неравенствам с аркфункциями.

Рассмотрим уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются одноименными обратными тригонометрическими функциями. Решение таких уравнений и неравенств основывается, прежде всего, на таком свойстве обратных тригонометрических функций, как монотонность (функции $y = \arcsin t$, $y = arctg\, t$ монотонно возрастают, а функции $y = \arccos t$, $y = arcctg\, t$ монотонно убывают на своих областях определения).

Справедливы следующие равносильные переходы:

$$\arcsin f(x) = \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \le 1; \end{cases}$$

$$\arcsin f(x) \le \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -1, \\ g(x) \le 1; \end{cases}$$

$$\arccos f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \le 1; \end{cases}$$

$$\arccos f(x) \le \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) \ge -1, \\ f(x) \le 1; \end{cases}$$

$$arctg\ f(x) = arctg\, g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x);$$

$$arctg\ f(x) \le arctg\, g(x) \Leftrightarrow f(x) \le g(x);$$

$$arcctg\ f(x) = arcctg\, g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x);$$

$$arcctg\ f(x) \le arcctg\, g(x) \Leftrightarrow f(x) \ge g(x).$$

Пример 9. Решите уравнение $4\arcsin\sqrt{x} - \pi = 0$.

Решение. Имеем: $4\arcsin\sqrt{x} - \pi = 0 \Leftrightarrow \arcsin\sqrt{x} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. При решении уравнения мы учли, что $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, следовательно, уравнение имеет единственное решение.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Пример 10. Решите уравнение $3\arccos(x^2 - 6x + 8{,}5) = \pi$.

Решение. $3\arccos(x^2 - 6x + 8{,}5) = \pi \Leftrightarrow \arccos(x^2 - 6x + 8{,}5) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8{,}5 = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8{,}5 = 0{,}5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Ответ: $\{2;4\}$.

Пример 11. Решите уравнение $2arcctg(x^2 - 3x + 3) - \frac{\pi}{2} = 0$.

Решение. $2arcctg(x^2 - 3x + 3) - \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow arcctg(x^2 - 3x + 3) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = ctg\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ответ: $\{1;2\}$.

Пример 12. Решите уравнение $\arcsin(tg\frac{\pi}{4}) - \arcsin\sqrt{\frac{3}{x}} - \frac{\pi}{6} = 0$.

Решение. $\arcsin(tg\frac{\pi}{4}) - \arcsin\sqrt{\frac{3}{x}} - \frac{\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \arcsin\sqrt{\frac{3}{x}} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{x}} = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4$.

Ответ: $\{4\}$.

Пример 13. Решите уравнение $\arcsin\frac{x^2+4x-3}{3}+\arcsin\frac{x-3}{3}=0$.

Решение. Поскольку $-\arcsin\frac{x-3}{3}=\arcsin\frac{3-x}{3}$, то имеет место следующая цепочка равносильных преобразований:

$$\arcsin\frac{x^2+4x-3}{3}+\arcsin\frac{x-3}{3}=0 \Leftrightarrow \arcsin\frac{x^2+4x-3}{3}=\arcsin\frac{3-x}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+4x-3}{3}=\frac{3-x}{3}, \\ \left|\frac{3-x}{3}\right| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: $\{1\}$.

Пример 14. Решите неравенство $arctg\,(2x^2-5x-1) \le arctg\,(2x-5-x^2)$.

Решение. Неравенство равносильно следующему:

$$2x^2-5x-1 \le 2x-5-x^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 3x^2-7x+4 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le \frac{4}{3}.$$

Ответ: $[1;\frac{4}{3}]$.

Пример 15. Решите неравенство $\arccos(2x^2+3x+1) < \arccos(6x^2+x-1)$.

Решение. $\arccos(2x^2+3x+1) < \arccos(6x^2+x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+3x+1 > 6x^2+x-1, \\ 6x^2+x-1 \ge -1, \\ 2x^2+3x+1 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x-1<0, \\ x(6x+1) \ge 0, \\ x(2x+3) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{6}\right] \cup \{0\}.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{6}\right] \cup \{0\}$.

