*УДК*51(07)

А.С. Гацура, У.А. Шылінец

АБ ВЫВУЧЭННІ АЛГЕБРЫ МАТРЫЦ І СІСТЭМ ЛІНЕЙНЫХ АЛГЕБРАІЧНЫХ РАЎНАННЯЎ У ШКОЛЕ

Паняцце матрыцы і заснаваны на гэтым паняцці раздзел матэматыкі – матрычная алгебра – маюць надзвычайна важнае значэнне.

Паняцце матрыцы ўпершыню ўзнікла ў сярэдзіне XIX стагоддзя ў працах ірландскага астранома і матэматыка У.Гамільтана і англійскага матэматыка А.Кэлі. Грунтоўныя вынікі ў тэорыі матрыц належаць К.Вейерштрасу, К.Жардану, Г.Фрабеніусу, І.А.Лапа-Данілеўскаму. Выяўленне сукупнасцяў матэматычных аб’ектаў у выглядзе матрыц і распрацаваныя правілы аперацый над імі аказаліся надзвычайна плённымі ў матэматыцы. Тэорыя матрыц знайшла шырокае прымяненне ў сучаснай навуцы, напрыклад, у фізічнай хіміі, тэарэтычнай фізіцы, электрадынаміцы, квантавай механіцы, а таксама пры рашэнні разнастайных задач планавання і кіравання вытворчасцю і іншых актуальных прыкладных праблем. Праца з матрыцамі не толькі эканоміць час, але і вызначае больш высокі ўзровень матэматычнай культуры і мыслення.

Гістарычна матэматычны апарат алгебры матрыц узнік у сувязі з аналізам і рашэннем сістэм лінейных алгебраічных раўнанняў. У сучасны час найбольш шырокае прымяненне сістэмы раўнанняў знайшлі для апісання матэматычных мадэляў разнастайных тэхнічных сістэм, тэхналагічных працэсаў, сацыяльных з’яў і т.п.

Усе гэтыя акалічнасці ўказваюць на неабходнасць вывучэння вучнямі агульнаадукацыйнай школы курса па выбару “Алгебра матрыц. Сістэмы лінейных алгебраічных раўнанняў”.

Дадзены курс па выбару мае наступныя мэты:

– пазнаёміць вучняў з матрычнай сімволікай і асноўнымі паняццямі алгебры матрыц;

– навучыць іх упэўнена аперыраваць з матрыцамі як аб’ектамі больш агульнага характару ў параўнанні з лікамі і функцыямі;

– пашырыць іх уяўленні аб магчымасцях матэматыкі;

– сфарміраваць у вучняў уяўленні аб сістэме лінейных алгебраічных раўнанняў як аб матэматычнай мадэлі;

– навучыць іх аналізаваць і рашаць сістэмы лінейных алгебраічных раўнанняў.

Курс па выбару “Алгебра матрыц. Сістэмы лінейных алгебраічных раўнанняў” можна рэалізаваць у X класе за 36 гадзін (1 гадзіна ў тыдзень).

У выніку вывучэння курса па выбару навучэнцы павінны даведацца пра:

– асноўныя формы і тыпы матрыц;

– матрычную сімволіку;

– асаблівасці матрычных аперацый;

– уласцівасці дэтэрмінантаў;

– азначэнне паняццяў мінораў і алгебраічных дадаткаў;

– асноўныя метады вылічэння дэтэрмінантаў;

– азначэнне паняцця лінейнага алгебраічнага раўнання;

– сэнс незалежных зменных і каэфіцыентаў лінейнага раўнання;

– геаметрычны вобраз лінейнага алгебраічнага раўнання ў 2-х, 3-мерных прасторах;

– геаметрычную інтэрпрытацыю супольнай і несупольнай, вызначанай і невызначанай сістэм раўнанняў;

– вызначэнне рангу матрыцы і базіснага мінора;

– асноўныя метады вылічэння рангу матрыц і рашэння сітэм раўнанняў;

– агульнае рашэнне сістэмы лінейных алгебраічных раўнанняў.

У выніку вывучэння курса па выбару “Алгебра матрыц. Сістэмы лінейных алгебраічных раўнанняў” вучні павінны ўмець:

– складываць, перамнажаць, транспанаваць і абарачаць матрыцы з рэчаіснымі элементамі;

– раскладаць дэтэрмінанты па Лапласу;

– вылічваць дэтэрмінанты метадам элементарных пераўтварэнняў, адзінага дзялення, апорнага элемента;

– адлюстроўваць вобраз па раўнанню і наадварот;

– аналізаваць сістэму лінейных алгебраічных раўнанняў па каэфіцыентах пашыранай матрыцы, зазначаць асаблівасці гэтай сістэмы;

– вывесці ўмовы паралельнасці і перпендыкулярнасці прамых і плоскасцей;

– вывесці прыметы супольнасці і несупольнасці, вызначанасці і невызначанасці сістэмы лінейных алгебраічных раўнанняў у 2-х і 3-мернай прасторы;

– рашаць сістэму па правілу Крамера, па алгарытму Жардана-Гаўса і абарачэннем матрыцы сістэмы.

