МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Белорусский государственный педагогический университет имени
Максима Танка»

Г.Л.Муравьева, А.А.Покало, Н.В.Толстик, А.Н.Щиряков

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

В трех частях

Часть 1

Минск 2008

ТЕМА 1.

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ.

§ 1. Операции над множествами

1.1 Понятие множества.

Понятие множества является одним из основных понятий математики. Поясним его примерами. Так, можно говорить о множестве гласных букв русского алфавита, о множестве учащихся некоторой школы, о множестве решений неравенства. $x+5>12x$, о множестве парт в данной аудитории и т.д. В повседневной жизни вместо слова «множество» употребляют слова «набор», «собрание», «коллекция», «стадо», «табун» и т.д.

Объекты любой природы (люди, дома, книги, геометрические фигуры, числа и т.д.), составляющие множество, называют его элементами. Например, число 3 является элементом множества натуральных чисел, май — элементом множества месяцев в году. Отношение между множеством и его элементами, которое мы выразили словами *является элементом*, выражают и при помощи слова *принадлежит*. Так, можно сказать, что число 3 принадлежит множеству натуральных чисел.

Для сокращения записи различных высказываний о множествах и их элементах принята следующая символика: множества обычно обозначают большими буквами латинского алфавита, а их элементы — малыми, слово «принадлежит» заменяют символом $\in$.

Высказывание «Объект a принадлежит множеству A» записывают так: $a\in A$. Запись $a\in A$ можно прочитать иначе: «Объект a есть элемент множества A».

Высказывание «Элемент a не принадлежит множеству A» записывают так: $a\notin A$, причем эта запись может быть прочитана и иначе: «Объект a не является элементом множества A».

Например, если A — множество четных натуральных чисел, то следующие высказывания об элементах множества A истинны: $16\in A$, $328\in A$, $17\notin A$, $1\frac{2}{3}\notin A$.

Для некоторых числовых множеств имеются специальные обозначения. Так, множество всех натуральных чисел обозначают буквой $\boldsymbol{N}$, множество целых неотрицательных чисел — буквой $\boldsymbol{Z}_0$,, множество всех целых чисел — буквой $\boldsymbol{Z}$, множество всех рациональных чисел — буквой $\boldsymbol{Q}$ и множество всех действительных чисел — буквой $\boldsymbol{R}$.

Множества могут содержать как конечное число элементов, так и бесконечное. Так, множество предметов, изучаемых в школе, конечно, а множество точек прямой бесконечно.

Множество может содержать и один элемент. Например, множество гласных букв в слове «шар» состоит из одного элемента — буквы «а».

Рассматривают в математике и множество, не содержащее ни одного элемента; его называют *пустым множеством* и обозначают символом $\varnothing$. Существует лишь одно пустое множество. Примерами пустого множества могут служить: множество людей на Солнце, множество натуральных чисел, расположенных на числовой прямой левее единицы, множество действительных корней уравнения $4x+5=4(x–7)$.

Элементами множества могут быть множества. Например, можно говорить о множестве классов некоторой школы. Элементы этого множества — классы, являющиеся в свою очередь множествами учащихся. Но учащиеся уже не являются элементами множества классов школы.

1.2. Способы задания множеств. Равные множества

Множество считают заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит. Множество можно задать, перечислив все его элементы. Так, если a, b, c, d — обозначения различных объектов, то множество A этих объектов записывают: $A=\{a; b; c; d\}$ и читают: «A — множество, элементы которого a, b, c, d.

Указанный способ задания множеств применим только для конечных множеств, да и то при условии, что число элементов множества невелико. Другой способ задания множеств состоит в следующем: формулируют *характеристическое свойство* элементов множества, т.е. свойство, которым обладают все элементы этого множества и только они. Например, множество M натуральных чисел, меньших 6. Это множество задано вторым способом: указано характеристическое свойство всех элементов множества M, а именно свойство быть натуральным числом и меньшим числа 6. В данном случае элементы множества М можно перечислить: $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Множество, для элементов которого указано некоторое характеристическое свойство, условимся обозначать так: в фигурных скобках пишется обозначение элемента, затем проводится вертикальная черта, после которой пишется свойство, которым обладают элементы данного множества и только они. Например, множество M натуральных чисел, меньших 6, запишется так:

$$M=\{x \mid x \in N \text{ и } x<6\} \text{ или } M=\{x \mid x \in N, x<6\}.$$

Таким образом, для того чтобы задать некоторое множество, надо либо перечислить его элементы, либо указать характеристическое свойство его элементов. Отметим, что второй способ применим для задания множеств, содержащих как конечное число элементов, так и бесконечно много элементов. Например, множество A точек M, лежащих на окружности радиуса r с центром в точке O, запишется следующим образом: $A=\{M \mid OM=r\}$.

Определение 1. Множества A и B считают *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

В этом случае пишут $A=B$.

Например, множества $A=\{1^2; 2^2; 3^2; 4^2\}$ и $B=\{\sqrt{1}; \sqrt{16}; \sqrt{81}; \sqrt{256}\}$ равны, так как оба множества состоят из чисел 1, 4, 9 и 16.

1.3. Подмножества. Диаграммы Эйлера—Венна

Пусть A — множество рек в Европе, а В = {Волга; Днепр; Сена; Ока}. Множество B является частью множества A, поскольку каждый элемент B является рекой, протекающей в Европе. Говорят, что B является подмножеством множества A.

Определение 2. Множество B называют *подмножеством* множества A, если каждый элемент B принадлежит множеству A.

Записывают это так: $B \subset A$. Говорят также «B включено в множество A». Это высказывание эквивалентно следующему: «В множество A включено множество B», то есть $A \supset B$..

Согласно данному определению подмножества, каждое множество является подмножеством самого себя: $A \subset A$. Кроме того, считают, что пустое множество есть подмножество любого множества A: $\varnothing \subset A$.

A и $\varnothing$ называют *несобственными подмножествами* множества A, все остальные — *собственными подмножествами* множества A.

Очевидно, что если $B \subset A$ и $A \subset B$, то $A = B$. Из этого утверждения вытекает один из способов доказательства равенства двух множеств: если доказано, что любой элемент из B является элементом множества A и, в свою очередь, любой элемент из A является элементом множества B, то делают вывод, что $A = B$.

Кроме того, если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$. Действительно, если каждый элемент множества A принадлежит B, а каждый элемент множества B является, в свою очередь, элементом C, то каждый элемент из A принадлежит множеству C.

Понятия множества и подмножества используются при определении многих понятий математики, в частности при определении геометрической фигуры.

Определение 3. *Геометрической фигурой* называется всякое множество точек.

Таким образом, отрезок, луч, прямая, треугольник, шар, куб и т.д. — все это геометрические фигуры. Так как множество может состоять из одного элемента, то отдельно взятая точка (точнее говоря, множество, состоящее из одной точки) является геометрической фигурой, так же как и любое конечное множество точек.

Чтобы наглядно изображать множества и отношения между ними, рисуют геометрические фигуры, которые находятся между собой в этих отношениях. Например, если мы хотим наглядно изобразить, что множество A является собственным подмножеством множества B, то рисуем эти множества как на рисунке 1. Если же надо показать, что множества A и B не имеют общих элементов, то эти множества изображают так, как на рисунке 2. Такие изображения множеств называют *диаграммами Эйлера—Венна*[1] (или *кругами Эйлера*, или *диаграммами Венна*)

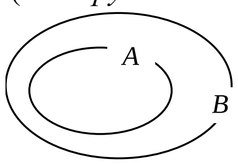


Рис. 1

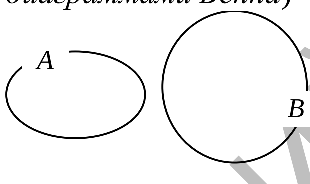


Рис. 2

Нередко бывает так, что рассматривают только подмножества одного и того же множества I. Такое множество $\boldsymbol{I}$ называют *универсальным множеством*. Так, если A — множество студентов (мужчин) первого курса некоторого института, B — множество студенток в этом же институте, C — множество спортсменов этого же института, то в качестве универсального множества I можно взять множество всех студентов данного института, потому что тогда $A \subset I$, $B \subset I$, $C \subset I$.

На диаграммах Эйлера—Венна универсальное множество I часто изображают в виде прямоугольника, а его подмножества — кругами Эйлера. Например, описанный пример про студентов графически выглядит так:

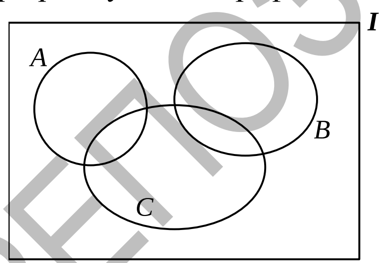


Рис. 3

1.4. Пересечение множеств

Определение 4. *Пересечением множеств* A и B называют множество, включающее те и только те элементы, которые одновременно принадлежат множествам A и B.

Обозначается: $A \cap B$, где символ $\cap$ — знак пересечения множеств.

Например, если $A = \{a; b; c; d\}$ и $B = \{c; d; e\}$, то $A \cap B = \{c; d\}$.

Сформулированное определение пересечения двух множеств можно записать с

---

[1] Эйлер Леонард (1707—1783) — швейцарский математик, член Петербургской Академии наук; Венн Джон (1834—1923) — английский математик.

помощью характеристического свойства:

$A \cap B = \ x \,|\, x \in A$ и $x \in B \ .$

Если множества A и B не имеют общих элементов, говорят, что эти множества *не пересекаются*, и пишут $A \cap B = \varnothing.$ Например, не пересекаются множества треугольников и параллелограммов.

Если же множества A и B имеют хотя бы один общий элемент, то говорят, что множества A и B *пересекаются* или что пересечение множеств А и В *непусто*, и пишут $A \cap B \neq \varnothing.$

На рисунке 4 множество А∩В изображено заштрихованной областью.

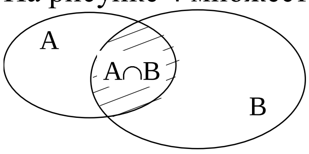


Рис. 4

Свойства пересечения множеств.

1°. Пересечение множеств *коммутативно*: для любых множеств A и B имеем

$A \cap B = B \cap A.$ (1)

Доказательство следует из определения операции пересечения множеств A и B.

2°. Пересечение множеств *ассоциативно*: для любых множеств A, B, C имеем

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$ (2)

Доказательство проведем с помощью кругов Эйлера[2].

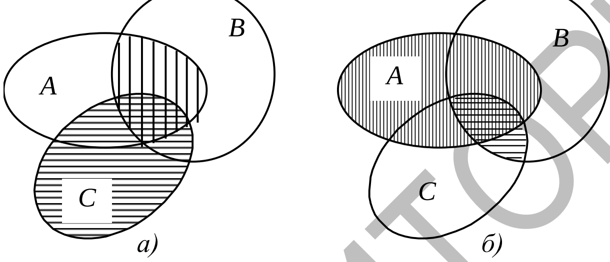


Рис. 5

Левая часть равенства изображена на рисунке 5, а) (вертикальной штриховкой отмечено множество $A \cap B,$ а горизонтальной — множество C); область, заштрихованная, изображает множество $(A \cap B) \cap C.$ На рисунке 5, б) вертикальной штриховкой отмечено множество A, а горизонтальной — множество $B \cap C;$ а область, заштрихованная дважды, изображает множество $A \cap (B \cap C).$ Сравнивая области, заштрихованные дважды на рисунках 5, а) и 5, б), приходим к выводу, что множества $(A \cap B) \cap C$ и $A \cap (B \cap C)$ равны.

Это свойство позволяет записывать выражение $A \cap B \cap C$ без скобок и говорить о пересечении любого количества множеств.

3°. Если $A \subset B,$ то $A \cap B = A.$ (3)

В частности для любого множества A имеем:

$A \cap A = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cap I = A.$ (4)

1.5. Объединение множеств.

Рассмотрим еще один из способов получения нового множества из двух данных.

Определение 5. *Объединением двух множеств A и B* называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Объединение множеств A и B обозначают $A \cup B$, где символ ∪ — знак объединения

---

[2] С точки зрения математики — это всего лишь иллюстрация. Но *в нашем курсе* такие рассуждения *договоримся считать* строгими доказательствами.

множеств.

Пример 1. Пусть $A=\{1;3;5\}$ и $B=\{2;4\}$. Тогда $A\cup B=\{1;2;3;4;5\}$.

На рисунке 6 множество $A\cup B$ изображено заштрихованной областью.

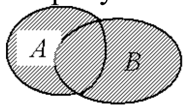


Рис. 6

По определению в объединение двух множеств A и B могут входить элементы из A, не принадлежащие множеству B, элементы из B, не принадлежащие A, и элементы, принадлежащие множествам A и B одновременно.

Определение объединения двух множеств можно записать и так:

$A\cup B=\{x\,|\,x\in A$ или $x\in B\}$.

Свойства объединения множеств.

1°. Для любых множеств A и B имеем:

$A\cup B=B\cup A$ (коммутативность). (5)

2°. Для любых множеств A, B и C имеем:

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (ассоциативность). (6)

Это свойство позволяет писать выражение $A\cup B\cup C$ без скобок и говорить про объединение любого числа множеств.

Доказательство проведите самостоятельно.

3°. Если $B\subset A$, то $A\cup B=A$.

Это утверждение докажите самостоятельно.

В частности, для любого множества A имеем:

$A\cup A=A$; $A\cup\varnothing=A$; $A\cup I=I$.

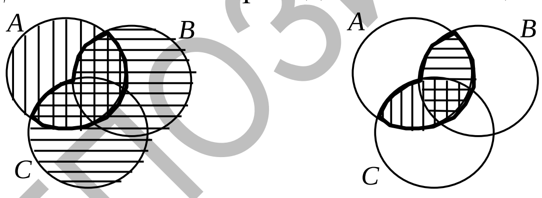
Связь между операциями пересечения и объединения множеств отражают свойства *дистрибутивности*.

4°. Для любых множеств A, B и C справедливы равенства:

а) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; (7)

б) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. (8)

Доказательство проводится с помощью кругов Эйлера. Докажем 4°, а).



а) б)

Рис. 7

На рисунке 7 а) соответствует левой части равенства, б) — правой. На диаграмме а) вертикальной штриховкой отмечено множество A, горизонтальной — множество $B\cup C$; двойная штриховка соответствует множеству $A\cap(B\cup C)$ (оно еще выделено более жирной линией). На диаграмме б) горизонтальной штриховкой показано множество $A\cap B$, вертикальной — $A\cap C$, итог $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ — вся заштрихованная область (она дополнительно выделена жирной линией). Рассматривая полученные области, приходим к выводу, что равенство истинно.

Доказательство 4°, б) проведите самостоятельно.

1.6. Разность множеств. Дополнение к подмножеству

Определение 6. *Разностью двух множеств* A и B называется такое множество, в которое входят все те элементы, которые принадлежат A и не принадлежат B.

Разность множеств A и B обозначают символом $A \setminus B$.

Например, если $A = \{a; b; d; m; n; x\}$, $B = \{b; m; x; y\}$, то $A \setminus B = \{a; d; n\}$. Эта разность на рисунке 8 показана штриховкой.

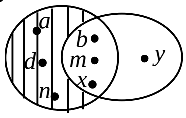


Рис. 8

Определение разности множеств можно записать в таком виде:

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Определение 7. Пусть B — подмножество множества A. Тогда разность множеств $A \setminus B$ называют дополнением подмножества B до множества A.

Обозначают: $B_A^{/}$ или $\overline{B}_A$. Мы будем чаще пользоваться последним. На рисунке 9 дана графическая иллюстрация дополнения.

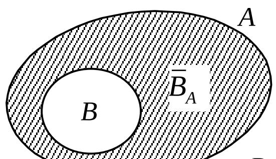


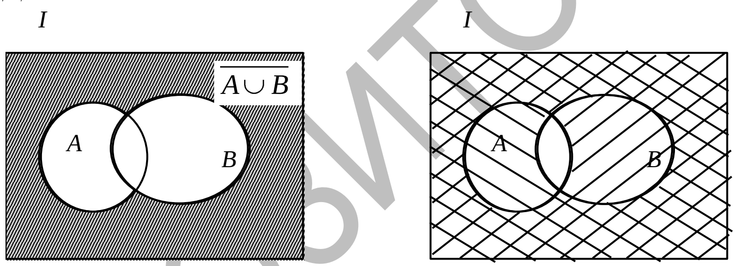
Рис. 9

Дополнение множества B до универсального множества I обозначают $\overline{B}$.

Дополнение обладает следующими свойствами (**законы де Моргана для множеств**):

1°. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. (9)

Доказательство.



а) б)

Рис. 10

На рисунке 10, а) штриховкой показано дополнение к объединению, на рисунке 10, б) результату соответствует двойная штриховка. В итоге получили одинаковые фигуры, т.е. равенство истинно.

2°. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. (10)

Доказательство проведите самостоятельно.

1.7. Декартово[3] произведение множеств

Декартово произведение. В повседневной жизни мы часто используем слово «пара»: пара лошадей, танцевальная пара и т.д. Если порядок элементов в паре играет роль, то пару называют *упорядоченной*. Например, число 49 состоит из двух цифр: 4 и 9. Если их поменять в записи числа местами, то получим другое число — 94. В первом случае мы имеем дело с упорядоченной парой (4; 9), во втором — с упорядоченной парой (9; 4). В паре элементы могут быть и равными.

[3] Рене Декарт (1596—1650) — французский философ, математик, физик, физиолог.

Определение 8. Две упорядоченные пары $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ называются равными тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Определение. Декартовым произведением множеств X и Y называется множество $X \times Y$, элементами которого являются все пары $(x; y)$ такие, что $x \in X$, $y \in Y$, т.е.

$X \times Y = \{(x;\ y) \mid x \in X \text{ и } y \in Y\}$.

Пример 2. Пусть $M = \{1; 3; 5\}$ и $N = \{k; l\}$. Найти $M \times N$.

Решение. $M \times N = \{(1;k), (1;l), (3;k), (3;l), (5;k), (5;l)\}$.

Декартовым произведением множеств X и X называется множество $X \times X = X^2$ и называется декартовым квадратом.

Декартово произведение множеств, вообще говоря, не обладает ни свойством коммутативности, ни свойством ассоциативности.

Полагают, что $X \times \varnothing = \varnothing \times X = \varnothing$ для любого множества X.

Если множества X и Y — числовые, то пары элементов $(x; y)$ можно рассматривать как координаты точек на плоскости. В этом случае декартово произведение можно изобразить в системе координат.

Пример 3. Изобразить декартового произведение $X \times Y$ на координатной плоскости, если $X = \{-2; 0; 3\}$, $Y = \{-3; 3\}$.

Решение. $X \times Y = \{(-2; -3), (-2; 3), (0; -3), (0; 3), (3; -3), (3; 3)\}$. Изображение — на рисунке 11.

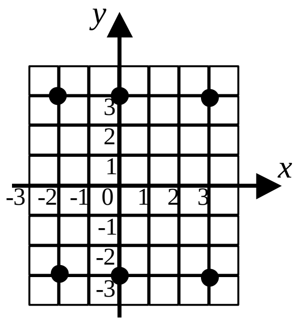


Рис. 11

Свойства декартова произведения. Декартово произведение множеств дистрибутивно относительно объединения, пересечения и разности множеств (как справа, так и слева).