Пример 16. Решите уравнение $2arctg\,x+3arcctg\,x=\frac{\pi}{2}$ [1].

Решение. Задача допускает некрасивое решение «в лоб». Однако если вспомнить тождество $arctg\,x+arcctg\,x=\frac{\pi}{2}$, то из двух равенств вытекает: $arcctg\,x=-\frac{\pi}{2}$, чего не может быть. Следовательно, данное уравнение не имеет решений.

Ответ: $\varnothing$.

Многие уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции, можно свести алгебраическим уравнениям и неравенствам, если осуществить соответствующую замену переменной. При этом необходимо помнить об ограничениях на вводимую переменную, связанных с ограниченностью обратных тригонометрических функций.

Пример 17. Решите уравнение $2\arcsin^2 x - 5\arcsin x + 2 = 0$ [2].

Решение. Пусть $\arcsin x = t, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Тогда $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}, \\ t = 2. \end{array}\right.$

Поскольку $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, то $t = \frac{1}{2}$, откуда $\arcsin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sin\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{\sin\frac{1}{2}\right\}$.

Пример 18. Решите уравнение $\arccos^2 x - \frac{3\pi}{4}\arccos x + \frac{\pi^2}{8} = 0$.

Решение. Пусть $\arccos x = t, 0 \le t \le \pi$. Тогда $t^2 - \frac{3\pi}{4}t + \frac{\pi^2}{8} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2}, \\ t = \frac{\pi}{4}. \end{array}\right.$

а) $\arccos x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0$; б) $\arccos x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\left\{0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Пример 19. Решите неравенство $6\arcsin^2 x - \pi\arcsin x \ge 0$.

Решение. Пусть $\arcsin x = t, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Тогда $6t^2 - \pi t \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge \frac{\pi}{6}, \\ t \le 0. \end{array}\right.$

Поскольку $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, то $\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} \le t \le 0, \end{array}\right.$ откуда $\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \le x \le 1, \\ -1 \le x \le 0. \end{array}\right.$

Ответ: $[-1;0] \cup \left[\frac{1}{2};1\right]$.

Пример 20. Решите уравнение $(\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3 = \frac{\pi^3}{8}$ [3].

Решение. Используя тождество $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ $(|x| \le 1)$, получим:

$(\arcsin x)^3 + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)^3 = \frac{\pi^3}{8}$. Пусть $\arcsin x = t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Тогда $t^3 + \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^3 = \frac{\pi^3}{8} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^3 + \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi^2}{4}t + \frac{3\pi}{2}t^2 - t^3 = \frac{\pi^3}{8} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}t\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = \frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

$$\text{а) } \arcsin x = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ \text{б) } \arcsin x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: $\{0;1\}$.

Пример 21. Решите уравнение $2arctg\, x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{9arctg\, x}$.

Решение. $arctg\, x = t$, $2t = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{9t}$, $18t^2 - 3\pi t - \pi^2 = 0$, $9t \ne 0$.

$$D = (-3\pi)^2 - 4 \cdot 18 \cdot (-\pi^2) = 81\pi^2.\ t_{1,2} = \frac{3\pi \pm \sqrt{81\pi^2}}{36} = \frac{3\pi \pm 9\pi}{36} = \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{6}, \\ \frac{\pi}{3}. \end{array}\right.$$

$$arctg\, x = -\frac{\pi}{6}, x = tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.\ arctg\, x = \frac{\pi}{3}, x = tg\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\left\{\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

Рассмотрим уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями. При их решении пользуются известными тригонометрическими тождествами.

При решении многих уравнений такого рода часто целесообразно не обсуждать вопрос о равносильности преобразований, а сразу переходить к уравнению-следствию и после его решения делать необходимую проверку.