Заняткі з вучнямі, на наш погляд, мэтазгодна праводзіць як у форме лекцый, калі даецца тэарэтычны матэрыял па канкрэтнай тэме, так і ў форме практычных заняткаў, калі ідзе падрабязны разбор прыкладаў і далей прапануюцца вучням задачы для самастойнага рашэння з адказамі.

Прапануецца наступны змест навучання.

№ п/п	Змест заняткаў	Форма заняткаў	Колькасць гадзін
1	2	3	4
1	Азначэнне лікавай матрыцы. Класіфікацыя матрыц. Дзеянні над матрыцамі.	Лекцыйныя заняткі	2
2	Дзеянні над матрыцамі.	Практычныя заняткі	4
3	Дэтэрмінанты другога і трэцяга парадку. Міноры і алгебраічныя дадаткі элементаў дэтэрмінанта. Уласцівасці дэтэрмінантаў. Паняцце аб дэтэрмінанце n-га парадку.	Лекцыйныя заняткі	2
4	Дэтэрмінанты, іх уласцівасці і прыёмы вылічэння.	Практычныя заняткі	6
5	Сістэмы лінейных раўнанняў. Класіфікацыя сістэм лінейных раўнанняў. Матрычны запіс сістэмы лінейных раўнанняў. Рашэнне сістэмы лінейных раўнанняў з дапамогай дэтэрмінантаў (формулы Крамера). Паняцце адваротнай матрыцы.	Лекцыйныя заняткі	4
6	Рашэнне сістэмы лінейных раўнанняў па метаду Крамера. Вылічэнне адваротнай матрыцы. Рашэнне сістэм лінейных раўнанняў па метаду адваротнай матрыцы.	Практычныя заняткі	8
7	Ранг матрыцы. Вылічэнне рангу матрыцы з дапамогай элементарных пераўтварэнняў. Крытэрый супольнасці сістэмы лінейных раўнанняў	Лекцыйныя заняткі	3
8	Вылічэне рангу матрыцы. Тэарэма Кронекера-Капелі. Метад Гаўса і Жардана-Гаўса	Практычныя заняткі	7

Праілюструем, напрыклад, як можна вучням падаць асноўныя звесткі аб матрыцах і аперацыях над імі.

Дапусцім, што некаторая фірма-пастаўшчык вырабляе і рэалізуе тавары двух відаў: тавар 1 і тавар 2. Пастаўкі ажыццяўляюцца штотыднёва тром розным фірмам-пакупнікам, назавем іх фірма 1, фірма 2 і фірма 3. Схема паставак наступная: тавар 1 пастаўляецца фірмам 1 – 3 у колькасці 31, 75 і 20 адпаведна, а тавар 2 – у колькасці 53, 82 і 49. Для кантроля паставак зручна скласці наступную табліцу.

Тавар	Колькасць тавару, пастаўляемага фірме		
	1	2	3
1	31	75	20
2	53	82	49

Сэнс гэтай простай табліцы відавочны: калі, напрыклад, нас цікавіць колькасць тавару 1, які пастаўляецца фірме 2, дастаткова ўзяць перасячэнне адпаведных радка і слупка, што адразу дае колькасць пастаўляемага тавару – 75. Калі цяпер скасаваць назвы радкоў і слупкоў, а застаўшуюся частку табліцы абазначыць праз A і адлюстраваць у выглядзе

$$A = \begin{pmatrix} 31 & 75 & 20 \\ 53 & 82 & 49 \end{pmatrix},$$

то атрымаем прыклад таго, што ў матэматыцы завецца матрыцай.

Дапусцім, што фірма 3 абанкруцілася, тады прыдзем да знікнення адпаведнага слупка. Калі адкінуць назвы і абазначыць застаўшуюся частку табліцы праз B, атрымаем яшчэ адзін прыклад матрыцы:

$$B = \begin{pmatrix} 31 & 75 \\ 53 & 82 \end{pmatrix}.$$

Цяпер дадзім неабходныя азначэнні.