Левые дистрибутивные законы:

1°. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. (11)

2°. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$. (12)

3°. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$. (13)

Доказательство. Докажем равенство (11). Выше мы отмечали, что если $B \subset A$ и $A \subset B$, то $A = B$ (§1, п. 3). То есть надо доказать, что $A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)$ и $(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$.

а) Докажем, что $A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)$. Напомним: $M \subset N$, если каждый элемент из множества M принадлежит множеству N. Пусть

$(x,\ y) \in A \times (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ и $y \in B \cup C \Rightarrow x \in A$ и $(y \in B$ или $y \in C) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A$ и $y \in B)$ или $(x \in A$ и $y \in C) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,\ y) \in A \times B$ или $(x,\ y) \in A \times C \Rightarrow (x,\ y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

Таким образом, мы доказали, что любой элемент (пара $(x,\ y)$) множества, записанного в левой части равенства (1) является элементом множества, записанного в правой части этого же равенства.. То есть $A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)$.

б) Теперь докажем, что $(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$.

$(x,\ y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \Rightarrow (x,\ y) \in (A \times B)$ или $(x,\ y) \in (A \times C) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \in A$ и $y \in B)$ или $(x \in A$ и $y \in C) \Rightarrow (x \in A)$ и $(y \in B$ или $y \in C) \Rightarrow$
$x \in A$ и $y \in B \cup C \Rightarrow (x,\ y) \in A \times (B \cup C)$.

Мы доказали, что $(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$.

Из пунктов а) и б) следует истинность доказываемого равенства (11).

Равенства (12) и (13) докажите самостоятельно.

Справедливы и *правые дистрибутивные законы* декартова произведения относительно объединения, пересечения и разности двух множеств:

4°. $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$. (14)

5°. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$. (15)

6°. $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$. (16)

Примем их без доказательства.

1.8. Кортежи

Если задано множество *X*, то из его элементов можно составлять не только упорядоченные пары, по и упорядоченные тройки элементов, четверки элементов и т.д. Например, буквы слова «телефон» образуют упорядоченную семерку. Введем общее математическое понятие, частными случаями которого являются и упорядоченные пары, и упорядоченные тройки, и упорядоченные четверки.

Пусть даны множества $X_1, X_2, ..., X_n$. Возьмем какой-нибудь элемент a_1 из множества X_1, потом элемент a_2 из множества X_2, …, элемент a_n из множества X_n. Выбранные элементы расположим по порядку: $(a_1; a_2; ...; a_n)$. Мы получаем *упорядоченную n-ку* элементов (читается: «энка»), выбранных из множеств $X_1, X_2, ..., X_n$. Вместо слов «упорядоченная *n*-ка» говорят короче — «кортеж» (французское слово «кортеж» означает торжественное шествие, например, говорят «свадебный кортеж» или «кортеж автомашин»). Число *n* называют *длиной кортежа*, элементы $a_1; a_2; ...; a_n$ — его *компонентами*. Часто кортеж записывается с помощью угольных скобок: $\langle p_1,\ p_2,\ ...,\ p_k \rangle$.

Множества $X_1, X_2, ..., X_n$ могут иметь общие элементы или даже совпадать друг с другом. Например, слово «телефон» — кортеж длины 7 составленный из элементов множества *X* = {а; б; в; …; ю; я} (при этом в слово «телефон» входят не все буквы этого множества, а лишь часть этих букв).

Определение 9. Два кортежа $(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $(b_1, b_2, ..., b_m)$ называют *равными*, если они имеют одинаковую длину, т.е. $n = m$, и каждая компонента первого кортежа равна компоненте второго кортежа с тем же номером, т.е. $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ ...,\ a_n = b_m$.

Используя понятие кортежа, можно определить понятие декартова произведения трех, четырех и, вообще, *n* множеств.

Пусть заданы *n* множеств: $A_1, A_2, ..., A_n$ (множества могут иметь общие элементы). Из элементов этих множеств образуем кортежи длины *n*, первая компонента которых принадлежит множеству A_1, вторая — множеству A_2,..., *n*-я — множеству A_n. Множество таких кортежей называют декартовым произведением множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ и обозначают $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Например, декартово произведение множеств $A_1 = a;b$, $A_2 = 1;2$, $A_3 = 3;4;5$ имеет вид:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{\ a;1;3\ ,\ a;1;4\ ,\ a;1;5\ ,\ a;2;3\ ,\ a;2;4\ ,\ a;2;5\ ,$$
$$b;1;3\ ,\ b;1;4\ ,\ b;1;5\ ,\ b;2;3\ ,\ b;2;4\ ,\ b;2;5\ \}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Даны множества: А = {а, {а, й, в, р, к}, в, к, л}, В = {озеро, конь, как, каравай, елка,

голубь}, С – множество разных букв в слове «каравай».

а) Задайте множество С перечислением элементов;

б) назовите истинные высказывания: як $\in$ В, ра $\in$ С, голубка $\in$ В, каравай $\in$ В, каравай $\in$ С, С $\in$ В, С $\in$ А.

2. Даны три множества: D —множество вторых классов в параллели школы (5 классов), К —множество учеников вторых классов, Е —множество учеников во $2^В$ классе. Известно, что во $2^А$ классе— 23 ученика, во $2^Б$ классе —27 учеников, во $2^В$ классе— 22 ученика, во $2^Г$ классе —30 учеников, во $2^Д$ классе—27 учеников.

а) Сколько элементов во множестве D?

б) Сколько элементов во множестве К ?

в) Сколько элементов во множестве Е ?

г) Какое утверждение истинное: $E \in D$, $E \in K$, $E \subset D$, $E \subset K$, $K \subset D$?

3. В каком отношении находятся множества А и В, если А- множество четных чисел, а В – это:

а) множество чисел кратных 7,

б) множество чисел кратных 4,

в) множество чисел кратных 2,

г) множество нечетных чисел ?

4. Задайте множества перечислением элементов:

а) $X = \{x \mid x \in N, x<4\}$;

б) $B=\{b \mid b \in N, -4<b \leq 6\}$;

в) $C=\{c \mid c \in Z, -4<c \leq 3\}$;

г) $K==\{k \mid k \in Z, k^2+2 \leq 9\}$;

д) $P=\{p \mid p \in N, p^2+5p-6=0\}$;

е) $F=\{f \mid f \in R, 2f^2+2f-5=0\}$;

ж) $D=\{d \mid d \in N, d<0\}$;

з) $M=\{m \mid m \in R, |m|=7\}$;

и) $S=\{s \mid s \in R, s^2 \leq 0\}$;

к) $A=\{a \mid a \in N, |a|<4\}$.

5. Задайте множество А описанием характеристического свойства, если:

а) $A=[8,15)$;

б) $A=(-\infty;3,1]$;

в) $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

6. Заданы два множества: N (натуральных чисел) и $A==\{x \mid x \in N, x \,\vdots\, 3\}$. Действительно ли, что $9 \in A$, $5 \in A$, $5 \in (N \setminus A)$,), $12 \in (N \setminus A)$, $-17 \in (N \setminus A)$, $21 \in (N \setminus A)$?

7. Найдите разность $A \setminus B$, если $A=\{a, b, c, d, e\}$ и

а) $B=\{ c, d, e \}$; б) $B=\{a, c, e \}$; в) $B=\{c, a, d, e, b \}$

г) $B=\{k, l, m\}$; д) $B=\{a, b, c, d, e, f\}$; е) B=Ǿ.

8. Задайте множества А, В, С перечислением элементов и укажите множества $A \cup B, B \cap C, (A \cup B) \cap C, (A \cap B) \cup C, A \cap B \cap C, (A \cap B) \setminus C, B \setminus (A \cup C)$, когда:

а) $A=\{x \mid x \in Z, x^2-16<0\}$; В – множество натуральных делителей числа 12, С – множество целых нечетных чисел х таких, что 2<x$\leq$8;

б) А – множество натуральных четных чисел х, которые удовлетворяют условию 3<x<10; В – множество натуральных делителей числа 21, С – множество простых чисел, меньше 12.

9. Отметьте на координатной прямой множества А и В, найдите их объединение, пересечение, разность А\В , дополнение объединения до R, дополнение найденной разности до R:

а) А=[0;3], В=(1;+∞);

б) А=(-∞;1], В=[1;+∞);

в) $A=\{x \mid x \in R, \frac{23}{7}<x \leq \frac{25}{6}\}$; $B=\{x \mid x \in R, \frac{19}{9}<x<\sqrt{26}\}$

10. Найдите с помощью числовой прямой дополнение множества P до Q:

а) $P=\{x \mid x \in R, -1<x \leq 3\}$; $Q=\{x \mid x \in R, |x| \leq 4\}$;

б) $P=\{x \mid x \in R, 2.3<x \leq 7.8\}$; $Q=\{x \mid x \in R, 2.3 \leq x \leq 7.8\}$;

в) $P=\{x \mid x \in R, \frac{12}{7} \leq x \leq \frac{17}{9}\}$; $Q=\{x \mid x \in R, \frac{17}{12}<x<\frac{28}{3}\}$;

г) $P=\{x \mid x \in Z_+, -1<x \leq 3\}$; $Q=\{x \mid x \in R, -3<x \leq 5\}$.

11. Найдите пересечение :

а) всех прямых плоскости α , которые проходят через пункт А этой плоскости;

б) всех прямых пространства, которые проходят через точку А плоскости α ;

в) всех прямоугольных треугольников, вписанных в данную окружность;

г) всех правильных треугольников, вписанных в данную окружность;

д) всех правильных треугольников, описанных около данного круга;

е) всех треугольников, вписанных в данную окружность;

ж) окружности и прямой, которая пересекает ее;

з) круга и прямой, которая пересекает его.

12. Правда ли, что В=С, когда:

а) $A \cap B = A \cap C$; $A \cup B = A \cup C$?

13. Какое из двух множеств является подмножеством другого ($A \cap B \neq \Theta$):

а) А и А$\cap$В;

б) А и А$\cup$В;

в) А$\cap$В и А$\cup$В;

г) А и А\В;

д) В\А и А$\cup$В ?

14. Множество А состоит из натуральных чисел от 2 до 10 включительно, множество В - из натуральных чисел больших 5 и меньших 14. Задайте множества А и В описанием характеристического свойства. Укажите все элементы множеств А\В и В\А.

15. Будет ли подмножеством множество P={a,b,c,d,e,f} множества:

а) A={a,c};

б) B={a,b,c};

в) C= $\acute{\varnothing}$;

г) D={a,c,m};

д) M={e,a,c};

е) F={a,b}?

16. Возьмем А – множество всех школьников в Минске, В – множество всех школьников Беларуси, С – множество всех школьников Европы, D – множество всех учеников 7а класса СШ № 6 г.Пскова. Изобразите эти множества с помощью кругов Эйлера.

17. А – множество ромбов, В – множество прямоугольников.

   а) Укажите характеристическое свойство пересечения множеств А и В.

   б) Укажите характеристическое свойство объединения множеств А и В.

   Покажите эти множества с помощью кругов Эйлера.

18. Пусть А – множество квадратов, В – множество четырехугольников, С – множество прямоугольников, D – множество параллелограммов. Запишите буквы в такой последовательности, чтобы каждая последующая обозначала подмножество предыдущего множества.

19. Изобразите при помощи кругов Эйлера множества P и Q, когда P – множество равнобедренных треугольников, Q – множество:

   а) остроугольных треугольников;

   б) прямоугольных треугольников;

   в) равносторонних треугольников;

   г) треугольников.

   Укажите характеристическое свойство множества $P \cap Q$, P\Q, Q\P.

20. Множества А и В являются пересекающимися подмножествами множества Е. Изобразите множества А, В, Е при помощи кругов Эйлера и заштрихуйте множества:

   а) $A \cup \overline{B}$;

   б) $\overline{A \cup B}$;

   в) $\overline{A} \cup \overline{B}$;

   г) $\overline{A} \cup B$;

   д) $A \cap B$;

   е) $\overline{A} \cap \overline{B}$;

   ж) $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

§ 2. Элементы комбинаторики

На практике часто приходится выбирать из некоторого множества объектов его подмножества, располагать элементы какого-то множества в том или ином порядке и т.д. Так, мастеру приходится распределять различные виды работ между рабочими, офицеру — выбирать наряд из солдат взвода, шахматисту — из нескольких серий ходов выбирать наилучшую.

Комбинаторика (комбинаторная математика, комбинаторный анализ) — раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами.

Такие задачи называют *комбинаторными*.

Решение большинства комбинаторных задач основано на двух правилах, которые называют правилами суммы и произведения. Правило суммы позволяет найти число элементов в объединении двух конечных множеств, а правило произведения — число элементов их декартова произведения.

1.1 Правило суммы

Обозначим число элементов конечного множества X через $n(X)$, множество, состоящее из n элементов, назовем *n-множеством*. Например, если $P=\{a,n,t,o,l\}$, то $n(P) = 5$, поэтому P является 5-множеством.

Если множество X содержит m элементов, а множество Y — n элементов, причем эти множества не пересекаются, то содержит $m + n$ элементов.

Это очевидное утверждение называют в комбинаторике *правилом суммы* (для двух множеств).

Правило суммы можно сформулировать и чуть иначе:

Если первый элемент из объединения двух непересекающихся множеств можно выбрать m способами, а второй элемент — n способами, то один элемент из всей совокупности можно выбрать $m + n$ способами.

Иными словами, из $X \cap Y = \varnothing$ следует:

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y). \quad (17)$$

Пример 4. Населенные пункты M и N соединены дорогами: 3 дороги проходят через село X, 4 — через Y. Сколькими способами можно проехать из пункта M в пункт N?

Решение. 3 + 4 = 7 (способов; см. рис. 12).

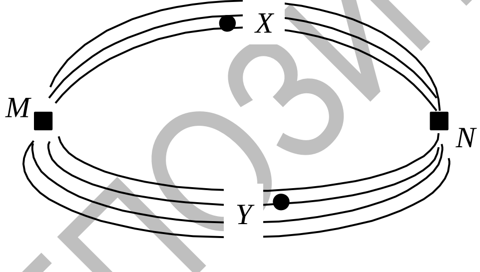


Рис. 12

Комбинаторное правило суммы распространяется и на n множеств:

Если первый элемент из объединения n непересекающихся множеств можно выбрать p_1 различными способами, второй элемент — p_2 способами, и т.д., выбор n-го элемента можно осуществить p_k различными способами, то один элемент из всей совокупности можно выбрать $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ различными способами.

Если же множества пересекаются ($X \cap Y \neq \varnothing$), то количество элементов в объединении двух множеств находится по формуле:

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y). \quad (18)$$

Иногда при решении задач удобно использовать формулу для числа элементов в объединении трех множеств:

$$n(X \cup Y \cup Z) = n(X) + n(Y) + n(Z) - n(X \cap Y) - n(X \cap Z) - n(Y \cap Z) + n(X \cap Y \cap Z).$$

Заметим, что в начальной школе при изучении сложения также исходят из объединения множеств, но при этом, конечно, считают, что они не имеют общих элементов.

1.2 Правило произведения

Второе основное правило комбинаторики касается подсчета числа кортежей, которые можно составить из элементов данных конечных множеств.

Если элемент x можно выбрать m способами, а элемент y можно выбрать n способами, то упорядоченную пару (x; y) можно выбрать mn способами.

Иначе говоря, $n(X \times Y) = n(X) \cdot n(Y) = mn.$ (19)

Докажем последнее утверждение. Пусть $X = \{x_1; x_2; ...; x_m\}$ и $Y = \{y_1; y_2; ...; y_n\}$. Запишем все пары декартова произведения $X \times Y$ в виде таблицы:

$(x_1; y_1),\ (x_1; y_2),\ ...,\ (x_1; y_n),$

$(x_2; y_1),\ (x_2; y_2),\ ...,\ (x_2; y_n),$

. . . .

$(x_m; y_1),\ (x_m; y_2),\ ...,\ (x_m; y_n).$

Таблица состоит из m строк, в каждой из которых n столбцов. Значит, общее число пар равно mn. Что требовалось доказать (в дальнейшем ч.т.д.).

Справедливо правило произведения и для любого конечного числа множеств:

$n(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n) = n(X_1) \cdot n(X_2) \cdot ... \cdot n(X_n).$ (20)

Пример 5. Сколько всего существует трехзначных чисел, цифры в которых не повторяются?

Решение. Первую цифру можно выбрать 9 способами (0 не может быть в разряде сотен), вторую цифру (разряд десятков) можно также выбрать 9 способами (первую цифру вторично по условию задачи использовать нельзя, но можно записать цифру 0). Две цифры из десяти уже использованы, поэтому для записи третьей остается 8 способов. По правилу произведения искомых трехзначных чисел будет $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

1.3 Упорядоченные множества

Конечное множество X называется *упорядоченным*, если его элементы перенумерованы некоторым образом: $X = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$. Понятие упорядоченного множества — частный случай понятия кортежа. Отличие в том, что в кортеже элементы могут быть равными, а в множестве — элементы не повторяются.

Определение 10. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n называется факториалом и обозначается $n!$ (читается «n-факториал»): $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n.$

1.4 Перестановки без повторений

Определение. *Перестановкой без повторений* из n элементов называется всякое упорядоченное n-множество.

Выясним, сколько всего перестановок можно сделать в n-элементном множестве.

Теорема 1. Количество всех перестановок без повторений элементов (обозначается P_n) n-элементного множество равно $n!$, иначе говоря: $P_n = n!$.

Доказательство. Упорядочивание n-множества состоит в том, что на первое место можно выбрать элемент n способами. Т.к. элементы не повторяются, то второй из них мы может выбрать $n-1$ способами, третий — $n-2$ способами и т.д. Предпоследний элемент выбираем 2 способами, а последний — одним.

По правилу произведения всего способов $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$. Таким образом, $P_n = n!$ Ч.т.д.

Пример 6. Сколькими способами можно расставить на полке 5 книг?

Решение. Для ответа надо найти количество перестановок 5-множества. $P_5 = 5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$.

1.5 Размещения без повторений

Определение. *Размещением без повторений* из n элементов по k элементов называется всякое упорядоченное k-подмножество данного n-множества.

Количество размещений без повторений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k.

Теорема 2. Количество размещений без повторений из n элементов по k элементов определяется по формулам:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \qquad (21)$$

или $$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (22)$$

Доказательство. Первый элемент упорядоченного k-подмножества данного n-множества можно выбрать n способами;

2-й элемент (после выбора 1-го, напомним: повторение элементов не допускается) можно выбрать $(n - 1)$ способом;

3-й элемент — $(n - 2)$ способами;

4-й элемент — $(n - 3)$ способами;

……………………………………

k-й элемент — $(n - (k - 1)) = (n - k + 1)$ способами.

По правилу произведения количество всех способов, т.е. размещений без повторений, можно вычислить по формуле: $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$. Таким образом, получена формула (21).

Преобразуем формулу (21). Умножим и разделим полученное произведение для нахождения количества размещений на одно и то же выражение:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots2\cdot1}{(n-k)(n-k-1)\dots2\cdot1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Получили формулу (22). Теорема доказана.

Пример 7. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг с тремя горизонтальными полосами одной и той же ширины, если есть материя пяти различных цветов?

Решение. Поменяв порядок цветов, мы получим новый флаг, т.е. порядок элементов играет роль. Значит, речь идет о размещениях из 5 элементов по 3 элемента:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2} = 3\cdot4\cdot5 = 60.$$

1.6 Сочетания без повторений

Определение 11. *Сочетанием без повторений* из n элементов по k элементов называется каждое k-элементное подмножество данного n-множества.

Количество всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k.