Пусть, например, требуется решить уравнение $\arcsin f(x) = \arccos g(x)$. Предположим, что x_0 – решение этого уравнения. Обозначим $\arcsin f(x_0) = \arccos g(x_0)$ через α. Тогда $\sin\alpha = f(x_0)$, $\cos\alpha = g(x_0)$, откуда $f^2(x_0) + g^2(x_0) = 1$. Таким образом,

$$\arcsin f(x) = \arccos g(x) \Rightarrow f^2(x) + g^2(x) = 1. \quad (12)$$

Аналогичным образом можно получить следующие переходы:

$$arctg\, f(x) = arcctg\, g(x) \Rightarrow f(x)g(x) = 1 \quad (13)$$

(использована формула $tg\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1$);

$$\arcsin f(x) = arcctg\, g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{g^2(x) + 1} \quad (14)$$

(использована формула $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{ctg^2\alpha + 1}$);

$$arctg\ f(x) = \arccos g(x) \Rightarrow g^2(x) = \frac{1}{f^2(x)+1} \qquad (15)$$

(использована формула $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{tg^2\alpha + 1}$);

$$\arcsin f(x) = arctg\ g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1} \qquad (16)$$

(использована формула $\sin^2\alpha = \dfrac{tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1}$);

$$\arccos f(x) = arcctg\ g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1} \qquad (17)$$

(использована формула $\cos^2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha}{ctg^2\alpha + 1}$).

Заметим, что корнем каждого из уравнений (12) – (15) может быть только такое число x_0, для которого $f(x_0) \ge 0$ и $g(x_0) \ge 0$, так как в противном случае множества значений левой и правой частей уравнения не пересекаются.

Пример 22. Решите уравнение $\arcsin\sqrt{3x-2} = arcctg\sqrt{2x-2}$.

Решение. $\arcsin\sqrt{3x-2} = arcctg\sqrt{2x-2} \Rightarrow 3x-2 = \dfrac{1}{1+2x-2} \Leftrightarrow 6x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{6}, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Корень $x = \dfrac{1}{6}$ является посторонним.

Ответ: $\{1\}$.

Пример 23. Решите уравнение $arcctg\,(3x-2) = arctg(2x-1)$.

Решение. $arcctg\,(3x-2) = arctg(2x-1) \Rightarrow (3x-2)(2x-1) = 1 \Leftrightarrow 6x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{6}, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Корень $x = \dfrac{1}{6}$ является посторонним.

Ответ: $\{1\}$.

Чтобы преобразования (12) – (15) сделать равносильными, следует учитывать ограничения, связанные с областями определения обратных тригонометрических функций и множествами их значений. Так, например,

$$\arcsin f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) + g^2(x) = 1, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$arctg\ f(x) = arcctg\ g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) = 1, \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) = 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Пример 24. Решите уравнение $\arccos|x| = \arcsin 2x$.

Решение. $\arccos|x| = \arcsin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + x^2 = 1, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{5}, \\ x \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$.

При решении неравенств, левая и правая части которых представляют собой разноименные обратные тригонометрические функции, целесообразно использовать метод интервалов, а в некоторых случаях учитывать свойства монотонных функций.

Пример 25. Решите неравенство $\arcsin(2x-5) \geq \arccos(3x-7)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin(2x-5) - \arccos(3x-7)$ и решим неравенство $f(x) \geq 0$ методом интервалов.

1) Найдем $D(f)$: $\begin{cases} |2x-5| \leq 1, \\ |3x-7| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 3, \\ 2 \leq x \leq \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{8}{3}.$

2) Найдем нули функции $f(x)$. Для этого решим уравнение

$$\arcsin(2x-5) = \arccos(3x-7) \Rightarrow (2x-5)^2 + (3x-7)^2 = 1 \Leftrightarrow 13x^2 - 62x + 73 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{31-2\sqrt{3}}{13}, \\ x = \frac{31+2\sqrt{3}}{13}. \end{array} \right.$$

Корень $x = \frac{31-2\sqrt{3}}{13}$ является посторонним.

3) Решим неравенство $f(x) \geq 0$ методом интервалов (рис. 5).