Сукупнасць $m \cdot n$ лікаў, якія размешчаны ў выглядзе прамавугольнай табліцы з m радкоў і n слупкоў, называецца матрыцай памеру $m \times n$, або прамавугольнай матрыцай. Лікі, з якіх складзена матрыца, называюцца элементамі матрыцы. Наогул кажучы, элементамі матрыцы могуць быць аб'екты любой прыроды.

Матрыцы абазначаюцца вялікімі літарамі лацінскага алфавіту, а для абазначэння элементаў матрыцы выкарыстоўваюцца маленькія літары з двайнымі індэксамі: a_{ij}. Індэкс "i" адказвае за нумар радка матрыцы, індэкс "j" – за нумар слупка. Для матрыцы A памерам $m \times n$ выкарыстоўваюцца наступныя абазначэнні:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

або, у скарочаным запісу, $A=\left(a_{ij}\right)$; i=1, 2, ..., m, j=1, 2, …, n.

Поруч з круглымі дужкамі ўжываюць і іншыя абазначэнні матрыцы: [ ], ‖ ‖.

Напрыклад, для матрыцы B, разгледжанай вышэй, маем у агульных абазначэннях

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрыцы B, відавочна, маюць наступныя значэнні:

$$b_{11}=31, \quad b_{12}=75, \quad b_{21}=53, \quad b_{22}=82.$$

Сапраўды, напрыклад, b_{12} стаіць на перасячэнні першага радка і другога слупка матрыцы:

$$B=\begin{pmatrix} 32 & \boxed{75} \\ 53 & 82 \end{pmatrix}$$

Першы радок

Другі слупок

што дае лік 75. Аналагічна знаходзяць астатнія элементы B.

Матрыца, якая складаецца з аднаго радка і n слупкоў, г.зн. памеру $1\times n$, называецца матрыцай-радком або радковай матрыцай. Такая матрыца мае выгляд

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Аналагічна матрыца памеру $m\times 1$, г.зн. складаецца з m радкоў і аднаго слупка, называецца матрыцай-слупком або слупковай матрыцай і мае выгляд

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Дзве матрыцы называюцца роўнымі, калі яны аднолькавых памераў і элементы адной матрыцы роўныя адпаведным элементам другой матрыцы. Такім чынам, $A_{m\times n}=B_{p\times k}$, калі $m=p$, $n=k$ і $a_{ij}=b_{ij}$ (i=1, 2,..., m, j=1, 2,…, n).

Матрыца, у якой лік радкоў роўны ліку слупкоў $(m=n)$, называецца квадратовай. Парадкам квадратовай матрыцы называецца лік яе радкоў (або слупкоў). Матрыцы

$$(a_{11}), \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

з'яўляюцца квадратовымі матрыцамі адпаведна першага, другога і трэцяга парадкаў.

Элементы матрыцы a_{ij}, у якіх нумар радка роўны нумару слупка $(i = j)$, называюцца дыяганальнымі і ўтвараюць галоўную дыяганаль матрыцы. Для квадратовай матрыцы парадку *n* галоўную дыяганаль утвараюць элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$.

Калі ўсе недыяганальныя элементы квадратовай матрыцы роўныя нулю, то матрыца называецца дыяганальнай. Напрыклад, $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – дыяганальная матрыца трэцяга парадку.

Калі ў дыяганальнай матрыцы *n*-га парадку ўсе дыяганальныя элементы роўныя адзінцы, то матрыца называецца адзінкавай матрыцай *n*-га парадку і абазначаецца літарай *E*.

Матрыца любога памеру называецца нулявой, або нуль-матрыцай, калі ўсе яе элементы роўныя нулю. Яе абазначаюць літарай *O*.

Квадратовая матрыца называецца трохвугольнай, калі ўсе элементы, размешчаныя па адзін бок ад галоўнай дыяганалі, роўныя нулю. Пры гэтым матрыцу выгляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называюць верхняй трохвугольнай, а матрыцу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} -$$

ніжняй трохвугольнай.

Сіметрычнай матрыцай называецца квадратовая матрыца, у якой элементы, размешчаныя сіметрычна адносна галоўнай дыяганалі, роўныя адзін другому, г.зн. $a_{ik} = a_{ki}$ (i=1, 2,..., n, j=1, 2,…, n). Яна мае выгляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Над матрыцамі, як і над лікамі, можна ажыццяўляць шэраг аперацый, прычым некаторыя з іх аналагічныя аперацыям над лікамі, а некаторыя спецыфічныя.