Теорема 3. Количество всех сочетаний из n элементов по k элементов определяется по формуле $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (23)$$

Доказательство. Пусть дано n-множество. Рассмотрим его произвольное k-подмножество. По определению — это сочетание. Из одного сочетания можно получить

$k!$ упорядоченных множеств (перестановок), т.е. размещений. Т.к. всего сочетаний C_n^k, то всех размещений из n элементов по k элементов будет $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Отсюда $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Ч.т.д.

Пример 8. Сколькими способами можно выбрать из класса в 20 человек на конференцию делегацию, состоящую из 3 человек.

Решение. В данном случае порядок выбора учеников не важен, поэтому речь идет о сочетаниях из 20 элементов по 3 элемента. Воспользуемся формулой (23):

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot ...\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot ...\cdot 17} = \frac{18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3} = 3\cdot 19\cdot 20 = 1140.$$

Можно еще говорить о *перестановках и размещениях с повторениями* элементов. Примеры таких задач мы рассмотрим на семинарских занятиях.

Задания для самостоятельной работы

1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр:

   1) 1, 2, 3, 4; 2) 1, 2, 3, 4, 5;

   3) 0, 1, 2, 3; 4) 0, 1, 2, 3, 4?

2. Сколько двузначных чисел, в которых ни одна цифра не повторяется, можно составить из цифр:

   1) 1, 2, 3, 4; 2) 1, 2, 3, 4, 5;

   3) 0, 1, 2, 3; 4) 0, 1, 2, 3, 4?

3. Сколько нечетных четырехзначных чисел, в которых ни одна цифра не повторяется, можно составить из цифр:

   1) 1, 2, 3, 4; 2) 1, 2, 3, 4, 5;

   3) 0, 1, 2, 3; 4) 0, 1, 2, 3, 4?

4. Сколько четырехзначных чисел делящихся на 5, в которых ни одна цифра не повторяется, можно составить из цифр:

   1) 1, 2, 3, 5; 2) 1, 2, 3, 4, 5;

   3) 0, 1, 2, 5; 4) 0, 1, 2, 3, 5?

5. Продается мороженое пяти сортов: пломбир, сливочное, шоколадное, кофейное, эскимо. Сколькими способами Вася может купить:

   1) две порции мороженого разных сортов;
   2) две порции мороженого?

6. Продается мороженое пяти сортов: пломбир, сливочное, шоколадное, кофейное, эскимо. Сколькими способами Вася и Петя могут купить:

   1) по порции мороженого;
   2) по порции мороженого разных сортов?

7. Сколько существует трехзначных чисел, кратных 5, две первые цифры которых:

   1) нечетные; 2) нечетные различные;

   3) четные; 4) четные различные?

8. В корзине 12 яблок и 15 груш. Сколько различных наборов можно образовать:

   1) из двух яблок;
   2) из двух груш;

3) из яблока и груши;
4) из двух яблок и одной груши;
5) из двух груш и одного яблока;
6) из трех яблок;
7) из трех груш?

9. На собрание пришло 29 женщин и 13 мужчин. Они выбирают председателя и секретаря.
   1) Сколькими способами это можно сделать?
   2) Сколькими способами это можно сделать, если председателем решили выбрать женщину, а секретарем – мужчину?
   3) Сколькими способами это можно сделать, если председателем решили выбрать женщину?
10. Из пункта A в пункт B ведут 2 дороги, из пункта B в пункт C – 3 дороги, из пункта C в пункт D – 4 дороги. Сколько маршрутов можно составить из пункта A в пункт D через пункты B и C?
11. На одной боковой стороне равнобедренного треугольника отмечены 4 точки (не совпадающие с вершинами), на другой – 5 точек (не совпадающие с вершинами). Каждая из вершин при основании треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками на боковых сторонах.
   1) Сколько существует точек пересечения этих отрезков?
   2) На сколько частей делят треугольник эти отрезки?
12. Сколько натуральных делителей имеет число:
   1) $2^5 \cdot 3^4 \cdot 7^{11}$; 2) $7^5 \cdot 13^4 \cdot 17^{11}$;
   3) $7^6 \cdot 13^6 \cdot 17^6$; 4) $3^4 \cdot 5^4 \cdot 13^4$;
   5) $2^5 \cdot 3^4 \cdot 6^{11}$; 6) $5^4 \cdot 7^3 \cdot 35^8$;
   7) 980^7; 8) 680^3.
13. В магазине продаются конфеты в коробках 18 видов. Сколькими способами можно купить:
   1) две коробки конфет;
   2) две коробки конфет разного вида?
14. Сколькими способами на шахматной доске можно расставить:
   1) две ладьи;
   2) два белопольных слона;
   3) два белых слона;
   4) белую и черную ладьи, чтобы они не били друг друга;
   5) белую и черную ладьи, чтобы они не били друг друга и стояли на полях разного цвета?
15. Сколькими способами 6 учеников 12 класса могут выстроиться в шеренгу?
16. Во вторник по расписанию должно быть 7 уроков: алгебра, литература, физика, биология, химия, история и физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на вторник, если:
   1) физкультура должна стоять на шестом или седьмом уроках;
   2) физкультура не должна стоять на первом или втором уроках?
17. В киоске продаются стержни для ручек 6 разных цветов. Сколькими способами можно купить:
   1) 3 стержня;
   2) 3 стержня разных цветов?
18. Сколько пятизначных чисел можно составить:
   1) из нечетных цифр;

2) из нечетных цифр, если ни одна цифра не повторяется;
3) из нечетных цифр, если полученное число должно делиться на 5;
4) из четных цифр;
5) из четных цифр, если ни одна цифра не повторяется;
6) из четных цифр, если полученное число должно делиться на 5?

19. Сколько существует семизначных чисел, у которых ни одна цифра не повторяется и:
1) на нечетных местах стоят нечетные цифры;
2) на нечетных местах стоят четные цифры;
3) на четных местах стоят четные цифры;
4) на четных местах стоят нечетные цифры;
5) последняя цифра кратна 4;
6) сумма последних двух цифр делится на 10;
7) первая цифра делится на 3;
8) первая цифра делится на 4?

20. Человек рассеянный с улицы Бассейной имеет 10 пар носков разного цвета. Сколькими способами он может надеть носки разных цветов?

21. Квадрат разбит на 9 равных квадратиков. Сколькими способами их можно раскрасить (каждый в один цвет), если есть:
1) 12 фломастеров разных цветов;
2) 18 фломастеров разных цветов?

22. У Саши 7 яблок, у Вани 6 груш. Сколькими способами они могут:
1) дать одно яблоко и одну грушу Маше;
2) дать одно яблоко и две груши Маше;
3) дать два яблока и две груши Маше;
4) обменять одно яблоко на грушу;
5) обменять два яблока на две груши?

23. Сколькими способами 7 человек: А, Б, В, Г, Д, Е, Ж могут сесть на скамейку так, чтобы:
1) А сидел справа от В (не обязательно рядом);
2) А сидел справа от В и рядом с ним;
3) А сидел рядом с В;
4) А не сидел рядом с В?

24. На кодовом замке сейфа 9 цифр и 20 букв. За сколько времени, не зная кода, можно открыть сейф (на набор одной комбинации кода уходит 20 секунд), если код состоит из:
1) трех разных цифр и трех разных букв;
2) четырех разных цифр и трех разных букв;
3) трех цифр и трех букв;
4) четырех цифр и трех букв?

25. Студенту надо сдать 5 экзаменов на протяжении 11 дней, при этом в один день можно сдать не более одного экзамена.
1) Сколькими способами это можно сделать?
2) Сколькими способами это можно сделать, если известно, что последний экзамен будет сдаваться на одиннадцатый день?
3) Сколькими способами это можно сделать, если известно, что первый экзамен будет сдаваться в первый день, а последний – на одиннадцатый день?

26. В розыгрыше первенства страны по футболу в высшей лиге участвуют 16 команд. Команды, занявшие первые 3 места, награждаются золотой, серебряной и бронзовой медалями, а команда, занявшая последнее место, покидает высшую лигу. Сколько разных результатов первенства может быть?

27. Имеется 5 чашек, 6 блюдец и 9 чайных ложечек различных расцветок и форм. Сколькими способами бабушка может накрыть стол для чаепития, если за столом сидит:
   1) 3 человека;
   2) 4 человека;
   3) 5 человек?
28. Из букв разрезной азбуки сложено слово ”ускоритель”. Сколькими способами можно переставить буквы этого слова так, чтобы
   1) первые три буквы были согласными;
   2) последние две буквы были согласными?
29. В классе 24 ученика. Сколькими способами можно выбрать группу дежурных по столовой из 3 человек?
30. Сколькими способами за 4 стола можно посадить 4 мальчиков и 4 девочек так, чтобы за каждым столом сидели:
   1) два человека;
   2) мальчик и девочка;
   3) слева мальчик, а справа девочка;
   4) два мальчика или две девочки?
31. Сколько есть трехзначных чисел, у которых:
   1) каждая следующая цифра меньше предыдущей;
   2) каждая следующая цифра больше предыдущей?

   (Отсчет цифр идет слева направо).
32. В некоторой стране ребенку при рождении дают от одного до трех имен, выбирая их из 260. Сколькими способами можно назвать ребенка?
33. Из колоды (36 карт) вынимают нечетное число карт, причем не более 6. Сколькими способами это можно сделать?
34. У Вани 25 разных шариков, а у Пети 23 разных кубика. Сколькими способами они могут поменять 2 шарика на 2 кубика?
35. В меню столовой 7 первых блюд, 10 вторых и 4 третьих. Сколькими способами можно выбрать:
   1) обед из трех блюд;
   2) обед из двух вторых и двух третьих блюд?
36. Три инструктора и 9 туристов должны быть разбиты для похода на 2 группы по 6 человек, причем в каждой группе должен быть по крайней мере один инструктор. Сколькими способами можно укомплектовать группу?
37. Четыре инструктора и 18 альпинистов должны быть разбиты для похода на 2 группы по 11 человек, причем в каждой группе должен быть по крайней мере один инструктор. Сколькими способами можно укомплектовать группу?
38. Найдите число $n!$, если:

   1) $n = 10$; 2) $n = 9$;

   3) $n = 11$; 4) $n = 12$.

Найдите значение выражения (1.39 – 1.40).

39. 1) $\frac{14!}{12!}$; 2) $\frac{19!}{17!}$; 3) $\frac{9!}{5!\cdot 4!}$;

   4) $\frac{10!}{6!\cdot 4!}$; 5) $\frac{0!\cdot 16!}{10!\cdot 5!}$; 6) $\frac{1!\cdot 20!}{16!\cdot 3!}$.
40. 1) P_5; 2) P_3;

   3) $\frac{P_{43}}{P_{45}}$; 4) $\frac{P_{36}}{P_{32}}$;

5) $\dfrac{P_{16}}{P_{12}\cdot P_6}$; 6) $\dfrac{P_{15}}{P_7\cdot P_9}$;

7) $\dfrac{P_7+P_6+P_5}{P_8-P_7}$; 8) $\dfrac{P_{17}-16P_{16}-15P_{15}}{P_{14}}$.

41. Упростите выражение:

1) $\dfrac{(p-2)!}{(p+1)!}$; 2) $\dfrac{(p-1)!}{(p+2)!}$;

3) $\dfrac{(p+3)!}{(p+1)!(p^2-4)}$; 4) $\dfrac{(p+2)!(p^2-9)}{(p+4)!}$;

5) $\dfrac{(2p)!}{(p+2)!}$, $p>2$; 6) $\dfrac{(3p)!}{(p-1)!}$.

42. Сравните числа:

1) $3!\cdot 6!$ и $3\cdot 6!$; 2) $4!\cdot 3$ и $4!\cdot 3!$;

3) $3\cdot 5!$ и $(3\cdot 5)!$; 4) $(4\cdot 5)!$ и $4\cdot 5!$;

5) $3!\cdot 6!$ и $(3\cdot 6)!$; 6) $5!\cdot 6!$ и $(5\cdot 6)!$.

43. Сравните числа при *p*, равном 1; 2; 3:

1) $4p!$ и $(4p)!$; 2) $4!\cdot p!$ и $(4p)!$;

3) $5!\cdot p!$ и $(5p)!$; 4) $5p!$ и $(5p)!$.

44. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\dfrac{t+2}{(t+1)!}-\dfrac{3t+1}{(t+2)!}$; 2) $\dfrac{1}{(t+1)!}-\dfrac{t^2}{(t+3)!}$;

3) $\dfrac{1-t}{(t+1)!}+\dfrac{1}{(t-1)!}$; 4) $\dfrac{1}{(t-2)!}-\dfrac{t^3+t}{(t+1)!}$;

5) $\left(\dfrac{t+0!}{(t-2)!}-\dfrac{2}{(t-1)!}\right)\cdot\dfrac{t-1}{t+1}$; 6) $\left(\dfrac{1!}{(t-1)!}+\dfrac{0!}{(t+1)!}\right):\dfrac{1}{t^3-1}$.

45. При каких значениях *n* и *k* верно равенство:

1) $n!=n$; 2) $n!=n(n-1)!$;

3) $k\cdot n!=(kn)!$; 4) $k!\cdot n!=(kn)!$;

5) $k\cdot n!=k!\cdot n!$; 6) $k!\cdot n=k!\cdot n!$?

46. 1) Может ли число $n!$ оканчиваться ровно пятью нулями?

2) При каком наименьшем *n* число $n!$ оканчивается ровно шестью нулями?

47. Докажите формулу

$(n+1)!-n!=n!\cdot n$.

48. Найдите значение выражения, используя формулу из задания 47:

$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+9\cdot 9!$.

49. Докажите равенство, где $0<k\le n$:

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!\cdot(n-k+1)!}.$$

50. Решите уравнение:

1) $\dfrac{P_{k+2}}{P_k} = 72$; 2) $\dfrac{P_{k+1}}{P_{k-1}} = 30$;

3) $\dfrac{20 \cdot k!}{(k-2)!} = \dfrac{(2k)!}{(2k-3)!}$; 4) $\dfrac{12 \cdot k!}{(k-2)!} = \dfrac{k!}{(k-4)!}$.

51. Решите неравенство:

1) $\dfrac{(m+3)!}{(m+1)!} \geq 12$; 2) $\dfrac{(m-1)!}{(m+1)!} \leq \dfrac{1}{42}$;

3) $30m!(2m-3)! \leq (2m)!(m-2)!$;

4) $56m!(m-4)! \leq m!(m-2)!$.

52. В среду в 12 А классе все уроки разные. Завуч Тамара Ивановна сказала, что из этих уроков расписание можно составить 120 способами. Сколько уроков в 12 А классе в среду?

53. Сколькими способами в двенадцатиместной каюте (6 нижних мест и 6 верхних мест) могут разместиться:

1) 6 женщин и 6 мужчин;

2) 6 женщин на нижних полках и 6 мужчин на верхних полках?

54. В спортзале на скамейке сидят n спортсменов, среди которых 2 волейболиста, а остальные гимнасты. Сколькими способами можно рассадить этих спортсменов на скамейке так, чтобы волейболисты сидели рядом, если:

1) $n = 3$; 2) $n = 5$; 3) $n = 7$?

55. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом n гостей, причем способы рассадки, при которых у каждого гостя слева и справа одни и те же соседи, считаются одинаковыми, если:

1) $n = 3$; 2) $n = 5$; 3) $n = 7$?

56. На полке стоят 18 различных книг: 9 – в синих переплетах и 9 – в красных. Сколькими способами можно разместить эти книги так, чтобы:

1) первые 9 мест занимали книги в красных переплетах;
2) книги в синих и красных переплетах чередовались?

57. На полке стоят 16 различных книг: 8 – в синих переплетах и 8 – в красных. Сколькими способами можно разместить эти книги так, чтобы:

1) первые 8 мест занимали книги в синих переплетах;
2) книги в синих и красных переплетах чередовались?

58. Сколько существует перестановок букв a, b, c , d, e, f, k, l, m, n, таких, что:

1) буква k занимает второе место, а буква b – седьмое;
2) буква k занимает одно из первых трех мест, а буква b – одно из последних двух мест;
3) буква b следует непосредственно за буквой k;
4) буквы b и k стоят рядом?

59. Сколькими способами можно расставить на полке четыре разных собрания сочинений, в каждом из которых n томов, так, чтобы все тома каждого из собраний сочинения стояли подряд и в порядке следования томов, если:

1) $n = 9$; 2) $n = 10$; 3) $n = 11$; 4) $n = 12$?

60. Сколькими способами можно расставить на полке четыре разных собрания сочинений разных писателей, в каждом из которых n томов, так, чтобы все тома

каждого из собрания сочинений стояли подряд и не обязательно в порядке следования томов, если:

1) $n = 9$; 2) $n = 10$; 3) $n = 11$; 4) $n = 12$?

61. Картонный квадрат прибит к доске тремя гвоздиками в трех его вершинах. Сколькими способами стороны квадрата можно раскрасить красной, синей, зеленой и фиолетовой красками (каждая сторона окрашивается в один цвет), если:
1) при окраске не обязательно использовать каждую краску;
2) после окраски никакие две стороны не окажутся одинакового цвета?

62. Картонный квадрат прибит к доске одним гвоздиком в его центре так, что может вращаться вокруг этого гвоздика. Сколькими способами стороны квадрата можно раскрасить красной, синей, зеленой и фиолетовой красками, если в раскраске используется каждый из четырех цветов, и две раскраски считаются одинаковыми, если при повороте квадрата вокруг центра их можно совместить?

63. Вычислите:

1) A_5^2; 2) A_7^3; 3) $A_8^4 - A_8^3$;

4) $A_6^3 - A_6^2$; 5) $A_5^3 + A_5^2$; 6) $A_8^2 + A_8^6$.

64. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{A_{10}^8}$; 2) $\dfrac{A_{13}^8}{A_{15}^8 - A_{14}^8}$; 3) $\dfrac{A_{15}^4 + A_{14}^5}{A_{15}^8}$;

4) $\dfrac{A_{18}^3}{A_{14}^4 - A_{13}^4}$; 5) $\dfrac{A_{12}^4 \cdot 7!}{A_{11}^9}$; 6) $\dfrac{A_{15}^{12}}{A_{16}^3 \cdot 12!}$;

7) $\dfrac{A_7^3 \cdot P_4}{0!}$; 8) $\dfrac{A_7^6 + P_8}{1! \cdot P_7}$; 9) $\dfrac{1! \cdot 7! \cdot A_{12}^5}{0! \cdot P_{13}}$.

65. Упростите выражение:

1) $\dfrac{P_{2k+1}}{A_{2k-1}^{n-1} \cdot P_{2k-n}}$; 2) $\dfrac{P_{k-n} \cdot A_k^n}{P_{k+1}}$; 3) $\dfrac{A_{m-1}^{n-1} \cdot P_{m-n}}{10 \cdot P_{m-1}}$; 4) $\dfrac{A_{10}^n \cdot P_{10-n}}{P_9}$.

66. Сколькими способами можно переставить буквы слова ”сборник”.

67. Составьте несколько размещений по три из элементов множества $\{1;2;3;4\}$. Сколько всего можно составить таких размещений?

68. Составьте несколько размещений по четыре из элементов множества $\{1;2;3;4;5;6\}$. Сколько всего можно составить таких размещений?

69. Составьте несколько размещений по два из согласных букв слова “навигатор”. Сколько всего можно составить таких размещений?

70. Составьте несколько размещений по три из гласных букв слова “лаборатория”. Сколько всего можно составить таких размещений?