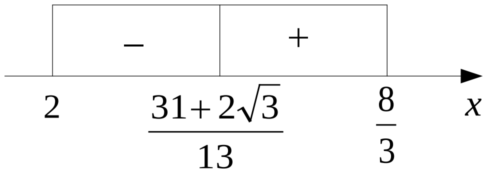

Рисунок 5

($f(2)<0$; $f\left(\frac{8}{3}\right)>0$).

Ответ: $\left[\frac{31+2\sqrt{3}}{13};\frac{8}{3}\right]$.

Заметим, что найдя корень уравнения $\arcsin(2x-5)=\arccos(3x-7)$, можно было не обращаться к методу интервалов, а воспользоваться тем, что функция $y=\arcsin(2x-5)$ является монотонно возрастающей, а функция $y=\arccos(3x-7)$ – монотонно убывающей на отрезке $\left[2;\frac{8}{3}\right]$.

Если в уравнение входят выражения, содержащие разные обратные тригонометрические функции, или они зависят от разных аргументов, то сведение уравнения к его алгебраическому следствию осуществляется обычно вычислением некоторой тригонометрической функции от обеих частей уравнения. Получающиеся при этом посторонние корни определяются проверкой. Если в качестве прямой функции выбираются тангенс или котангенс, то решения, не входящие в область определения этих функций, могут быть потеряны. Поэтому перед вычислением значений тангенса или котангенса от обеих частей уравнения следует убедиться в том, что среди чисел, не входящих в область определения этих функций, нет корней исходного уравнения.

При решении неравенств с аркфункциями также часто приходится брать от обеих частей неравенства операцию $\sin$ или $\cos$, или tg, или ctg. Чтобы при этом множество решений исходного неравенства не менялось, нужно, чтобы обе части неравенства лежали внутри или совпадали с промежутком монотонности основной тригонометрической функции $\sin t$, $\cos t$, $tg\,t$ или $ctg\,t$ соответственно. Если множество значений обеих частей неравенства не укладывается в один и тот же промежуток монотонности основной тригонометрической функции, то неравенство следует тождественно преобразовать или выделить промежутки монотонности и решать неравенство на каждом таком промежутке.

Пример 26. Решите уравнение $\arcsin x+\arcsin 2x=\frac{\pi}{3}$.

Решение. $\cos(\arcsin x+\arcsin 2x)=\cos\frac{\pi}{3}$, $\cos(\arcsin x)\cos(\arcsin 2x)-$

$-\sin(\arcsin x)\sin(\arcsin 2x)=\frac{1}{2}$. $\cos(\arcsin x)=\cos\alpha_1=\sqrt{1-x^2}$ ($\arcsin x=\alpha_1, x=\sin\alpha_1, |\alpha_1|\le\frac{\pi}{2}$,

$\sqrt{1-x^2}=\cos\alpha_1$). $\cos(\arcsin 2x)=\cos\beta_1=\sqrt{1-4x^2}$ ($\arcsin 2x=\beta_1, |\beta_1|\le\frac{\pi}{2}, 2x=\sin\beta_1$,

$\cos\beta_1=\sqrt{1-4x^2}$).

$$\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-4x^2}-2x^2=\frac{1}{2},\ (1-x^2)(1-4x^2)=\left(2x^2+\frac{1}{2}\right)^2,\ 7x^2-\frac{3}{4}=0,\ x_1=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}},$$

$x_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.

$x_1=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ не удовлетворяет уравнению, так как его левая часть меньше нуля, а правая – больше нуля.

Чтобы проверить $x_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, положим $\arcsin x_2=\alpha, \arcsin 2x_2=\beta$. Так как $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\alpha+\beta<\pi$ и $\frac{\pi}{3}\in(0;\pi)$, то из равенства $\cos(\alpha+\beta)=\cos\frac{\pi}{3}$ следует равенство $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$.

Пример 27. Решите уравнение $arctg\, x+arctg\frac{x}{2}+arctg\frac{x^2}{7}=0$ [1].

Решение. Заметим, что положительное значение x не может быть корнем уравнения, так как в этом случае его левая часть положительна.