Вернемся да прыкладу з фірмай-пастаўшчыком. Дапусцім, што ў першы тыдзень пастаўкі задаюцца матрыцай

$$A = \begin{pmatrix} 31 & 75 & 20 \\ 53 & 82 & 49 \end{pmatrix},$$

а ў другі тыдзеньняхай матрыца, якая вызначае пастаўкі, будзе

$$B = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 11 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Для кіраўніка фірмы выклікае інтарэс не толькі інфармацыя аб тыднёвых пастаўках, але і сумарны аб’ём продажу за два тыдні. Відавочна, што калі ў першы тыдзень тавар 1 пастаўляецца фірме 2 у колькасці 75, а ў другі тыдзень – адпаведна ў колькасці 15, то за два тыдні фірма 2 атрымала 90 адзінак тавару 1. Аналагічныя разважанні справядлівыя для астатніх фірм-пакупнікоў, а таксама для тавару 2. Калі матрыцу, якая выражае сумарныя пастаўкі, абазначыць праз *C*, то для яе будзем мець

$$C = \begin{pmatrix} 31+20 & 75+15 & 20+10 \\ 53+11 & 82+5 & 49+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 90 & 30 \\ 64 & 87 & 60 \end{pmatrix}.$$

У агульным выпадку маем наступнае азначэнне.

Сумай дзвюх матрыц *A* і *B* аднолькавага памеру $m \times n$ называецца матрыца $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такая, што $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (i=1, 2,..., m, j=1, 2,…, n).

Сума матрыц *A* і *B* абазначаецца *A*+*B*.

Наступная аперацыя, якую можна ажыццяўляць над матрыцамі, – гэта множанне матрыцы на адвольны рэчаісны лік. Звернемся зноў да прыкладу з фірмай-пастаўшчыком.

Няхай тыднёвая пастаўка тавараў задаецца матрыцай

$$A = \begin{pmatrix} 31 & 75 & 20 \\ 53 & 82 & 49 \end{pmatrix}.$$

Дапусцім далей, што на працягу трох тыдняў аб’ёмы паставак не мяняліся. Пытаецца, якія пастаўкі тавараў за тры тыдні.

Калі ўзяць пэўны тавар, напрыклад тавар 1, і канкрэтную фірму-пакупнік, няхай гэта будзе фірма 3, зразумела, што пастаўкі гэтай фірмы за тры тыдні будуць у 3 разы большыя, чым за тыдзень, г.зн. не 20, а 60. Тое ж самае справядлівае для іншых тавараў і фірм, а гэта ў сваю чаргу азначае: кожны элемент матрыцы паставак за тры тыдні ў 3 разы большы адпаведнага элемента матрыцы тыднёвых паставак. Калі абазначыцьматрыцу паставак за тры тыдні праз *B*, то можна запісаць

$$B = \begin{pmatrix} 3\cdot 31 & 3\cdot 75 & 3\cdot 20 \\ 3\cdot 53 & 3\cdot 82 & 3\cdot 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93 & 225 & 60 \\ 159 & 246 & 147 \end{pmatrix}.$$

Цяпер дадзім азначэнне для агульнага выпадку.

Здабыткам матрыцы $A_{m\times n}$ на лік λ называецца матрыца $B_{m\times n}$, атрыманая з матрыцы $A_{m\times n}$ шляхам множання ўсіх яе элементаў на лік λ, г.зн. элементы b_{ij} матрыцы $B_{m\times n}$ вызначаюцца па формуле:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} \ (i=1, 2,..., m;\ j=1, 2,\dots, n).$$

Здабытак матрыцы $A_{m\times n}$ на лік λ абазначаецца λA.

Аперацыі над матрыцамі, якія разглядаліся да гэтага моманту, выглядзяць дастаткова натуральнымі і не выклікаюць асаблівых складанасцяў для разумення. Наступная аперацыя – множанне матрыц – можа, на першы погляд, паказацца складанай і ненатуральнай. Таму спачатку звернемся да прыкладу.

Мяркуем, што фірма набывае тавары трох выглядаў G_1, G_2 і G_3 у колькасці 60, 110, 120 адпаведна, што можна адлюстраваць матрыцай-радком Q: $Q = (60, 110, 120)$. Цана G_1 складае 11 за адзінку тавару, цана G_2 – 7 і цана G_3 – 8, што можна адлюстраваць матрыцай-слупком $P = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Нас цікавіць, якія агульныя затраты фірмы на набыцце гэтых тавараў па адзначаных цэнах. Адказ відавочны: трэба памножыць колькасць кожнага тавару на адпаведную цану і скласці прамежкавыя вынікі, што дае $60\cdot 11 + 110\cdot 7 + 120\cdot 8 = 2390$. Гэтую паслядоўнасць дзеянняў можна адлюстраваць у наступным выглядзе:

$$\begin{pmatrix} 60 & 110 & 120 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2390 \end{pmatrix}.$$

Лініямі злучаны лікі з матрыцы-радка і матрыцы-слупка, якія перамнажаюцца. Пры гэтым першы элемент матрыцы-радка памнажаецца на першы элемент матрыцы-слупка, другі элемент – на другі, трэці – на трэці. Атрыманыя тры лікі складваюцца.