71. Укажите те из задач 1.7 – 1.37, которые можно решить, используя формулу для вычисления числа размещений, и решите их с использованием этой формулы.

Решите уравнение (72 – 74).

72. 1) $A_x^2 = 182$; 2) $A_x^2 = 42$; 3) $A_{x+1}^2 = 156$;

4) $A_{x+1}^2 = 30$; 5) $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$; 6) $\dfrac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$.

73. 1) $\dfrac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$; 2) $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n \cdot P_{x-n}} = 132$;

3) $\dfrac{A_{x+1}^{n+1} \cdot P_{x-n}}{P_{x-1}} = 90$; 4) $\dfrac{A_{x+2}^{n+2} \cdot P_{x-n}}{P_x} = 110$.

74. 1) $A_n^x = x \cdot A_n^{x-1}$, $n = 2k+1$, $k \in N$;

2) $A_{n+1}^x = x \cdot A_{n+1}^{x-1}$, $n = 2k$, $k \in N$.

75. Решите неравенство:

1) $A_x^3 \geq 90 \cdot (x-2)$; 2) $A_x^2 \leq 6 \cdot (x-1)$; 3) $A_x^2 > 14x$;

4) $A_x^3 < 56x$; 5) $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} < 2$; 6) $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} > 56$.

Найдите значение выражения (76 – 78).

76. 1) C_8^6; 2) C_{10}^8; 3) $C_{15}^2 + C_{15}^3$;

4) $C_{17}^4 - C_{17}^3$; 5) $C_{11}^2 + C_9^2$; 6) $C_{15}^{11} - C_{16}^{14}$;

7) $C_{10}^8 + C_{14}^9$; 8) $C_{16}^{12} - C_{11}^{10}$; 9) $C_9^6 + C_6^4$.

77. Докажите тождество

$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

78. 1) $\dfrac{C_{16}^3 + C_{16}^4 + C_{17}^5}{C_{18}^6}$; 2) $\dfrac{C_{21}^4}{C_{20}^{15} + C_{19}^3 + C_{19}^4}$.

79. 1) $\dfrac{C_6^3 \cdot P_3}{A_6^2}$; 2) $C_8^3 + \dfrac{A_9^4}{P_4}$; 3) $\dfrac{A_{10}^6 + P_{10}}{C_9^6 \cdot 7!}$.

80. Выпишите все сочетания из элементов множества $\{m, n, p, t\}$:

1) по два; 2) по три.

81. В турнире по футболу принимали участие n команд, и каждые две из них сыграли между собой одну игру. Сколько игр было сыграно в турнире, если:

1) $n = 6$; 2) $n = 9$; 3) $n = 12$.

82. Срезано 12 тюльпанов различных сортов. Сколькими способами можно составить букет из 9 тюльпанов?

83. Сколькими способами можно выбрать четыре книги из шести:

84. На шахматном турнире, проводившемся в один круг (любые два участника встречались между собой один раз), была сыграна 91 партия. Сколько человек участвовало в турнире?

85. Укажите те из задач 1.7 – 1.37, которые можно решить, используя формулу для вычисления числа сочетаний, и решите их с использованием этой формулы.

86. Сравните:

1) C_{1010}^{199} и A_{1010}^{199}; 2) C_{2008}^{12} и A_{2008}^{12}.

87. Докажите, что верно равенство:

1) $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$; 2) $C_n^9 + C_n^8 = C_{n+1}^9$;

3) $C_{n+1}^4 - C_n^3 - C_n^4 = 0$; 4) $C_n^8 - C_{n+1}^8 + C_n^7 = 0$;

5) $C_{12}^{4}+2C_{12}^{5}+C_{12}^{6}=C_{14}^{6}$; 6) $C_{15}^{8}+2C_{15}^{9}+C_{15}^{10}=C_{17}^{7}$;

7) $C_{n+1}^{7}=C_{n+1}^{n-6}$; 8) $C_{n}^{k}\cdot C_{n-k}^{p-k}=C_{p}^{k}\cdot C_{n}^{p}$.

Решите уравнение (88 – 89).

88. 1) $C_{x}^{3}=2x$; 2) $C_{x+2}^{4}=x^{2}-1$;

3) $\dfrac{C_{x+1}^{4}}{C_{x}^{3}}=2$; 4) $\dfrac{C_{x}^{3}+C_{x}^{4}}{C_{x+1}^{2}}=11$.

89. 1) $C_{x}^{1}+A_{x}^{2}=256$; 2) $A_{x-1}^{2}-C_{x}^{1}=79$;

3) $\dfrac{A_{x+1}^{3}}{C_{x+1}^{2}}=15$; 4) $\dfrac{3A_{x}^{3}}{C_{x+1}^{5}}=8$;

5) $30C_{x-3}^{x-9}=19A_{x-4}^{4}$; 6) $12C_{x+3}^{x-1}=55A_{x+1}^{2}$;

7) $C_{2x+3}^{2(x-1)}=4A_{2(x+1)}^{3}$; 8) $C_{x+1}^{x-4}=\dfrac{7}{15}A_{x+1}^{3}$

90. Решите неравенство:

1) $C_{x}^{x-2}\le 45$; 2) $C_{x+1}^{x-1}<21$;

3) $C_{x}^{5}>C_{x}^{3}$; 4) $C_{x}^{2}\ge 55$;

5) $C_{19}^{x-1}<C_{19}^{x}$; 6) $C_{2x}^{7}>C_{2x}^{5}$;

7)* $A_{100}^{x}-C_{100}^{x}\ge P_{x}$; 8)* $A_{90}^{x}-C_{90}^{x}\le P_{x}$.

91. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}8A_{2x}^{3x-1}=A_{2x}^{3y},\\ 9C_{2x}^{3y}=8C_{2x}^{3y-1};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}8A_{x}^{y-3}=A_{x}^{y-2},\\ 8C_{x}^{y-3}=5C_{x}^{y-2};\end{cases}$

3) $\begin{cases}A_{2x}^{y-2}=8A_{2x}^{y-3},\\ 3C_{2x}^{y-2}=8C_{2x}^{y-3};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}7A_{5x}^{y-3}=A_{5x}^{y-2},\\ 4C_{5x}^{y-2}=7C_{5x}^{y-3}.\end{cases}$

92. Сколько существует шестизначных чисел, кратных 5:3 5 букв. а) всего; б) в записи которого нет одинаковых цифр?

93. На диск сейфа занесены 12 букв, а секретное слово из 5 букв. Сколько неудачных попыток может сделать человек, которому не известно секретное слово?

94. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 8:

а) всего;

б) если каждую из них можно использовать в записи числа не более одного раза?

95. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 4, 6, 8, если цифры в записи числа не должны повторяться?

а) Сколько среди них четных чисел?

б) Сколько среди них нечетных чисел?

в) Сколько будет чисел, в которых цифры 2 и 6 находятся рядом?

96. Сколько пятизначных чисел, не кратных 5, можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9, используя каждую цифру в записи числа не более одного раза?

ТЕМА 2
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Математическая логика (теоретическая логика, символическая логика) — раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов оснований математики[4].

Математическая логика — раздел математики, в котором математический аппарат и специально разработанный аппарат символов с помощью различных исчислений (формализованных языков) применяется к изучению мышления, в частности к изучению правил вывода[5].

§ 1. Высказывания и операции над ними

1.1. Понятие высказывания.

Окружающий нас мир состоит из различных объектов — живых существ, домов, книг, автомашин, рек, гор и т.д. При изучении этих объектов мы интересуемся некоторыми их свойствами, например массой, формой, размерами, цветом, запахом и т.д. Между объектами окружающего нас мира существуют различные отношения (данный человек живет в данном доме, данная книга стоит в данном шкафу, Землю окружает атмосфера). Говоря об объектах и их свойствах, мы высказываем те или иные утверждения (высказывания), например: «Столица нашей страны — Минск», «Сейчас я нахожусь на занятиях по математике». Каждое такое утверждение может быть или истинным, или ложным — Минск действительно столица Беларуси, но в момент, когда вы читаете эти строки, можете находиться, например, на занятиях по иностранному языку.

Определение 12. Высказывание — это повествовательное предложение, о котором[6] можно сказать истинно (И) оно или ложно (Л).

Вопросительные и восклицательные предложения не являются высказываниями.

Высказывания обычно обозначаются большими латинскими буквами. Например, R: «На улицах Минска растут каштаны»; F: "$5+3<2$".

1.2 Простые и составные высказывания

Определение 13. Высказывание, которое нельзя расчленить на другие высказывания, называется простым (элементарным).

Например, «Луна — спутник Земли».

Определение 14. Если высказывание допускает расчленение на другие высказывания, то оно называется составным.

Например, высказывание «Яблоня — это дерево, цветущее весной» можно разбить на два высказывания M и N, где M: «Яблоня — это дерево», N: «Яблоня цветет весной».

1.3 Логические операции

Определение 15. Операция образования составного высказывания из простых высказываний называется логической операцией.

Определение 16. Два составных высказывания A и B называются эквивалентными,

---

[4] Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М. Виноградов, т. 3 Коо — Од — М.: «Советская энциклопедия», 1982.

[5] Математика в понятиях, определениях и терминах. Ч. 2 / О.В. Мантуров и др. Под ред. Л.В. Сабинина. — М.: Просвещение, 1982.

[6] Точнее, о содержании предложения.

если они одновременно истинны или одновременно ложны независимо от истинности входящих в них простых высказываний.

Это записывается: А = В.

Над высказываниями можно выполнять различные операции.

1.4 Конъюнкция высказываний.

Определение 17. Конъюнкцией[7] двух высказываний А и В называется составное высказывание «А и В», которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания А и В одновременно истинные.

Обозначается $A \wedge B$.

Определение конъюнкции можно представить и в виде таблицы (подобные таблицы называются таблицами истинности).

Табл. 1

A	B	$A\wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Пример 9. Конъюнкция «Число 10 четное и простое» — ложное высказывание, т.к. оно не является простым, хотя и четное.

Свойства конъюнкции.

1°. $A \wedge B = B \wedge A$ — коммутативность.

2°. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ — ассоциативность.

Доказательство. Проведем с помощью таблиц истинности.

В таблице 2 доказывается свойство 1°, в таблице 3 — свойство 2°.

Табл. 2

A	B	$A\wedge B$ (*)	$B\wedge A$ (**)
и	и	и	и
и	л	л	л
л	и	л	л
л	л	л	л

Сравнивая столбцы (*) и (**), замечаем, что конъюнкции $A\wedge B$ и $B\wedge A$ одновременно истинны или одновременно ложны, т.е. $A \wedge B = B \wedge A$. Ч.т.д.

Табл. 3

A	B	C	$A\wedge B$	$(A\wedge B)\wedge C$ (*)	$B\wedge C$	$A\wedge(B\wedge C)$ (**)
и	и	и	и	и	и	и
и	л	и	л	л	л	л
л	и	и	л	л	и	л

[7] От лат. conjunctio — союз, связь.

л	л	и	л	л	л	л
и	и	л	и	л	л	л
и	л	л	л	л	л	л
л	и	л	л	л	л	л
л	л	л	л	л	л	л

Из сравнения столбцов (*) и (**) следует доказываемое равенство.

Определение конъюнкции двух высказываний распространяется на конъюнкцию любого количества высказываний: если все высказывания истинны — конъюнкция истинна, если же хотя бы одно из высказываний, входящих в конъюнкцию, ложно, то и конъюнкция ложна.

1.5 Дизъюнкция высказываний

Определение 18. Дизъюнкцией[8] двух высказываний А и В называется составное высказывание «А или В», которое истинно тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний А или В истинно, и ложно, если оба высказывания А и В ложны.

Обозначается $A \vee B$.

Определение дизъюнкции двух высказываний распространяется на дизъюнкцию любого количества высказываний: если хотя бы одно высказывание истинно — дизъюнкция истинна, если все высказывания ложны — дизъюнкция ложна.

В таблице 4 представлено определение дизъюнкции.

Табл. 4

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Свойства дизъюнкции.

1°. $A \vee B = B \vee A$ — коммутативность.

2°. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ — ассоциативность.

Доказательство. Свойство 1° следует из определения дизъюнкции (можно доказать и с помощью таблицы истинности, как было сделано для конъюнкции). Свойство 2° докажите самостоятельно, заполнив таблицу 5 и сравнив столбцы (*) и (**) (высказывания A∨B)∨C и A∨(B∨C) должны быть одновременно истинны или одновременно ложны.

Табл. 5

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$ (*)	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$ (**)
и	и	и				
и	л	и				
л	и	и				

[8] От лат. disjunctio — разобщение.

л	л	и				
и	и	л				
и	л	л				
л	и	л				
л	л	л				

1.6 Свойства, связывающие конъюнкцию и дизъюнкцию

1°. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ — дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции.

2°. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ — дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции.

Докажем свойство 1° с помощью таблицы истинности (табл. 6).

Табл. 6

A	B	C	$B \vee C$	$\boldsymbol{A \wedge (B \vee C)}$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$\boldsymbol{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$
и	и	и	и	**и**	и	и	**и**
и	л	и	и	**и**	л	и	**и**
л	и	и	и	**л**	л	л	**л**
л	л	и	и	**л**	л	л	**л**
и	и	л	и	**и**	и	л	**и**
и	л	л	л	**л**	л	л	**л**
л	и	л	и	**л**	л	л	**л**
л	л	л	л	**л**	л	л	**л**

Свойство 2° докажите самостоятельно.

1.7. Отрицание высказываний

Определение 19. Отрицанием высказывания А называется составное высказывание $\overline{A}$ (неверно, что А[9]), которое ложно, если высказывание А истинно, и истинно, если А — ложно (смотрите таблицу 7).

Табл. 7

A	$\overline{A}$
и	л
л	и

Например, отрицанием ложного высказывания М: «32 = 6» является истинное высказывание $\overline{M}$: «32 ≠ 6».

Некоторые свойства, связанные с отрицанием

1°. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} = A$.

Доказательство представлено в таблице 8.

Табл. 8

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
и	л	**и**
л	и	**л**

2°. Закон противоречия: $A \wedge \overline{A} =$ Л. (Конъюнкция высказывания и его отрицания

[9] В некоторых учебниках отрицание обозначается так: $\neg A$.

всегда ложна; см. таблицу 9).

Табл. 9

A	$\overline{A}$	$A\wedge\overline{A}$
И	л	**л**
Л	и	**л**

3°. Закон исключенного третьего (тавтологии): $A\vee\overline{A}=$ И. (Дизъюнкция высказывания и его отрицания всегда истинна; см. таблицу 10).

Табл. 10

A	$\overline{A}$	$A\vee\overline{A}$
и	л	**и**
л	и	**и**

1.8 Законы де Моргана (для высказываний)

Операции конъюнкция, дизъюнкция и отрицание связаны следующими равенствами:

$$\overline{A\vee B}=\overline{A}\wedge\overline{B}. \qquad (24)$$

Читается: отрицание дизъюнкции высказываний А и В равно конъюнкции отрицаний этих высказываний.

$$\overline{A\wedge B}=\overline{A}\vee\overline{B}. \qquad (25)$$

Читается: отрицание конъюнкции высказываний А и В равно дизъюнкции отрицаний этих высказываний.

Равенства (24) и (25) называются законами де Моргана (по имени шотландского математика Моргана де Огастеса (27.06.1806—18.03.1871)).

Докажем равенство (25) с помощью таблицы истинности.

Табл. 11

A	B	$A\wedge B$	$\overline{A\wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\vee\overline{B}$
и	и	и	**л**	л	л	**л**
и	л	л	**и**	л	и	**и**
л	и	л	**и**	и	л	**и**
л	л	л	**и**	и	и	**и**

Равенство (24) докажите самостоятельно.

1.9 Импликация высказываний

Определение 20. Импликацией высказываний А и В называется составное высказывание «если А, то В», которое ложно только в одном случае: А — истинно, В — ложно. (Таблица 12)

Обозначается: $A\Rightarrow B$. А называется условием импликации, В — заключением.

Табл. 12

A	B	$A\Rightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Определение 21. Пусть дана импликация $A \Rightarrow B$. Если поменять местами условие и заключение, то получим импликацию $B \Rightarrow A$ («если В, то А»), которая называется обратной для данной.

Пример 10. Дана импликация P: «Если число кратно 8, то оно кратно 4». Обратной для нее будет импликация P1: «Если число кратно 4, то оно будет кратно 8». Заметим, что импликация P истинна, а обратная ей — вообще говоря нет. Действительно, число 12, например, кратно 4, но не кратно 8.

Определение 22. Пусть дана импликация $A \Rightarrow B$. Импликация $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ называется противоположной импликацией для данной.

Определение 23. Пусть дана импликация $A \Rightarrow B$. Импликация $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ называется обратной противоположной (противоположной обратной).

Справедливы следующие равенства.

Теорема 4.

1. (Закон контрапозиции).

$$A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}. \qquad (26)$$

Докажите самостоятельно.

2. (Связь между импликацией $A \Rightarrow B$ и дизъюнкцией $\overline{A} \vee B$).

$$A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B. \qquad (27)$$

Доказательство. Проведем с помощью таблицы истинности (таблица 13).

Табл. 13

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
и	и	**и**	л	**и**
и	л	**л**	л	**л**
л	и	**и**	и	**и**
л	л	**и**	и	**и**

1.10 Эквиваленция высказываний

Определение 24. Эквиваленцией двух высказываний А и В называется составное высказывание «А тогда и только тогда, когда В», которое истинно, если оба высказывания А и В одновременно истинны или одновременно ложны.

Обозначается $A \Leftrightarrow B$.

Табл. 14

A	B	$A \Leftrightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	и

Пример 11. «Число делится на 4 тогда и только тогда, когда его две последние цифры образуют двузначное число, делящееся на 4». Эта эквиваленция истинна, т.к. истинны оба входящие в нее высказывания.

Нетрудно доказать, что справедлива теорема:

Теорема 5. $A \Leftrightarrow B = A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$.

Доказательство проведите с помощью таблицы истинности 15, которую заполните самостоятельно.

Табл. 15

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
и	и				
и	л				
л	и				
л	л				

§ 2. Предикаты и операции над ними

Начнем с примеров.

Рассмотрим предложения: 1) «x + 2 > 4»; 2) «Коля учится на одни «десятки». По форме эти предложения напоминают высказывания, но таковыми не являются, т.к. ни в случае 1), ни в случае 2) мы не можем сказать, истинны они или ложны (во втором примере имя школьника играет роль неизвестного, поскольку Коля — распространенное имя, мы не знаем, в какой школе учится мальчик, как он учится и т.д.).

Но если в первом предложении вместо переменной x подставить конкретное числовое значение, то мы получим высказывание, например, «2 + 2 > 4» (ложное высказывание); во втором предложении надо указать фамилию школьника, его адрес, адрес школы и тогда предложение будет либо истинным, либо ложным, т.е. — высказыванием.

Определение 25. Предложение, в котором есть одна или несколько переменных, которое при конкретных значениях переменных преобразовывается в высказывание, называется предикатом (с одной переменной — одноместным, с двумя переменными — двухместным и т.д.)[10].

Обозначают: одноместные предикаты A(x), B(x), A(y), M(p) и т.п.; двухместные — A(x; y), B(x; q), A(m; y) и т.д.

Определение 26. Множество значений переменной x, при которых предикат превращается в высказывание, называется областью определения предиката. В нашем курсе будем ее обозначать буквой X.