Запишем уравнение в виде $arctg\frac{x^2}{7}=-(arctg\, x+arctg\frac{x}{2})$ возьмем тангенсы от его обеих частей. Получим $\frac{x^2}{7}=-\frac{x+\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}$, что эквивалентно уравнению $x(x^3-2x-21)=0$.

Корень кубического уравнения $x=3$ легко подбирается, следовательно, необходимо решить уравнение $x(x-3)x^2+3x+7)=0$. Квадратное уравнение действительных корней не имеет, а $x=3$ не является корнем исходного уравнения, единственное решение которого $x=0$.

Ответ: $\{0\}$.

Пример 28. Решите неравенство $arctg\sqrt{x}<\arccos(1-x)$ [4].

Решение. Так как $\sqrt{x}\geq 0$, то $0\leq arctg\sqrt{x}<\frac{\pi}{2}$. Данное неравенство можно заменить следующей эквивалентной конструкцией неравенств, решив которую, найдем искомое решение:

$$arctg\sqrt{x} < \arccos(1-x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \le arctg\sqrt{x} < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le \arccos(1-x) < \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos(arctg\sqrt{x}) > \cos(\arccos(1-x)); \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \le \arccos(1-x) \le \pi, \\ x \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ 0 < 1-x \le 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} > 1-x; \end{cases} \\ -1 \le 1-x \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ x(x+1)(x^2-x-1) < 0; \end{cases} \\ 1 \le x \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < x \le 2 \cdot$$

Ответ: $(0;2]$.

Пример 29. Решите неравенство

$$arctg(x+1) + arctg(1-x) \ge \frac{\pi}{4}. \qquad (18)$$

Решение. Левая часть неравенства (18) принимает значения, заполняющие интервал $(-\pi;\pi)$, на котором ни одна из основных тригонометрических функциях $\sin t$, $\cos t$, $tg\, t$, $ctg\, t$ не является монотонной. Поэтому преобразуем неравенство (18) следующим образом:

$$arctg(x+1) \ge \frac{\pi}{4} - arctg(1-x). \qquad (19)$$

Функция $y = arctg(x+1)$ ограничена, следовательно, неравенство (19) нужно рассматривать лишь при тех x, для которых $\dfrac{\pi}{2} > \dfrac{\pi}{4} - arctg(1-x) \Leftrightarrow arctg(1-x) > -\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 1-x > -1 \Leftrightarrow x < 2$.

При этом условии обе части неравенства (19) принимают значения, лежащие внутри отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, и от обеих частей можно взять tg :

$$\begin{cases} x+1 \ge \dfrac{1-(1-x)}{1+(1-x)}, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge \dfrac{x}{2-x}, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 2, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}.$$

Ответ: $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

Решение некоторых уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции, основывается исключительно на свойствах монотонности и ограниченности этих функций. Сформулируем теоремы, используемые при этом.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ монотонна на промежутке X, то уравнение $f(x) = c$, где $c = const$, имеет на промежутке X не более одного корня.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X, а функция $y = g(x)$ убывает на промежутке X, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на промежутке X не более одного корня.

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ на промежутке X ограничена сверху, причем $\sup\limits_{x\in X} f(x) = A$, а функция $y = g(x)$ ограничена снизу, причем $\inf\limits_{x\in X} f(x) = A$, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Пример 30. Решите уравнение $2\arccos x = arctg\, 2x$.

Решение. Функция $y = 2\arccos x$ является монотонно убывающей, а функция $y = arctg\, 2x$ – монотонно возрастающей. Число $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ является, очевидно, корнем данного уравнения. В силу теоремы 2 этот корень – единственный.

Ответ: $\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Пример 31. Решите уравнение $\dfrac{3}{\pi}\arccos(x-1) = 3 + \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2}$.

Решение. По определению, $0 \le \arccos(x-1) \le \pi$ для допустимых значений x, следовательно, $0 \le \dfrac{3}{\pi}\arccos(x-1) \le 3$. $3 + \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2} \ge 3$ для допустимых значений x. Равенство достигается, если $\begin{cases} \dfrac{3}{\pi}\arccos(x-1) = 3, \\ 3 + \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2} = 3. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы: $\arccos(x-1) = \pi, x - 1 = -1, x = 0$. При значении $x = 0$ второе уравнение обращается в верное числовое равенство. Следовательно, решением системы и исходного уравнения является $x = 0$.