Улічваючы, што матрыца-радок і матрыца-слупок – гэта прыватныя выпадкі матрыц, можна перайсці да агульнага азначэння множання матрыц.

Здабыткам матрыцы $A_{m\times k}$ на матрыцу $B_{k\times n}$ называецца такая матрыца $C_{m\times n}$, кожны элемент якой c_{ij}, які стаіць на перасячэнні *i*-га радка і *j*-га слупка матрыцы *C*, атрымліваецца ў выглядзе здабытку *i*-га радка матрыцы *A* на *j*-ы слупок матрыцы *B*.

Здабытак *i*-га радка матрыцы *A* на *j*-ы слупок матрыцы *B* ажыццяўляецца па правілу множання матрыцы-радка на матрыцу-слупок.

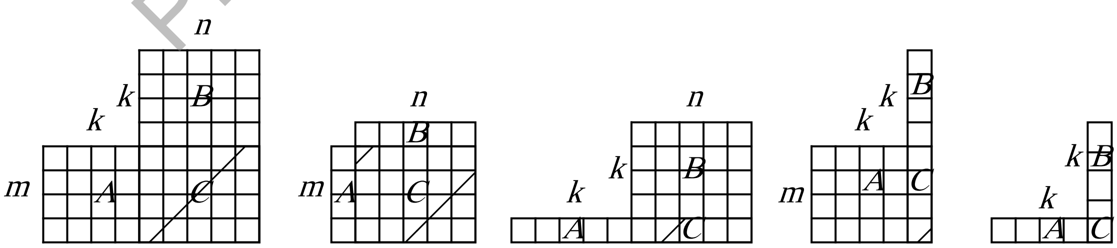
З азначэння вынікае, што дзве матрыцы можна перамнажаць, калі колькасць слупкоў першай матрыцы *A* роўная колькасці радкоў другой матрыцы *B*, прычым лік радкоў матрыцы *AB* роўны ліку радкоў матрыцы *A*, лік жа слупкоў матрыцы *AB* роўны ліку слупкоў матрыцы *B*.

Разгледзім асаблівасці аперацыі множання матрыц. Непасрэдным множаннем лёгка доказваецца, што аперацыя множання матрыц у агульным выпадку не камутатыўная, г.зн. $AB \neq BA$. Сапраўды, $A_{m\times n}\cdot B_{n\times m} = C_{m\times m}$, $B_{n\times m}\cdot A_{m\times n} = \overline{C}_{n\times n}$, аднак $C \neq \overline{C}$; $A_{m\times n}\cdot B_{n\times k} = C_{m\times k}$; здабытак $B_{n\times k}\cdot A_{m\times n}$ проста не існуе, бо колькасць слупкоў левай матрыцы не роўная колькасці радкоў правай матрыцы. Значыць, множанне немагчыма.

Адзначым, што здабытак ненулявых матрыц можа быць нулявой матрыцай. Напрыклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Магчымыя памеры матрыц, здабытак якіх існуе, паказан на схеме множання (рыс.1).



$A_{m\times k}, B_{k\times n}$, $AB = C_{m\times n}$ $A_{m\times 1}, B_{1\times n}$, $AB = C_{m\times n}$ $A_{1\times k}, B_{k\times n}$, $AB = C_{1\times n}$ $A_{m\times k}, B_{k\times 1}$, $AB = C_{m\times 1}$ $A_{1\times k}, B_{k\times 1}$, $AB = C_{1\times 1}$

Рыс 1

Літаратура

1. Боревич З.И. Определители и матрицы. М., 1970.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967.
3. Годунов С.К. Решение систем линейных уравнений. Новосибирск, 1980.
4. Маргулис Б.Е. Система линейных уравнений. М., 1960.
5. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. Киев, 1977.
6. Сирл Г., Госман У. Матричная алгебра в экономике. М., 1974.
7. Гусак Г.М. Система алгебраических уравнений . Мн., 1983
8. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов. СПб., 2001.
9. Блох Э.Л., Лошинский Л.И., Турин В.Я. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения. М., 1971.
10. Рублев А.Н. Линейная алгебра. М., 1968.
11. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., 1987.
12. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М., 1975.