Определение 27. Подмножество T множества X ($T \subset X$), при подстановке значений которого в предикат он преобразуется в истинное высказывание, называется множеством истинности предиката.

Пример 12. Рассмотрим одноместный предикат «$x + 3 < 3x – 5$». У него X = R. Для нахождения T надо решить данное неравенство. Получим $x > 4$. Таким образом, $T = (4; +\infty)$.

[10] Из определения понятно, что предикат не может быть истинным или ложным, но если он при конкретных значениях переменной будет обращаться в истинное высказывание, то будем говорить для краткости, что предикат истинен (или, аналогично, ложен).

Определение 28. Два предиката A(x) и B(x), заданные на одном и том же множестве X, называются эквивалентными (равнозначными), если они имеют одно и то же множество истинности.

Это записывается так: $A(x) \sim B(x)$ (или $A(x) = B(x)$).

Пример 13. Предикаты «$x < 5$» и «$3x - 15 < 0$» эквивалентны, т.к. имеют одно и то же множество истинности $T = \ -\infty; 5\ $.

2.1 Кванторы

По определению 25 предикат обращается в высказывание при конкретных значениях переменной (переменных). Есть еще один способ превращения предиката в высказывание: поставить перед предикатом слова а) «все», «каждый», «всякий» и др., или б) «существует», «найдется», «хотя бы один» и т.п.

Пример 14. Имеем предикат P(x): «$2x < 4$». Но предложение «Для всех действительных x справедливо неравенство $2x < 4$» будет уже высказыванием, в данном случае ложным, т.к. не при всех значениях переменной выполняется неравенство, например, при x = 5 неравенство $2 \cdot 5 < 4$ будет ложным.

Слово из группы а), поставленное перед предикатом, называется квантором общности. В общем виде записывается: $\forall x \in X \ \ P \ \ x$. Символ $\forall$ — это перевернутая первая буква английского слова All — все.

Слово из группы б), поставленное перед предикатом, называется квантором существования. Записывается: $\exists x \in X \ \ P \ \ x$ (читают: «Существует такое x из X, что P от x»). Символ $\exists$ — это перевернутая первая буква английского слова Exist — существует.

Для любого предиката выполняются следующие равенства:

1. $\overline{\forall x \in X \ \ A \ \ x} = \exists x \in X \ \ \overline{A \ \ x}$.
2. $\overline{\exists x \in X \ \ A \ \ x} = \forall x \in X \ \ \overline{A \ \ x}$.

2.2. Операции над предикатами

Предикаты, так же как и высказывания, бывают элементарными и составными. Составные предикаты образуются из элементарных при помощи логических связок «и», «или», «неверно, что», «если…, то…», «тогда и только тогда, когда».

Определение 29. Пусть на множестве X задан предикат A(x). Его отрицанием называют предикат $\overline{A(x)}$, определенный на том же множестве X, причем предикат $\overline{A(x)}$ истинен при тех значениях x из множества X, при которых предикат A(x) ложен, и наоборот.

Если T — множество истинности предиката A(x), x∈X, то множеством истинности предиката $\overline{A(x)}$ является дополнение $\overline{T}$ (рис. 1).

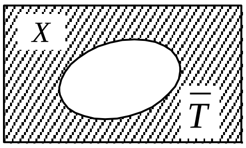


Рис. 1

Определение 30. Пусть на множестве X заданы два предиката A(x) и B(x). Их конъюнкцией называется предикат $A\ x \wedge B\ x$. Он истинен при тех значениях x из множества X, при которых истинны одновременно оба предиката A(x) и B(x).

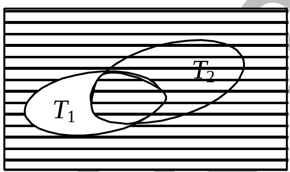
Если T1 — множество истинности предиката A(x), x ™ X, а T2 — множество истинности предиката B(x), x™X, то множество истинности T предиката $A\ x \wedge B\ x$, x™X, — пересечение множества истинности предикатов A(x) и B(x), т.е. $T = T_1 \cap T_2$.

Определение 31. Пусть на множестве X заданы два предиката A(x) и B(x). Их дизъюнкцией называется предикат $A\ x \vee B\ x$. Он истинен при тех значениях x из множества X, при которых истинен хотя бы один из предикатов A(x), B(x).

Множеством истинности предиката $A\ x \vee B\ x$, x ™ X, является $T = T_1 \cup T_2$, где T1 — множество истинности предиката A(x), а T2 — множество истинности предиката B(x) (на рис. T — вся заштрихованная область).

Определение 32. Пусть на множестве X заданы два предиката A(x) и B(x). Их импликацией называется предикат $A\ x \Rightarrow B\ x$ (читают: «Если A(x), то B(x)»). Импликация ложна только в одном случае: A(x) — истинно, B(x) — ложно, а во всех остальных случая импликация истинна.

Множеством истинности импликации является множество $T = \overline{T}_1 \cup T_2$, где T1 — множество истинности предиката A(x), а T2 — множество истинности предиката B(x). На рис. множество T показано штриховкой.



Определение 33. Эквиваленцией предикатов A(x) и B(x) называется предикат «A(x) тогда и только тогда, когда B(x)» (A(x) ⇔ B(x)), который истинен при тех и только тех значениях , при которых оба предиката A(x) и B(x) одновременно истинны или ложны.

Множество истинности эквиваленции находится из равенства $T_{A\Leftrightarrow B} = \ T_A \cap T_B \ \cup \ \overline{T}_A \cap \overline{T}_B$.

§ 3. Отношение логического следования и равносильности на множестве предикатов

Существуют импликации предикатов, которые при любых значениях переменных обращаются только в истинные высказывания.

Определение 34. Если импликация $A\ x \Rightarrow B\ x$ истинна для любого $x \in X$, то она называется логическим следованием (предикат $B\ x$ логически следует из предиката $A\ x$

).

В этом случае называют:

— $B\ x$ необходимым условием для $A\ x$;

— $A\ x$ достаточным условием для $B\ x$.

Пример 15. Вместо многоточия вставьте слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно»: «Для того, чтобы число n делилось на 6, …, чтобы оно делилось на 2 и на 3» ($n \in N$).

Решение. Обозначим через $A\ x$: «число n делится на 6», через $B\ x$: «число n делится на 2 и на 3»

1) Рассмотрим импликацию «Если число делится на 6, то одно делится на 2 и 3».

Эта импликация всегда истинна, значит, она является логическим следованием. Отсюда исходное предложение сформулируется: «Для того, чтобы число n делилось на 6, необходимо, чтобы оно делилось на 2 и на 3».

2) Рассмотрим обратную импликацию: «Если число делится на 2 и на 3, то одно делится на 6».

Эта импликация всегда истинна, значит, она является логическим следованием. Отсюда исходное предложение сформулируется: «Для того, чтобы число n делилось на 6, достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3».

Сравнивая пункты 1) и 2), получаем окончательную формулировку:

«Для того, чтобы число n делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3».

Определение 35. Если предикат $B\ x$ логически следует из предиката $A\ x$, а предикат $A\ x$ логически следует из предиката $B\ x$, то такие предикаты называются эквивалентными на множестве X.

Умозаключения

§ 4. Строение теоремы. Виды теорем

Попытаемся коротко охарактеризовать строение любого раздела математики.

Во-первых, используются основные (неопределяемые) понятия[11.] Например, точка, прямая, плоскость, множество и т.д.). Далее идут понятия, которые мы определяем (например: «параллелограмм — это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны»).

Во-вторых, есть высказывания, истинность которых принимается без доказательства (например, «через 2 точки можно провести прямую, причем только одну»). Эти высказывания называются аксиомами.

В-третьих, истинность многих высказываний можно доказать, опираясь на аксиомы или ранее доказанные высказывания. Такие высказывания называются теоремами.

[11] Понятие — это форма мышления, в которой отображаются основные свойства изучаемых объектов.

Определение 36. Теорема — это высказывание, истинность которого может быть доказана в данной аксиоматической теории[12].

Каждая теорема состоит из условия и заключения. Чтобы легче было выделить условие и заключение теоремы, ее часто формулируют в виде импликации «если…, то…» ($A\ x \Rightarrow B\ x\ ,\ x \in X$). Например, из курса геометрии средней школы известна теорема «если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм».

Первая часть $A\ x$ называется условием теоремы (это то, что в теореме дано как известное), а вторая часть $B\ x$ называется заключением теоремы (это то, что надо доказать).

Кроме условия и заключения в каждой теореме есть разъяснительная часть (преамбула), которая описывает множество объектов, о которых идет речь в теореме. В формулировке теоремы разъяснительная часть может отсутствовать, но всегда надо иметь в виду и при доказательстве ее необходимо выделять.

Итак, любая теорема ($\forall x \in X \quad A\ x \Rightarrow B\ x$ или $\exists x \in X \quad A\ x \Rightarrow B\ x$) состоит из трех частей:

1) $\forall x \in X$ или $\exists x \in X$ — разъяснительная часть теоремы;

2) предикат $A\ x$ — условие теоремы;

3) предикат $B\ x$ — заключение теоремы.

Теорема не всегда формулируется в виде импликации, например: «в равнобедренном треугольнике углы при основании равны». Но и эту теорему можно записать в виде импликации. Попробуйте это сделать самостоятельно.

4.1. Виды теорем

Пусть дана теорема в общем виде: $\forall x \in X \quad A\ x \Rightarrow B\ x$ (1). Из теоремы (1) , назовем ее прямой теоремой, можно образовать новые высказывания:

(2) $\forall x \in X \quad B\ x \Rightarrow A\ x$ — поменяли местами условие и заключение. Если высказывание (2) истинно, то оно называется теоремой, обратной для теоремы (1);

(3) $\forall x \in X \quad \overline{A\ x} \Rightarrow \overline{B\ x}$ — условие и заключение заменили их отрицаниями. Если высказывание (3) истинно, то оно называется теоремой, противоположной для теоремы (1);

(4) $\forall x \in X \quad \overline{B\ x} \Rightarrow \overline{A\ x}$ — условие и заключение в (3) поменяли местами. Если высказывание (4) истинно, то оно называется теоремой, обратной для теоремы (3) (обратной для противоположной) или противоположной для теоремы (2) (противоположной для обратной).

Из школьного курса известно, что не всегда теорема и обратное ей утверждение

---

[12] Из определения ясно, что теорема не может быть ложным высказыванием.

(высказывание) являются истинными одновременно, т.е. не всегда для теоремы существует обратная (предлагаем самостоятельно найти несколько пар таких утверждений). Но нетрудно доказать, что всегда справедливо равенство $A\ x \Rightarrow B\ x \;=\; \overline{B\ x} \Rightarrow \overline{A\ x}$ (5).

Сделайте это самостоятельно с помощью таблицы истинности:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	(*) $A \Rightarrow B$	(**) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$
и	и	л	л	и	и
и	л				
л	и				
л	л				

Заполните таблицу, сравните столбцы (*) и (**) и убедитесь, что импликации $A \Rightarrow B$ и $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ одновременно истинны или одновременно ложны, а это и будет говорить о том, что доказываемое равенство (5) верно.

§ 5. Способы доказательства теорем

5.1. Способы доказательства теорем

При доказательстве теоремы путем рассуждений из одного или нескольких предложений, называемых посылками, получают новое предложение, которое называется заключением.

1. Основным способом доказательства теорем является дедукция[13] — такой способ, когда между посылками и заключением существует отношение логического следования и рассуждение идет от более общего случая к менее общему (частному) случаю. При этом само рассуждение называется дедуктивным.

В дедуктивном рассуждении при истинных посылках и отношении логического следования нельзя получить ложное заключение.

2. Кроме дедуктивного способа доказательства теорем существует индуктивный способ.

Различают полную и неполную индукцию. При полной индукции предполагается рассмотрение всех возможных случаев (в школе в этом случае ведут речь о методе перебора). При неполной индукции (из нескольких частных случаев делается общий вывод) возможно только выдвижение гипотезы, которая бывает и ошибочна.

3. Метод математической индукции (строгий математический метод доказательства). Будет рассмотрен позже, при изучении теории чисел.

4. Метод доказательства от противного. В основе его лежит равенство (5) из пункта 4.1 $A\ x \Rightarrow B\ x \;=\; \overline{B\ x} \Rightarrow \overline{A\ x}$ (*).

Для доказательства теоремы $\forall x \in X \quad A\ x \Rightarrow B\ x$ допускают, что заключение теоремы $B\ x$ ложное высказывание, тогда отрицание $\overline{B\ x}$ — высказывание истинное

[13] От латинского *deductio* — вывод.

при всех $x \in X$. Затем путем рассуждений доказывают, что из истинности предиката $\overline{B\ x}$ следует истинность предиката $\overline{A\ x}$. Если это удается доказать, то, значит, доказана теорема $\forall x \in X \quad A\ x \ \Rightarrow B\ x$, которая равносильна теореме $\forall x \in X \quad \overline{B\ x} \ \Rightarrow \overline{A\ x}$ (см. (*)).

5.2. Правильные и неправильные рассуждения

Любое рассуждение состоит из ряда высказываний, вытекающих друг из друга.

Рассуждение с точки зрения математической логики состоит из посылок (высказваний, принимаемых как исходные) и заключения.

Рассуждение считается правильным, если из истинных посылок обязательно вытекает истинное заключение.

Если же из правдивых посылок не вытекает обязательная истинность заключения, то рассуждение считается неправильным.

Пример 16.

а) *Правильное рассуждение:*

(1) Все птицы имеют два крыла.
(2) Аист — птица.
―――――――――――――
(3) У аиста два крыла.

б) *Неправильное рассуждение:*

(1) Все рыбы живут в воде.
(2) Ручейник живет в воде.
―――――――――――――
(3) Ручейник — рыба.

(1) и (2) — посылки, (3) — заключение.

Процесс получения заключения из посылок называется выводом. Вывод — это обязательно правильное рассуждение.

Доказательство — это способ обоснования истинности того или иного рассуждения.

5.3. Простейшие правила вывода

1. Правило заключения $\dfrac{\begin{matrix} A \Rightarrow B \\ A \end{matrix}}{B}$

Или, по-другому, $A \Rightarrow B \ \wedge A \ \Rightarrow B$. Составим таблицу истинности для данного высказывания:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B \ \wedge A$	$A \Rightarrow B \ \wedge A \ \Rightarrow B$
и	и	и	и	**и**
и	л	л	л	**и**
л	и	и	л	**и**
л	л	и	л	**и**

Обратите внимание: в последнем столбце только буква и, т.е. высказывание $A \Rightarrow B \ \wedge A \ \Rightarrow B$ всегда истинно.

2. Правило отрицания $\dfrac{\begin{matrix} A \Rightarrow B \\ \overline{B} \end{matrix}}{\overline{A}}$

3. Правило силлогизма $\dfrac{\begin{matrix} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \end{matrix}}{A \Rightarrow C}$

Можно привести немало и других правил вывода.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

1. Составьте таблицу истинности высказываний A$\Rightarrow B$ и B$\Rightarrow$ A. Определите, истинно ли, что (A $\Rightarrow$ B) $\Leftrightarrow$ (B$\Rightarrow$ A)?
2. Докажите:
   а) (A $\vee$ B) $\Leftrightarrow$ (B $\vee$ A);
   б) (A $\Leftrightarrow$ B) $\Leftrightarrow$ ((A $\Rightarrow$ B) $\wedge$ (B$\Rightarrow$ A));
   в) $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$; г) $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$
3. Из предиката $x^2 + 4x = 0$, заданного на множестве R, получите 3 высказывания. При каких значениях переменной x этот предикат преобразуется в истинное высказывание.
4. Как называется предикат вида f(x)=g(x); f(x)>g(x)?
5. На множестве натуральных чисел задан предикат C(x): «число x-делитель числа 12». Сформулируйте высказывания C(4), C(5), C(8) и найдите их значения истинности.
6. Найдите множество истинности конъюнкции предикатов A(x) и B(x) таких, что A(x): «(x-1)(x-2)(x-3)(x+5)=0» и B(x): «4x+5>7», когда эти предикаты заданы: а) на множестве N; б) на множестве R.
7. Найдите множество истинности дизъюнкции предикатов A(x) и B(x) таких, что A(x): «x^2-1<5» и B(x): «x^2+5x+6=0», заданных на множестве всех действительных чисел.
8. Найдите множество истинности для импликации предикатов A(x) и B(x), если A(x): «2x-3>5» и B(x): «x-чётное число», и эти предикаты заданы на множестве N.
9. Составьте конъюнкцию предикатов A(x): «x>8» и B(x): «x<10», заданных на множестве R. Найдите её множество истинности.
10. Найдите множество истинности конъюнкции предикатов A(x) и B(x), заданных на множестве Z, если:
    а) A(x): «x^2+5x+6=0» и B(x): «$|x-1| > 1$»;
    б) A(x): «x^2+5x-6=0» и B(x): «$|x-1| < 1.2$»;
11. На множестве геометрических фигур заданы предикаты A(x): «фигура x – треугольник» и B(x): «фигура x – четырёхугольник».
    а) Сформулируйте импликацию A(x)$\Rightarrow B(x)$ и задайте её множество истинности;

б) Изобразите множество $T^{A(x)\Rightarrow B(x)}$ при помощи кругов Эйлера.

12. На множестве N определены предикаты A(x): «число 3n - чётное» и B(x): «число n – чётное». Сформулируйте предикат A(x)$\Rightarrow B(x)$ и найдите его множество истинности.

13. а) Множество X={-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} – область определения предикатов A(x): «2x-1<3» и B(x): «2x>0».

б) Множество X={1,2,3,4,…,20} – область определения предикатов A(x): «x – простое число» и B(x): «x – чётное число».

Найдите множество истинности этих предикатов с помощью кругов Эйлера и укажите множество истинности следующих предикатов:

а) A(x) /\ B(x); б) A(x) \/ B(x);

в) A(x)$\Rightarrow B(x)$; г) A(x)$\Leftrightarrow$B(x);

д) A(x) /\ $\overline{B(x)}$; е) $\overline{A(x) \wedge B(x)}$;

ж) $\overline{\overline{A(x)} \wedge B(x)}$; з) $\overline{A(x) \setminus / B(x)}$; и) $\overline{\overline{A(x)} \setminus / \overline{B(x)}}$.

14. На множестве N заданы предикаты A(x): «x>14» и B(x): «x<29».

а) Сформулируйте конъюнкцию этих предикатов и найдите её множество истинности;

б) Сформулируйте дизъюнкцию этих предикатов и найдите её множество истинности;

в) Сформулируйте импликацию этих предикатов и найдите её множество истинности;

г) Сформулируйте эквиваленцию этих предикатов и найдите её множество истинности.

Задание 2

1. Областью определения предикатов A(x): "3x - 2<4" и B(x): "x(x+2)=0" является множество X={-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

а) сформулируйте конъюнкцию этих предикатов и найдите множество истинности;

б) сформулируйте дизъюнкцию этих предикатов и найдите множество истинности;

в) сформулируйте импликацию этих предикатов и найдите множество истинности;

г) сформулируйте эквиваленцию этих предикатов и найдите множество истинности.

2. Докажите, что предикат A(x): "x^2=25", заданный на множестве действительных чисел, следует из предиката B(x): "x=5", заданного на том же множестве.

3. На множестве X={1, 2, . . , 10} заданы предикаты A(x): "число x – простое" и B(x): "число x – четное".