Ответ: $\{0\}$.

Пример 32. Решите неравенство $\arcsin x + \arcsin 2x + \arcsin 4x < \arcsin\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3}\pi$.

Решение. Левая часть неравенства представляет собой монотонно возрастающую на отрезке $\left[-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right]$ функцию $f(x) = \arcsin x + \arcsin 2x + \arcsin 4x$. Уравнение $f(x) = \arcsin\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3}\pi$ в силу теоремы 1 имеет не более одного корня. Очевидно, $x=\frac{1}{4}$ – корень этого уравнения. Поэтому решением неравенства $f(x)<\arcsin\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\pi$ является промежуток $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решите следующие уравнения:

1) $\arcsin x + arctg\,3$;

2) $arctg\; x + arctg\,\frac{1}{6} = -\frac{\pi}{4}$;

3) $\sin(\pi\, arctg\, x) = \cos(\pi\, arctg\, x)$;

4) $\arcsin\frac{3x}{5} + \arcsin\frac{4x}{5} = \arcsin x$;

5) $\arcsin^2 x - \frac{3\pi}{4}\arcsin x + \frac{\pi^2}{4} = 0$;

6) $\arcsin^2 x\,(2\arcsin x + 3) = 3\arcsin x + 2$;

7) $\arccos(4x^2 - 11x + 5) + \arccos(3x^2 - 14x + 7) = \pi$;

8) $\arcsin\frac{7x-2}{13} = \arccos\frac{4x-3}{13}$;

9) $arctg\,3^x - arctg\,3^{-x} = \frac{\pi}{6}$;

10) $\arccos(x-1) = 2\arccos x$;

11) $arctg\,(x^2+x) + arctg\,(x^2-x) = \frac{\pi}{4}$;

12) $arctg\,(x-1) + arctg\,x + arctg\,(x+1) = arctg\,3x$.

Решите следующие неравенства:

1) $\frac{\pi}{4} < arcctg\,2x < \frac{3\pi}{4}$;

2) $3x < ctg\left(arctg\,\frac{1}{x} - arctg\,\frac{1}{x+1}\right)$;

3) $\sqrt{\arcsin x} + \sqrt{\arccos x} \ge \sqrt{\pi}$;

4) $\pi\arccos x > (\arccos(-x))^2 - \pi^2$;

5) $\left|\arcsin\frac{2x-1}{x+2}\right|>1$;

6) $\arcsin x-\arccos\frac{x}{2}+arctg\, x\le\frac{5}{12}\pi$;

7) $\arcsin x+\arccos\left(x-\frac{1}{2}\right)\le\frac{5}{6}\pi$;

8) $\arcsin x-arcctg\, x>0$;

9) $arctg\, 2x+arctg\, 3x<\frac{3}{4}\pi$;

10) $2\arcsin x<\arccos\sqrt{1-4x^2}$;

11) $\frac{\arccos x-2}{\arcsin x}<-1$;

12) $\arccos\frac{x}{2}>2arctg\,(x-1)$.

Список использованной литературы

1. Дроздов, В.Б. Аркфункции в задачах / В.Б. Дроздов // Математика в школе.– 2010.–№ 4.– С. 31–35.
2. Литвиненко, В. Н. Практикум по решению математических задач: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов пед. ин–тов по матем. спец. / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович.– М.: Просвещение, 1984.– 288 с.
3. Мирошин, В.В. Обратные тригонометрические функции / В.В. Мирошин.– М.: Чистые пруды, 2007.– 32 с.
4. Блох, А.Ш. Неравенства / А.Ш. Блох, Т.Л. Трухан.–Мн.: Народная асвета, 1972.– 220 с.
5. Ляпин, М.П. Сборник задач по элементарной математике (с решениями). Пособие для подготовительных отделений и курсов / М.П. Ляпин.– Казань: Издательство Казанского университета, 1975.–696 с.