а) Запишите словами предикат A(x) $\Rightarrow$ $\overline{\hat{A}(\tilde{o})}$ и найдите его множество истинности;

б) правда ли, что предикат $\overline{\hat{A}(\tilde{o})}$ логически следует из предиката A(x).

4. На множестве X= {x/x є N, x<19} заданы предикаты A(x): "число x – делитель

числа 18" и B(x): "x – четное число"

а) Запишите словами предикат $\overline{A(\tilde{o})} \Rightarrow$ B(x) и найдите его множество истинности;

б) правда ли, что предикат B(x) логически следует из предиката $\overline{A(\tilde{o})}$?

5. На множестве Q заданы предикаты F(x): "x<0" и К(x): "x – целое отрицательное число".

   а) Докажите, что F (x) логически следует из К(x);

   б) Сформулируйте импликацию К(x) $\Rightarrow$ F(x) с помощью слова "необходимо".

6. На множестве N заданы предикаты C(x): "число n кратно числу 7" и D(n): "число n кратно числу 21".

   а) Докажите, что C(n) логически следует из D(n);

   б) Сформулируйте истинную импликацию из предикатов C(n) и D(n) с помощью слова "достаточно".

7. На множестве Z задана импликация P(x) $\Rightarrow$ Q(x): "если число x больше 2, то оно положительно".

   а) Укажите предикаты P(x) и Q(x) и множества истинности этой импликации;

   б) запишите эту импликацию с помощью слова "необходимо";

   в) запишите эту импликацию с помощью слова "достаточно".

8. На множестве R заданы предикаты

   M(x): "x2 - 5x - 6 = 0" и N(x): "(x - 6)(x - 1) = 0".

   а) Запишите словами импликацию N(x) $\Rightarrow$ M(x) и укажите ее множество истинности;

   б) правда ли, что M(x) логически следует из N(x)?

9. На множестве N задана импликация L(n) $\Rightarrow$ V(n): "Если число n делится на 35, то оно делится на 5 и на 7".

   а) Укажите множество истинности этой импликации и предикатов L(n) и V(n);

   б) Запишите эту импликацию с помощью слова "необходимо";

   в) запишите эту импликацию с помощью слова "достаточно".

Задание 3

1. Запишите высказывание "четырехугольник является ромбом тогда, когда все его стороны равны":

   а) в виде импликации "если . . . , то . . . ";

   б) с помощью слова "достаточно";

   в) с помощью слова "необходимо".

2. Запишите высказывание "две фигуры равновелики тогда, когда они равны:

   а) в виде импликации "если . . . , то . . . ";

   б)с помощью слова "необходимо";

3. Вставьте вместо многоточия термин "необходимо", "достаточно", "необходимо и достаточно" в предложения:

   а) "для того чтобы натуральное число было кратно 4, ... , оно было кратно 12";

б) "для того чтобы выпуклый четырехугольник имел центр симметрии,. . ., он был параллелограммом";

в) "для того чтобы точка лежала на биссектрисе угла, . . . , она была равноудалена от сторон этого угла";

г) "для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, ... , чтобы его диагонали были равны";

д) "для того чтобы сумма двух целых неотрицательных чисел была больше каждого слагаемого, . . . , чтобы оба слагаемых были неотрицательными";

е) "для того чтобы четырехугольник был ромбом, . . . , чтобы его диагонали были взаимноперпендикулярными";

ж) "для того чтобы точка была равноудалена от сторон угла, . . ., чтобы она лежала на биссектрисе этого угла";

з) "для того чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 7, . . . , чтобы каждое из этих чисел делилось на 7";

и) "для того чтобы четырехугольник был ромбом, . . . , чтобы его диагонали были взаимноперпендикулярны и делились в точке пересечения пополам";

к) "для того чтобы вычитание могло выполняться во множестве N, . . . , чтобы уменьшаемое было больше чем вычитаемое".

4. Докажите: а) $T_{A(x)\wedge B(x)} = T_{A(x)} \cap T_{B(x)}$;

б) $T_{A(x)\vee B(x)} = T_{A(x)} \cup T_{B(x)}$;

5. Сформулируйте импликацию обратную и противоположную данной:

а) когда идет дождь, то дорога мокрая;

б) когда я не сдам зачет, то родители будут ругать;

в) когда ученика перевели в следующий класс, то ни по одному предмету у него нет двоек.

6. Будут ли равносильны следующие предложения:

а) "£ – достаточное условие для ß" и
"ß – достаточное условие для £".

б) "А – необходимое условие для В" и
"В – необходимое условие для А".

в) "£ – необходимое условие для ß" и
"ß – достаточное условие для £".

7. Известно, что А есть необходимое условие для В. Сформулируйте достаточное условие для отрицания В.

8. Если А – необходимое условие для В, а В – необходимое условие для С, то будет ли А необходимым условием для С? Будет ли С достаточным условием для А?

9. Когда А – достаточное условие для В, а В – достаточное условие для С, то будет ли А достаточным условием для С? Будет ли С необходимым условием для А?

Занятие 4

1. В теореме

а) « в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы»;

б) «в прямоугольнике диагонали равны»;

в) «когда многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность»;

г) «если сумма цифр натурального числа делится на 9, то это число делится на 3»;

д) «две фигуры равновелики, когда они равны»;

е) «если число n делится на 35, то оно делится на 5 и на 7»;

Укажите характеристическую часть, условие P(x), заключение Q(x), сформулируйте это теорему в виде импликации ($\forall$ x) ($P(x) \Rightarrow Q(x)$); сформулируйте теорему, обратную данной, теорему, противоположную данной.

2. В каждом из следующих случаев сформулировать теорему;

а) в виде импликации ($\forall$ x) ($A(x) \Rightarrow B(x)$);

б) теорему, обратную сформулированной теореме;

в) теорему, противоположную сформулированной теореме;

г) теорему, обратную противоположной:

1. A(x) : «трапеция x равнобедренная »; B(x): «углы при основании трапеции равны»; X – множество трапеций;

2. A(x): «число x заканчивается цифрой 0»; B(x): «число x делится на 5»; X – множество целых неотрицательных чисел;

3. A(x): «диагонали параллелограмма x взаимноперпендикулярны»; B(x): «параллелограмм x - ромб»; X – множество параллелограммов;

4. A(x): «четырехугольник x - ромб»; B(x): «диагонали четырехугольника x взаимноперпендикулярны;

5. A(x)»: «число x делится на 3»; B(x): «число x делится на 6».

Укажите, какие из этих теорем будут истинными.

3. Правильны ли следующие рассуждения:

а) Все натуральные числа положительные. Число 5 – положительное. Число 5 – натуральное.	б) все числа, которые делятся на 4, делятся на 2. Число 127 не делится на 4. Число 127 не делится на 2.
в) Все киты – млекопитающие. Все млекопитающие – хордовые. Все киты – хордовые.	г) все спортсмены умеют хорошо бегать. Некоторые отличники – спортсмены. Некоторые отличники умеют хорошо бегать.
д) Все пионеры – школьники. Все комсомольцы – не пионеры. Все комсомольцы – не школьники.	е) Все притоки Днепра находятся в Европе. Неман находится в Европе. Неман – приток Днепра.
ж) Каждый член комитета – богатый и республиканец. Некоторые члены комитета – пожилые.	з) Все цветы – растения. Малина – растение. Малина – цветок.

Существуют пожилые – республиканцы.	
и) Петя – парень, у которого нет автомобиля. Нине нравится только парень, который имеет автомобиль. Нине не нравится Петя.	к) Все деревья – растения. Цветок – растение. Цветок – дерево.

ТЕМА 3.
ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ЛОГИКИ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОНЯТИЙ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

§ 1. Понятия

1.1. Понятия. Объем и содержание понятия

Понятие — 1) (филос.) форма мышления, отражающая существенные свойства, связи и отношения предметов и явлений. Основная логическая функция понятия — выделение общего, которое достигается посредством отвлечения от всех особенностей отдельных предметов данного класса. 2) *В логике* — мысль, в которой обобщаются и выделяются предметы некоторого класса по определенным общим и в совокупности специфическим для них признакам[14].

Понятие — мысль, фиксирующая признаки отображаемых в ней предметов и явлений, позволяющие отличать эти предметы и явления от смежных с ними[15].

Всякий математический объект обладает определенными свойствами. Среди свойств данного объекта различают *существенные* и *несущественные* для его выделения из других объектов.

Свойство считают *существенным* для объекта, если оно присуще этому объекту и без него он не может существовать. Например, для прямоугольника существенными являются такие свойства: *иметь четыре стороны*, *иметь четыре прямых угла*, *иметь равные диагонали*. Несущественно для прямоугольника *ABCD* свойство *сторона AB вертикальна*.

Поэтому, чтобы понимать, что представляет собой данный математический объект, достаточно знать его существенные свойства. *В таком случае говорят, что имеется понятие об этом объекте*.

Когда говорят о математическом понятии, то обычно имеют в виду множество объектов, обозначаемых одним термином (словом, названием). Так, говоря о прямоугольнике, имею в виду все геометрические фигуры, являющиеся прямоугольниками. Говорят, что множество всех прямоугольников составляет объем понятия *прямоугольник*.

Определение. *Объем понятия* — это множество всех объектов, обозначаемых одним термином.

Любое понятие, кроме объема, имеет содержание.

Определение. *Содержание понятия* — это множество всех существенных свойств объекта, отраженных в этом понятии.

1.2. Родо-видовые и другие отношения между понятиями

[14] Советский энциклопедический словарь. — М., 1980.
[15] Горский Д. П. и др. Краткий словарь по логике. — М., 1991.

Подход к объему понятия как к множеству дает возможность наглядно представлять отношения между понятиями.

Условимся объем понятия a обозначать A, объем понятия b — B и т.д.[16]

Определение. Пусть понятия *a* и *b* таковы, что объем понятия *a* является собственным подмножеством объема понятия *b*, т.е. $A \subset B$. В этом случае говорят, что:

понятие *b* является *родовым* по отношению к понятию *a*, а понятие *a видовым* по отношению к понятию *b*,

либо

понятие *b* шире понятия *a*, а понятие *a* уже понятия *b*,

либо

понятие *b* — обобщение понятия *a*, а понятие *a* — частный случай понятия *b*.

Рассмотрим, например, понятия *четырехугольник* и *прямоугольник*. Т.к. всякий прямоугольник является четырехугольником, то объем понятия *прямоугольник* включается в объем понятия *четырехугольник*. Следовательно, можно утверждать, что понятия *четырехугольник* является родовым по отношению к понятию *прямоугольник*, а понятия *прямоугольник* — видовым по отношению к понятию *четырехугольник*.

Понятие рода и вида относительны: одно и то же понятие может быть родовым по отношению к одному понятию и видовым по отношению к другому. Например, понятие *четырехугольник* — родовое по отношению к понятию *прямоугольник*, но видовое по отношению к понятию *многоугольник* (рис. 1).

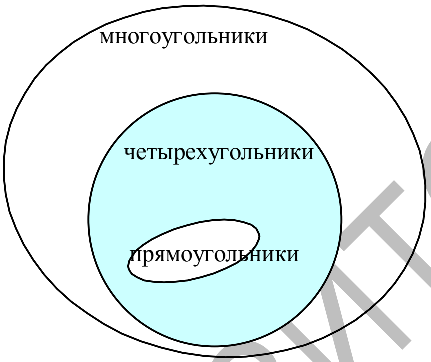


Рис. 1

1.3. Виды определений (способы определения понятий). Требования к определению понятий. Типичные ошибки в определениях

Понятиям дают определения (кроме неопределяемых, так называемых *основных математических понятий*).

Определение — это предложение, с помощью которого раскрывается содержание понятия либо устанавливается значение термина.

1.3.1. Виды определений

1. ***Определение понятия через род и видовое отличие.*** При этом способе указывается родовое (т.е. более общее) понятие, а затем — то свойство, которое выделяет нужный вид из других видов данного рода (так называемое *видовое отличие*).

Например, в определении «ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны» родовое понятие — *параллелограмм*, а видовое отличие — *все стороны равны*.

2. ***Генетический способ*** указывает на происхождение понятия.

---

[16] Мы будем пользоваться и другими обозначениями: понятия обозначать большими латинскими буквами *A*, *B*, *C*,…, а их объемы соответственно V_A, V_B, V_C,…

Например, «окружность — это множество точек плоскости, которые удалены от данной точки на данное положительное расстояние».

3. ***Аксиоматический способ*** — определение понятий с помощью аксиом.

Примером является определение множества натуральных чисел с помощью аксиом Пеано (будем изучать позже в теории чисел).

4. ***Индуктивный способ.*** Например, «геометрической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число».

5. В начальной школе чаще всего применяют ***остенсивные определения***[17], т.е. те, которые устанавливают значения терминов путем демонстрации объектов, которые этими терминами определяются. Например, таким образом определяются понятия равенства и неравенства:

$2 \cdot 7 > 2 \cdot 6,$	$17 - 5 = 8 + 4,$
$32 + 1 < 17.$	$9 : 3 = 3.$
Это неравенства.	Это равенства.

1.3.2. Требования к определениям понятий

1. Каждое определение должно быть соразмерным, это значит, что объем определяемого понятия должен быть равным объему определяющего понятия.

Например, «прямоугольник — это параллелограмм, у которого есть прямой угол»: объемы понятий *прямоугольника* и *параллелограмма с прямым углом* совпадают (равны).

Несоблюдение этого требования приводит к ошибкам. Например, в определении «*прямые, которые не имеют общих точек (не пересекаются) называются параллельными прямыми*» пропущены слова «на плоскости». Это приводит к тому, что объем понятия расширяется, т.к. скрещивающиеся прямые (в пространстве) также не имеют общих точек.

Правда, такое неточное определение дается в начальной школе, но дети не «выходят» пока в пространстве, все задачи рассматриваются на плоскости.

2. Определение, по возможности, не должно быть отрицательным. Правда, иногда приходится этим пользоваться (**приведите примеры**).

3. В определении должны быть указаны ***все*** *свойства, позволяющие* ***однозначно*** *выявить объекты, принадлежащие объему определяемого понятия*.

4. В определении не должно быть лишних свойств (которые могут быть доказаны).

5. Определение не должно содержать порочного круга (т.е. одно понятие определять через второе, а второе — через первое. Например, а) «философ — это человек, изучающий философию», б) «философия — это наука, изучением которой занимается философ»).

6. Определяемый объект должен существовать.

1.4. Классификация

Под классификацией понимают разделение множества объектов, составляющих объем родового понятия, на виды.

Правильная классификация возможна при соблюдении следующих правил.

1. Классификация проводится по определенному признаку. Например, классификация треугольников по величине угла (остро-, тупо-, прямоугольные).

2. Классы попарно не пересекаются (не имеют общих элементов).

3. Объединение объемов понятий, получившихся при классификации, должно давать объем исходного понятия.

4. При классификации понятий надо переходить до ближайшего вида в данном родовом понятии. Например, прямоугольник — это параллелограмм (а не

[17] Ясно, что они не являются строгими с точки зрения математики.

четырехугольник!) с прямым углом, т.к. множество параллелограммов является подмножеством множества четырехугольников.

§ 2. Числовые выражения, равенства, неравенства

2.1. Понятие числового выражения. Значение числового выражения

Определение. 1) Каждое число является числовым выражением. 2) Если A и B — числовые выражения, то числовыми выражениями являются также $A + B,\ A - B,\ A \cdot B,\ A : B$.

Надо понимать, что равенства, неравенства числовыми выражениями не являются.

Если выполнить все указанные в числовом выражении действия, то получим число, которое называется *значением числового выражения*.

Не каждое числовое выражение имеет значение. Например, выражение 7 : (3 – 3) значения не имеет (на 0 делить нельзя).

Определение. Если значения двух числовых выражений совпадают, то говорят, что эти выражения равны.

Числовое выражение не является высказыванием, т.к. про него нельзя сказать — истинно оно или ложно.

2.2. Числовое равенство как высказывание. Свойства истинных числовых равенств

Если два числовых равенства A и B соединить знаком равно, то получим числовое равенство «$A = B$», которое может быть истинным (2 = 5 – 3) или ложным (6 + 3 = – 1). Поэтому числовое равенство можно назвать высказыванием.

Известны следующие ***свойства истинных числовых равенств***:

1. $a+b \Leftrightarrow a+c=b+c$.

Иначе говоря, если к обеим частям истинного числового равенства прибавить одно и то же числовое выражение, то получим истинное числовое равенство.

2. а) $a=b \Leftrightarrow a \cdot c=b \cdot c$; б) $a=b \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{c},\ c \neq 0$.

2.3. Числовое неравенство как высказывание. Свойства истинных числовых неравенств

Определение. Высказывание, в котором два числовых выражения соединены знаком «>» (больше) или «<» (меньше), называется числовым неравенством.

Числовые неравенства могут быть истинными или ложными.

Неравенства $a > b$ и $c > d$ называются *неравенствами одного смысла*, а неравенства $a > b$ и $c < d$ — *неравенствами противоположного смысла*.

Замечание. Известно, что:

1) $a > b \Leftrightarrow a-b > 0$;

2) $a < b \Leftrightarrow a-b < 0$;

3) $a = b \Leftrightarrow a-b = 0$;

Этими фактами бы будем пользоваться как аксиомами при доказательстве различных свойств неравенств.

Некоторые свойства истинных числовых неравенств:

1. $\forall a,b \in R \quad a > b \Rightarrow b < a$.

Доказательство. Если $a>b$, то $a - b > 0$ (см. замечание), тогда противоположное число $-\ a-b\ <0$, или $b–a<0$, откуда $b < a$.

2. $\forall a,\ b,c \in R \quad a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$ — транзитивность неравенств.

Доказательство. Из неравенств $a>b$ и $b>c$ имеем $a–b>0$ и $b–c>0$, поэтому сумма

$(a-b)+(b-c)>0$, откуда *a–c>0*, т.е. *a>c*.

3. Если *a>b* и *c* — произвольное числовое выражение, имеющее смысл, то $a+c>b+c$ (если к обеим частям числового неравенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим неравенство того же смысла, что и исходное).

Доказательство. Т.к. *a>b*, то *a–b>0* (**почему?),** далее прибавим *c* и тут же его отнимем от левой части неравенства, получим $a-b+c-c>0$, или $(a+c)-(b+c)>0$, откуда $a+c>b+c$.

4. а) Если *a>b* и *c*>0, то *ac>bc* и $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ (если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, имеющее положительное значение, то получим неравенство того же смысла, что и исходное).

б) а) Если *a>b* и *c*<0, то *ac<bc* и $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ (если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, имеющее отрицательное значение, то получим неравенство противоположного смысла, в отношении к исходному).

Доказательство. **Провести самостоятельно**.

Приведем еще некоторые свойства (без доказательства).

5. Если *a>b* и *c>d*, то *a+c>b+d* (неравенства одинакового смысла можно складывать).

6. Если *a>b* и *c<d*, то *a–c>b–d* (неравенства противоположного смысла можно вычитать).

7. Если *a>b>0*, то $a^n>b^n$ для любого натурального числа *n*.

Поскольку числовые равенства и неравенствами являются высказываниями, то над ними можно выполнять логические операции (конъюнкцию, дизъюнкцию и т.д.). Например, неравенство $5\geq 2$ можно рассматривать как дизъюнкцию $5>2\vee 5=2$. Т.к. первое из высказываний истинно, то и дизъюнкция, а следовательно, и исходное неравенство $5\geq 2$ будут истинны.

2.4. Выражение с переменной. Область определения выражения с переменной

Буквы, которые могут принимать различные числовые значения, называются *переменными,* а выражения, их содержащие, *выражениями с переменной* (переменными).

Число, подставляемое в выражение вместо переменной, называется *значением переменной*.

Множество всех значений переменной, которые могут быть подставлены в выражение, и при которых выражение принимает некоторое числовое значение, называется *областью определения выражения*.

Выражение с одной переменной будем обозначать $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ и т.д.

Пример. Найти область определения выражения $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$. *Решение.* На 0 делить нельзя, поэтому $x\neq\pm 2$. Значит, область определения задается промежутком $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

2.5. Тождественные преобразования выражения с переменной. Тождество

Определение. Два выражения $f(x)$ и $g(x)$ с переменной *x* называются тождественно равными на множестве *X*, если при любых значениях переменной $x_0\in X$ они принимают равные числовые значения: $f(x_0)=g(x_0)$.

Если два тождественно равные выражения соединить знаком равенства, то получим высказывание, называемое *тождеством*.

Замена выражения тождественно равным ему на некотором множестве *X*, называется *тождественным преобразованием* на множестве X.

§ 3. Уравнения. Системы и совокупности уравнений

3.1. Понятие об уравнении с одной переменной как предикате вида $f(x)=g(x)$. Множество корней уравнения

Пусть даны два выражения $f(x)$ и $g(x)$ с областью определения X.

Определение. Уравнением с одной переменной x называется предикат вида $f(x)=g(x)$.

Определение. Значение переменной $x=a$, $a\in X$, при котором уравнение $f(x)=g(x)$ обращается в истинное числовое равенство $f(a)=g(a)$, называется корнем (решением) данного уравнения.

Решить уравнение — это значит найти множество всех его корней или доказать, что их не существует.

Приступая к решению уравнения, стоит найти его область определения.

Определение. Областью определения уравнения $f(x)=g(x)$, $x\in X$, называется множество всех значений x, при которых выражения $f(x)$ и $g(x)$ имеют значения (смысл).

3.2. Теоремы о равносильных уравнениях

Определение. Два уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ и $f_2(x)=g_2(x)$ называются равносильными, если их множества решений совпадают.

Определение. Если множество T_1 корней уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ (1) является подмножеством множества T_2 корней уравнения $f_2(x)=g_2(x)$ (2), то уравнение (2) называется *следствием уравнения* (1).

Теорема. Если к обеим частям уравнения $f(x)=g(x)$ (1), заданного на множестве X, прибавить одно и то же выражение $F(x)$, определенное на том же множестве, то получится уравнение $f(x)+F(x)=g(x)+F(x)$ (2), равносильное исходному уравнению (1).

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что корни уравнения (1) являются корнями уравнения (2) и, наоборот, корни уравнения (2) являются корнями уравнения (1).

1. Пусть $x=a$ — корень уравнения (1), тогда $f(a)=g(a)$ (*) — истинное числовое равенство. Прибавим к обеим частям равенства (*) числовое выражение $F(a)$. На основании свойств числовых равенств (см. 2.2), получим истинное числовое равенство $f(a)+F(a)=g(a)+F(a)$. А это и говорит о том, что $x=a$ — корень уравнения (2). Таким образом, каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2).

2. Пусть $x=b$ — корень уравнения (2), тогда числовое равенство $f(b)+F(b)=g(b)+F(b)$ — верно. Прибавим к обеим частям последнего равенства числовое выражение $-F(b)$ и получим правдивое числовое равенство $f(b)=g(b)$. Это означает, что $x=b$ — корень уравнения (1). Таким образом, каждый корень уравнения (2) является корнем уравнения (1).

Мы получили, что корни уравнения (1) являются корнями уравнения (2) и наоборот. Следовательно, уравнения (1) и (2) — равносильные.

Следствия. 1. К обеим частям уравнения можно прибавить одно и то же число.

2. Члены уравнения можно переносить из одной части в другую с противоположным знаком.

Доказательство. **Провести самостоятельно.**

Теорема 2. Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ (1), заданного на множестве *X*, умножить (разделить) на одно и то же выражение $F(x)\neq 0$, определенное на том же множестве *X*, то получится уравнение $f(x)\cdot F(x)=g(x)\cdot F(x)$ $\left(\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{g(x)}{F(x)}\right)$ (2), равносильное уравнению (1).

Доказательство проводится аналогично доказательству **теоремы 1**.

3.3. Уравнения с двумя переменными. Системы и совокупности уравнений

Определение. *Уравнением с двумя переменными* x и y называется предикат вида $f(x, y)=g(x, y)$ (3), заданный на множестве X $((x, y)\in X)$.

Определение. *Решением уравнения* (3) с двумя переменными называется пара чисел $(a, b)\in X$, которая при подстановке в это уравнение превращается его в истинное числовое равенство $f(a, b)=g(a, b)$.

Обычно уравнения с двумя переменными имеют бесконечное множество решений. Так, например, уравнение *y=3x* имеет решениями пары чисел (–1, –3), (0, 0), (1, 3), … Есть, безусловно, уравнения с двумя переменными, которые имеют только одно решение ($x^2+y^2=0$) или ни одного ($x^2+y^2=-1$).

Если каждое решение уравнения (т.е. пару чисел) интерпретировать как координаты точки на плоскости, то получим множество точек плоскости, которое называется *графиком данного уравнения*. Графиком уравнения *y=3x* является прямая (рис. 2).

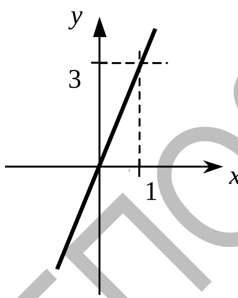


Рис. 2

Определение. Два уравнения с двумя переменными называются равносильными, если их множества решений совпадают.

Поскольку уравнения — это предикаты, то над ними возможно выполнять логические операции.

Определение. Конъюнкцией двух уравнений с двумя переменными называется предикат вида $f_1(x,y)=g_1(x,y)\wedge f_2(x,y)=g_2(x,y)$. Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда оба уравнения превращаются в истинные числовые равенства.

В средней школе такую конъюнкцию называют системой двух уравнений с двумя переменными и записывают так:

$$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y); \\ f_2(x,y)=g_2(x,y). \end{cases}$$

Понятно, что множество истинности конъюнкции предикатов является *множеством решений системы*.

Пара чисел $(a,b)\in X$ называется *решением системы*, если при подстановке каждое уравнение системы становится истинным числовым равенством.

Определение. Дизъюнкцией двух уравнений с двумя переменными называется предикат вида $f_1(x,y)=g_1(x,y)\vee f_2(x,y)=g_2(x,y)$. Дизъюнкция истинна тогда и только тогда, когда хотя бы одно уравнение превращается в истинное числовое равенство.

В средней школе такую дизъюнкцию называют совокупностью двух уравнений с двумя переменными и записывают так:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x,y)=g_1(x,y); \\ f_2(x,y)=g_2(x,y). \end{array}\right.$$

Понятно, что множество истинности дизъюнкции предикатов является *множеством решений совокупности*.

Пара чисел $(a,b)\in X$ называется *решением системы*, если при подстановке хотя бы одно уравнение системы становится истинным числовым равенством.

Таким образом, *множеством решений системы* является пересечение множеств решений каждого уравнения; а *множеством решений совокупности* — объединение множеств решений каждого уравнения.

Основные способы решения систем и совокупностей рассмотрим на семинарских занятиях.

§ 4. Неравенства. Системы и совокупности неравенств

4.1. Неравенство с переменной как предикат вида $f(x)<g(x)$. Множество решений неравенства

Определение. Неравенством с одной переменной называется предикат вида $f(x)<g(x)$ ($f(x)>g(x)$), заданный на множестве *X*.

Область определения предиката является областью определения неравенства, а множество истинности предиката — *множеством решений неравенства* $f(x)<g(x)$, $x\in X$. Другими словами, *решением неравенства* $f(x)<g(x)$, $x\in X$ называется всякое значение переменной $x=a$, при котором это неравенство превращается в истинное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти множество всех его решений.

4.2. Равносильные неравенства. Теоремы о равносильных неравенствах

Два *неравенства называются равносильными* (эквивалентными), если их множества истинности совпадают (т.е. все решения одного неравенства являются решениями другого и наоборот).

Теорема 1. Если к обеим частям неравенства $f(x)>g(x)$ (1), заданного на множестве *X*, прибавить одно и то же выражение $F(x)$, определенное на том же множестве *X*, то получится неравенство $f(x)+F(x)>g(x)+F(x)$ (2), равносильное исходному (1).

Доказательство. Опирается на свойства числовых неравенств (п. 2.3) и проводится аналогично доказательству теорем о равносильных уравнениях (п. 3.2).

Следствия. 1) К обеим частям неравенства можно прибавлять (отнимать) одно и то же число. 2)Члены неравенства можно переносить из одной части в другую с противоположным знаком.

Теорема 2. Если обе части неравенства $f(x)>g(x)$, заданного на множестве *X*, умножить (разделить) на одно и то же выражение $F(x)>0$, определенное на том же множестве *X*, то получится неравенство $f(x)\cdot F(x) > g(x)\cdot F(x)$ $\left(\frac{f(x)}{F(x)} > \frac{g(x)}{F(x)}\right)$, равносильное данному.

Доказательство. Опирается на свойства числовых неравенств (п. 2.3) и проводится аналогично доказательству теорем о равносильных уравнениях (п. 3.2).

Теорема 3. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$, заданного на множестве *X*, умножить (разделить) на одно и то же выражение $F(x) < 0$, определенное на том же множестве *X*, то получится неравенство $f(x)\cdot F(x) < g(x)\cdot F(x)$ $\left(\frac{f(x)}{F(x)} < \frac{g(x)}{F(x)}\right)$, равносильное данному.

Доказательство. Опирается на свойства числовых неравенств (п. 2.3) и проводится аналогично доказательству теорем о равносильных уравнениях (п. 3.2).

4.3. Системы и совокупности неравенств

Так как неравенства с переменными являются предикатами, то можно рассматривать логические операции над ними.

Определение. Конъюнкция неравенств $f_1(x) > g_1(x) \wedge f_2(x) > g_2(x)$, заданных на множестве *X*, называется системой неравенств.

В школе обозначается так:

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x); \\ f_2(x) > g_2(x). \end{cases}$$

Решением системы неравенств является пересечение множеств решений каждого неравенства системы.

Определение. Дизъюнкция неравенств $f_1(x) > g_1(x) \vee f_2(x) > g_2(x)$, заданных на множестве *X*, называется совокупностью неравенств.

В школе обозначается так:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) > g_1(x); \\ f_2(x) > g_2(x). \end{array}\right.$$

Решением совокупности неравенств является объединение множеств решений каждого неравенства системы.

Задания для самостоятельной работы

Применение теории множеств и логики к определению понятий школьного курса математики

1. Является ли понятие В: «многоугольник» обобщением понятия А: «четырехугольник»?
2. Сформулируйте определение диагонали четырехугольника. Укажите в сформулированном определении родовое понятие и видовое отличие. Определите логическую структуру видового отличия.
3. Значения каких выражений можно найти при помощи только натуральных чисел: а) (27+7):4+2:4; б) 35+9-22*2; в) 48:6-2*9; г) 36:(13-4).
4. Найдите область определения выражений:

а) $\sqrt{x-6}$; б) $\sqrt{x^2-5x+6}$; в) $\sqrt{-x^2+5x+6}$;

г) $\sqrt{x^2-4x+4}$; д) $\sqrt{-x^2+6x-9}$; е) $\sqrt{(x-3)(x+4)(x-6)}$;

ж) $\frac{1}{x-3}$; з) $\frac{x^2-5x+6}{7}$; и) $\frac{3x}{x^2+2x+6}$;

к) $\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$; л) $\frac{3}{\sqrt{x^2-4}}$; м) $\sqrt{\frac{4-2x}{2x+4}}$.

5. Решите уравнение:

а) $x\sqrt{3}+2=5x$; б) $7-2(3-x)=4(x-1)+5$; в) $3(2x-5)=2(2x-5)+5$;

г) $(2x-1)(1-x)=4(1-2x)$; д) $1-\frac{x-3}{2}=x-\frac{3(5-2x)}{7}$; е) $\frac{3x+1}{5}=2-\frac{4(x-3)}{15}$;

ж) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{3x}{x^2+x}$; з) $\frac{x^2}{x+2}=1-\frac{x-2}{x+2}$; и) $\frac{2}{x+5}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$;

к) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$.

6. Решите неравенство:

а) $9(3-x)<x^2(x-3)$; б) $9(x-3)>x^2(x-3)$; в) $\frac{x^3+1}{x}<0$;

г) $\frac{x^4-1}{\sqrt{x}}\geq 0$; д) $2x+7\leq x-4(3-x)$; е) $4-3x>2x-4(5-2x)$;

ж) $\frac{3-x}{2}-\frac{5x-2}{3}<1$; з) $3+\frac{2-3x}{4}\leq 2x$.

7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy(x+y)=30; \\ x^3+y^3=35; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=2; \\ \frac{3}{x+y}+\frac{4}{x-y}=7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-2y=2; \\ 3xy-9x=0. \end{cases}$

8. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} \frac{x^2-3x-10}{3x^2+5x+9}>0; \\ \sqrt{-x^2+10x-16}>0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} |x-2|<x; \\ -x^2+2x+3<0. \end{array}\right.$

9. Укажите множество решений уравнения с двумя переменными:

а) $2x+3y=4$; б) $x-y=0$; в) $5x=6y$; г) $7x-3y=21$;

д) $\sqrt{x}=y$; е) $x=-\sqrt{y}$; ж) $\frac{x^2-3x+2}{x-y}=0$.

10. Решите графически уравнение с двумя переменными:

а) $(x+3)^2+y^2=9$; б) $x^2+4x+y^2-6y=16$;

в) $x^2+2x+y^2-2y+1=0$; г) $(x+2y)(y+x)=0$;

д) $(x-1)^2+(y+2)^2=0$; е) $xy=x^2$;

ж) $x^2-y^2=0$; з) $\frac{(x-3y)(4y+2x)}{x-2}=0$;

и) $|x|+|y|=2$; к) $\frac{x^2+4x+3-y}{(x-2)(x-3y)}=0$.

11. При каких значениях параметра а уравнение не имеет корней:

а) $\frac{x-3}{\grave{a}}=8$; б) $\frac{3x+2}{\grave{a}-3}+\frac{x}{\grave{a}}=1$; в) $x^2-2\grave{a}x+4=0$;

г) $x^2+6x-\grave{a}=0$; д) $ax^2-8x-2=0$; е) $ax^2-3\grave{a}x+4=0$?

12. При каких значениях параметра а неравенство не имеет решений:

а) $3x^2+1<a$; б) $\sqrt{x^2-2ax+4}\le 0$; в) $\frac{2x-8}{a^2-1}<0$;

г) $x^2-2ax+3<a$; д) $ax^2+4<3ax$; е) $\sqrt{ax^2-3ax+4}\ge 0$.

13. При каких значениях параметра уравнение

а) $(x+2)(a-1)+1=a^2$; б) $ax-a^2=4-2x$; в) $a+x=a^2x-1$;

г) $ax-c^2=7$; д) $x=a^2x$; е) $ax-c=1+x$;

ж) $ax-2x=3(x-1)$; з) $x(2-a)-x=5+x$; и) $a(1-x)+2=3x-ax$

1) имеет один корень;

2) имеет бесконечное множество корней;

3) не имеет корней.

14. Решить уравнение с параметром а:

а) $2ax-2=x+a$; б) $x+a=ax-3$; в) $2x+a=2+ax$;

г) $(a^2-2a+1)x=a^2+2a-3$; д) $x^2-ax+4=0$; е) $ax^2-8x+4=0$;

ж) $(a^3-a^2-4a+4)x=a-1$; з) $x^2-2ax+3=a$.

15. Решить неравенство с параметром а:

а) $3ax-5\ge 3a-5$; б) $x+3a\le ax+5$; в) $3ax-5<3a-5x$;

г) $x+a>ax-3$; д) $2-ax\le ax+6$; е) $ax^2+3ax-4>0$;

ж) $2ax^2-ax-1>0$; з) $x^2-2ax+4<0$; и) $(a^2-1)x^2+2ax+1<0$.

ТЕМА 4.
ОТНОШЕНИЯ

4.1. Отношения между элементами двух множеств. Изображение отношения между элементами двух конечных множеств при помощи графа. График отношения между элементами двух числовых множеств на координатной плоскости. Бинарные отношения между элементами одного множества. Отношение обратное и противоположное данному

Теория множеств изучает свойства множеств и операций над ними, отвлекаясь от природы элементов этих множеств и от способа их задания. Чтобы можно было прилагать теорию множеств к решению практических задач и построению математических теорий, рассматриваются те или иные отношения.

Определение 1. *Бинарным отношением (соответствием)* между элементами множеств X и Y называется двуместный предикат $P(x, y)$, в котором x пробегает множество X, а y — множество Y.

Можно дать и другое определение, равносильное данному.

Определение 1$'$. *Бинарным отношением* между элементами множеств X и Y называется всякое подмножество декартова произведения этих множеств.

Таким образом, чтобы задать отношение P между множествами X и Y, достаточно указать подмножество Γ декартова произведения $X \times Y$. Иными словами, отношение P — тройка множеств (X, Y, Γ), где $\Gamma \subset X \times Y$. Если a и b — элементы множеств X и Y, на которых задан предикат $P(x, y)$, то запись aPb означает то же, что и высказывание $P(a, b)$. Она является обобщением записи многих соответствий и отношений, употребляемых в математике. Сравните, например, запись aPb с записью отношения равенства ($a = b$) или больше ($a > b$) действительных чисел, или с записью отношения параллельности ($a \parallel b$) и перпендикулярности ($a \perp b$) прямых.

Пример 1. Бинарное отношение между элементами множеств $X = \{2, 3, 5, 11\}$ и $Y = \{6, 7, 9, 10\}$, заданное двуместным предикатом «число x является делителем числа y», можно представить в виде таблицы (рис. 1), где находящиеся в данном отношении пары элементов отмечены знаком «×».

Y X	6	7	9	10
2	×			×
3	×		×	
5				×
11				

Рис. 1

Очевидно, что множество Γ = {(2, 6), (2, 10), (3, 6), (3, 9), (5, 10)} — пар элементов, находящихся в заданном отношении, является подмножеством декартова произведения множеств X×Y = {(2, 6), (2, 7), (2, 9), (2, 10), (3, 6), (3, 7), (3, 9), (3), (5, 6), (5, 7), (5, 9), (5, 10), (11, 6), (11, 7), (11, 9), (11, 10)}.

Бинарное отношение, заданное на конечных множествах, можно изобразить с помощью ориентированного графа. *Ориентированным графом* называется чертеж, состоящий из точек и соединяющих их стрелок.

Для бинарных отношений используется терминология, отличающаяся от терминологии, применяемой для двуместных предикатов. Так, множество X называется *областью отправления отношения*; множество Y — *областью прибытия отношения*; множество Γ — графиком отношения. Таким образом, график отношения — это совокупность всех пар (a, b) (где $a \in X, b \in Y$), для которых aPb — истинное высказывание.

Если X и Y — числовые множества, то изобразив каждую пару (a, b) из множества Γ точкой на координатной плоскости, получим множество точек на плоскости, называемое *графиком бинарного отношения на координатной плоскости*.

Пример 2. Графом бинарного отношения, рассмотренного в примере 1, является рисунок 2, а графиком этого отношения — рис. 3.

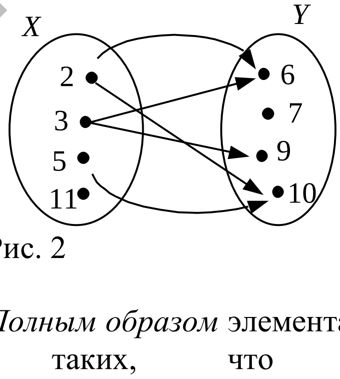


Рис. 2

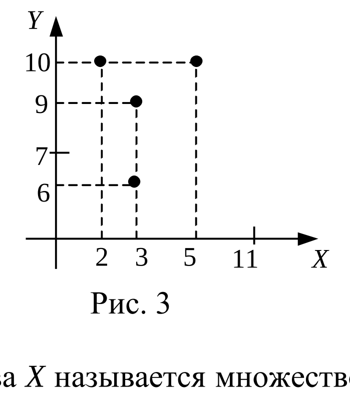


Рис. 3

Полным образом элемента a из множества X называется множество всех элементов $y \in Y$ таких, что aPy. В частности, для примера 1

$P(2) = \{6,10\}$, $P(3) = \{6,9\}$, $P(5) = \{10\}$, $P(11) = \varnothing$.

Полным прообразом элемента b из множества Y называется множество всех элементов $x \in X$ таких, что xPb. В частности, для примера 1 $P^{-1}(6) = \{2,3\}$, $P^{-1}(7) = \varnothing$, $P^{-1}(9) = \{3\}$, $P^{-1}(10) = \{2,5\}$.

Множество всех элементов из X, имеющих непустые образы, называется *множеством (областью) определения отношения*, а множество всех элементов из Y, имеющих непустые прообразы — *множеством (областью) значений отношения*. Так, в примере 1 область определения есть множество $\{2, 3, 5\}$, а множество значений отношения — $\{6, 9, 10\}$.

Если множества X и Y совпадают, то говорят об отношении между элементами множества X. Все понятия, рассмотренные для отношений между элементами двух множеств, сохраняются и для бинарных отношений, заданных на одном множестве. Иначе выглядит граф отношения.

Пример 3. Граф бинарного отношения «число x является делителем числа y» заданного на множестве $X = \{2, 4, 6\}$, имеет следующий вид (см. рис. 4):

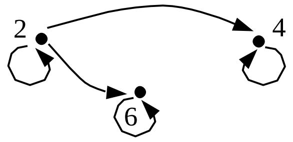


Рис. 4

Стрелка на графе, у которой начало совпадает с концом, называется *петлей*.

В школьном курсе математики часто встречаются с отношениями между элементами одного множества. Например, отношения равенства, подобия, конгруэнтности между геометрическими фигурами; отношения равно, больше между числами; отношения параллельности и перпендикулярности между прямыми. Для них вводятся и специальные знаки.

Пусть задано отношение xPy между множествами X и Y. *Обратным* ему называется отношение $yP^{-1}x$ между множествами Y и X, такое, что $yP^{-1}x$ тогда и только тогда, когда xPy. Чтобы получить граф отношения P^{-1}, надо изменить на обратное направление всех стрелок в графе отношения P.

Отношение P' называется *противоположным* отношению P, если оно является дополнением отношения P в декартовом произведении $X \times Y$. Таким образом, $aP'b$ тогда и только тогда, когда не имеет место отношение aPb.

4.2. Способы задания отношений. Задание отношения при помощи уравнения с двумя переменными. График уравнения. Примеры графиков уравнений с двумя переменными. Графический способ решения уравнения с двумя переменными. Понятие об уравнении линии. Вывод уравнения окружности

Способы задания отношений

1) Если множества X и Y конечны, то отношение может быть задано перечислением всех пар элементов, находящихся в данном отношении. Перечислить пары элементов можно следующими способами: а) записать пары в виде множества; б) записать пары при помощи таблицы; в) задать пары, построив граф отношения.

Примеры 1 и 2, рассмотренные выше, иллюстрируют такие способы задания отношений.

2) Для конечных и бесконечных множеств X и Y отношение можно задать, указав характеристическое свойство всех пар, принадлежащих данному отношению (см. пример 1).

3) Отношение между элементами двух числовых множеств (как конечных, так и

некоторых бесконечных) можно задать при помощи графика на координатной плоскости (см. пример 2; рис. 3).

Ранее мы определили уравнение с двумя переменными как предикат вида $f(x, y) = \varphi(x, y)$, где $x \in X$, $y \in Y$. Множеством решения уравнения мы назвали множество истинности предиката.

Итак, всякое уравнение с двумя переменными определяет некоторое множество пар значений переменных, которые обращают это уравнение в истинное равенство. При этом, если указаны множества X и Y, то в решение войдут только те пары (x, y), для которых $x \in X$, $y \in Y$.

Упражнение. Имеется 50 копеек монетами достоинства 2 и 3 копейки. Сколько было монет каждого достоинства? (Найти все решения).

Ответ: (2,22), (4, 19), (6, 16), (8, 13), (10, 10), (12, 7), (14, 4), (16, 1).

Каждое уравнение с двумя переменными задает некоторое отношение между значениями переменной x и переменной y. Это же самое уравнение задает и другое отношение (обратное данному) между значениями переменной y и значениями переменной x. В дальнейшем, говоря об отношении, заданном уравнением с двумя переменными x и y, мы будем иметь в виду только отношение между значениями переменной x и значениями переменной y.

Графиком уравнения называется изображение множества истинности предиката $f(x, y) = \varphi(x, y)$ на координатной плоскости, т.е. множество точек плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения. Обычно уравнение с двумя переменными имеет бесчисленное множество решений. Графиком такого уравнения будет бесконечное множество точек, образующих на плоскости некоторую линию.

Графики уравнений дают возможность определить решение системы уравнений, используя координатную плоскость. Для этого строят графики уравнений, входящих в систему, и определяют координаты их точек пересечения. Найденные таким образом пары чисел и являются решениями системы уравнений.

Пример. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$

Поскольку графики уравнений пересекаются только в двух точках (см. рис. 5): $A(1; 0)$ и $B(0; 1)$, то решениями будут две пары чисел, являющихся координатами этих точек.

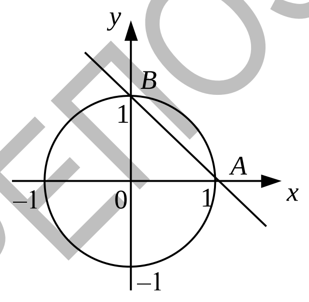


Рис. 5

Ответ: $(1; 0)$, $(0; 1)$

Пример. Решить систему: $\begin{cases} y = x^2, \\ y = x - 2. \end{cases}$

Поскольку графики уравнений не пересекаются (см. рис. 6), то система уравнений решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

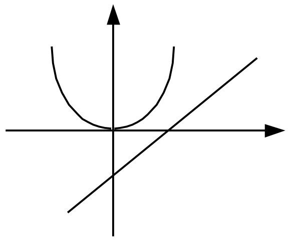


Рис. 6

Понятие об уравнении линии. Вывод уравнения окружности

В курсе геометрии линия рассматривается как множество точек, координаты которых связаны некоторым отношением. Если положение точки на плоскости можно задать парой чисел (координат этой точки), то линию, которая состоит из множества точек, можно охарактеризовать некоторым уравнением с двумя переменными $f(x, y) = \varphi(x, y)$, которое называется уравнением линии.

Определение. *Уравнением линии на плоскости* называется уравнение вида $f(x, y) = 0$, такое, что 1) координаты x и y любой точки M, принадлежащей линии, удовлетворяют этому уравнению и 2) любые два числа x и y, удовлетворяющие уравнению $f(x, y) = 0$, определяют на плоскости точку, которая принадлежит линии. Т.е. уравнением линии на плоскости является уравнение, графиком которого является рассматриваемая линия на плоскости: $L = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$.

Теорема. Графиком уравнения $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (1) является окружность с центром в точке $A(a, b)$ и радиусом равным R.

Доказательство. Воспользуемся определением окружности: «Окружностью называется множество всех точек плоскости, находящихся на заданном положительном расстоянии от данной точки, лежащей в этой плоскости».

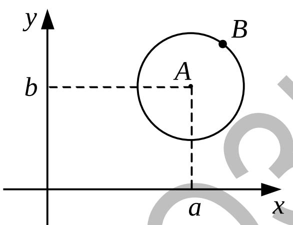


Рис. 7

1. Пусть $B(x, y)$ — произвольная точка, принадлежащая окружности (говорят, что x и y — *текущие координаты*). По условию, $AB = R$ (см. определение окружности). Запишем это условие, используя формулу расстояния между точками на плоскости: $R = AB = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ (2).

Следовательно, координаты точки $B(x, y)$ являются решением уравнения (1), и точка B принадлежит графику уравнения (1). А так как B — произвольная точка окружности, то получаем, что множество всех точек окружности принадлежит графику рассматриваемого уравнения.

2. Наоборот, пусть (x, y) — произвольное решение уравнения (1). Тогда $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$ — верное числовое равенство. Значит, расстояние между точками с координатами (a, b) и (x, y) равно R, следовательно, точка с координатами (x, y) лежит на окружности радиуса R,. Теорема доказана.

Упражнение 1. Составить уравнение окружности, радиус которой равен 3, если центр лежит на оси OX и окружность проходит через начало координат. *Ответ.* $(x+3)^2 + y^2 = 9$, $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

Упражнение 2. Найти радиус и центр окружности, заданной уравнением $x^2+4x+y^2-6y-16=0$. *Ответ.* O(–2, 3), $r=\sqrt{29}$.

4.3. Вывод уравнения прямой с угловым коэффициентом. Условия параллельности и перпендикулярности прямых, заданных уравнением с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой

Определение. Величина угла, которая отсчитывается от положительного направления оси OX до прямой в положительном направлении (против часовой стрелки), называется *углом наклона* прямой к оси. Если прямая параллельна оси OX, то угол считается равным 0°.

Вместо угла наклона обычно рассматривают тангенс этого угла, так как в промежутке от 0° до 180° между ними существует взаимно однозначная зависимость.

Определение. Тангенс угла наклона прямой к оси OX называется угловым коэффициентом прямой и обозначается через k: $\mathrm{tg}\alpha=k.$.

Так как тангенс 90° не существует, то для прямых, перпендикулярных оси OX, угловой коэффициент не определен.

Теорема. Положение прямой на плоскости однозначно определяется координатами одной из ее точек и угловым коэффициентом прямой.

Доказательство. 1) Если прямая задана, то она имеет определенный угол наклона к оси OX, следовательно, угловой коэффициент k имеет определенное значение. И на этой прямой можно выбрать некоторую точку M_0. 2) Обратно, если известны координаты M_0 и угловой коэффициент k, то мы можем построить эту прямую на плоскости. Для этого отложим от луча OX в верхней полуплоскости угол, равный α где $k=\mathrm{tg}\alpha$, и через точку M_0 проведем прямую, параллельную построенному лучу. Она и будет искомой.

Составим уравнение прямой, проходящей через фиксированную точку прямой $M_0(x_0, y_0)$, если угловой коэффициент прямой равен k. Для этого на прямой выберем произвольную точку $M(x, y)$ и через точки M и M_0 проведем прямые, параллельные координатным осям, здесь возможны два случая (см. рис. 8, 9).

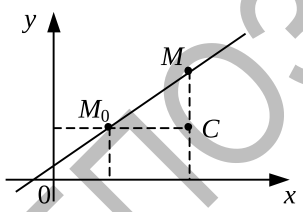


Рис. 8

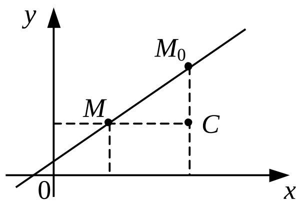


Рис. 9

Для первого случая $k=\mathrm{tg}\alpha=MC:M_0C$. Поскольку $MC = y - y_0$, $M_0C = x - x_0$, то рассматриваемое равенство можно переписать в виде $y - y_0 = k(x - x_0)$ (1). К этому же равенству приходим и во втором случае. Таким образом, уравнение (1) и есть искомое уравнение прямой.

Если взять точку M_0 на оси OY, то $x_0 = 0$, $y_0 = b$ и уравнение (1) примет вид $y - b = kx$, откуда $y = kx + b$. Это уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*, а число b — начальной ординатой.

Теорема. Необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых $y = k_1x + b$ и $y = k_2x + b$ является равенство их угловых коэффициентов: $k_1 = k_2$.

Доказательство. 1) Если прямые параллельны, то они пересекают ось OX под одним и тем же углом, значит их угловые коэффициенты равны. 2) Обратно, если угловые коэффициенты прямых равны, то равны их углы наклона и прямые параллельны.

Теорема. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух прямых $y = k_1x + b$ и $y = k_2x + b$ является выполнение равенства: $k_1k_2 = -1$.

Доказательство. 1) Пусть заданы две взаимно перпендикулярные прямые l_1 и l_2 (где l_2 — прямая, образующая с осью OX больший угол). Проведем через точку пересечения прямой l_2 с осью OX прямую l_1' (см. рис. 10), параллельную прямой l_1.

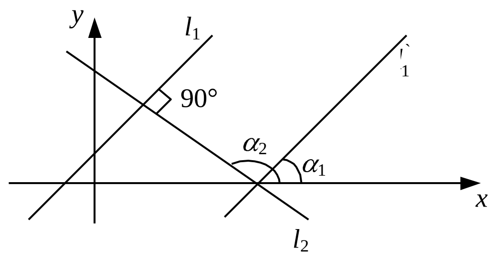


Рис. 10

Очевидно, $\alpha_2 = 90° + \alpha_1$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}(90° + \alpha_1) = -\operatorname{ctg}\alpha_1 = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}$. Т.е., $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$, или $k_1k_2 = -1$. 2) Нетрудно доказать и обратное: если $k_1k_2 = -1$, то соответствующие прямые перпендикулярны.

Упражнение. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, 5)$: а) параллельно прямой $y = 2x - 5$; б) перпендикулярно прямой $y = 4x - 3$.

Решение. Так как искомая прямая параллельна прямой $y = 2x - 5$ и проходит через точку $A(2, 5)$, то ее угловой коэффициент равен 2 и координаты точки A удовлетворяют искомому уравнению прямой. Следовательно, подставив $k = 2$ в уравнение $y = kx + b$ и вместо x и y — координаты точки A, получим $5 = 2 \cdot 2 + b$. Откуда, $b = 1$. Итак, искомое уравнение прямой: $y = 2x + 1$.

б) Аналогично получим $k = -0{,}25$ (условие перпендикулярности) и $b = 5{,}5$. Уравнением прямой будет уравнение: $y = -0{,}25x + 5{,}5$.

Общее уравнение прямой. Уравнение прямой, не параллельной оси ординат, имеет вид $y = kx + b$. Если $l \parallel OX$, то $k = 0$ и уравнением прямой будет $y = b$. Если же прямая параллельна оси OY, то ее уравнение примет вид $x = a$. Все эти уравнения — это уравнения первой степени с двумя переменными (в двух последних коэффициент при одной из переменных равен нулю). В общем виде все их можно записать так: $Ax + By + C = 0$.

Обратно, если A и B одновременно в нуль не обращаются, то графиком уравнения вида $Ax + By + C = 0$ является прямая линия. *Докажем* это. Если $B \neq 0$, то, разделив на B, получим уравнение $(A:B)x + y + (C:B) = 0$ или же $y = -(A:B)x - (C:B)$ — уравнение с угловым коэффициентом $k = -(A:B)$ и начальной ординатой $b = -(C:B)$. Если $B = 0$, то имеем $Ax + C = 0$, или $x = -C : A$ — уравнение прямой, параллельной оси OY.

Итак, уравнение прямой может быть записано в виде $Ax + By + C = 0$, где A и B одновременно в нуль не обращаются, и наоборот. Уравнение такого вида называется *общим уравнением прямой*, или же *линейным уравнением*, а прямую линию называют *линией первого порядка.*

Если $A = B = 0$ и $C \neq 0$, то уравнение примет вид $0x + 0y + C = 0$ и будет ложным при любых значениях переменных x и y. Графиком его будет пустое множество.

При $A = B = C = 0$ график общего линейного уравнения примет вид $0x + 0y + 0 = 0$, которое будет истинным при любых значениях переменных x и y. Графиком его будет вся координатная плоскость.

Таким образом, *графиком общего линейного уравнения* $Ax + By + C = 0$ может быть:

1) Вся плоскость (при $A = B = C = 0$).

2) Пустое множество (при $A = B = 0,\ C \neq 0$),

3) Прямая, параллельная оси OX (при $A = 0$, $B \neq 0$).

4) Прямая, параллельная оси OY (при $B = 0$, $A \neq 0$).

5) Прямая, не параллельная осям координат (во всех остальных случаях).

Точка пересечения двух прямых принадлежит обоим прямым, значит ее координаты удовлетворяют одновременно уравнениям обоих прямых и являются решением системы уравнений. Если прямые параллельны, то они не пересекаются и система уравнений не имеет решения, если же прямые совпадают, то их пересечением будут все точки прямой и система уравнений имеет бесконечное множество решений.

Пример. Найти точку пересечения прямых $x - y = 1$ и $2x = 2(y + 1)$.

Решение: $\begin{cases} x - y = 1, \\ 2x = 2(y+1); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1, \\ 2(y+1) = 2(y+1); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1, \\ 0y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1, \\ y \in R. \end{cases}$

Ответ: $(y + 1, y)$.

Упражнение 1. Найти точку пересечения прямых $x + y = 5$ и $2x - y = 12$.

Упражнение 2. Найти точку пересечения прямых $x = 2y - 4$ и $2x - 4y = 7$.

4.4. Свойства бинарных отношений между элементами множества. Отношение эквивалентности. Связь отношений эквивалентности с разбиением множества на попарно непересекающиеся подмножества. Роль отношений эквивалентности при определении понятий через абстракцию

СВОЙСТВА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Пусть на множества A задано бинарное отношение h. Оно может обладать некоторыми из следующих свойств:

1. Рефлексивность. Отношение h называется рефлексивным, если для любых a из множества A истинно aha. (Например, «быть параллельным», «быть равным»).

2. Антирефлексивность. Отношение h называется антирефлексивным, если для любых a из множества A всегда ложно aha. (Например, отношение перпендикулярности прямых)

3. Симметричность. Отношение h называется симметричным, если для любых a и b из множества A из истинности ahb следует истинность $вha$. (Например, $a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$, т.е. отношение «быть параллельным» является симметричным).

4. Антисимметричность. Отношение h называется антисимметричным, если для любых a и b из множества A из истинности ahb следует ложность $вha$.

5. Транзитивность. Отношение h называется транзитивным, если для любых a, b и c из множества А из истинности $ahв$ и bhc следует истинность ahc.

Примеры.

Отношение «равно» на множестве чисел обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Отношение «больше» на множестве чисел обладает свойствами антирефлексивности, антисимметричности и транзитивности.

Отношение «перпендикулярно» на множестве прямых обладает свойствами антирефлексивности, симметричности н не обладает свойствами транзитивности.

ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Определение. Отношение ρ («ро»), заданное на множестве A, называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Примеры. Отношениями эквивалентности будут отношения «равно» на множестве чисел, «параллельности» на множестве прямых и т.д.

Всякое отношение эквивалентности разбивает множество на попарно непересекающиеся подмножества. (Ранее мы дали такое определение: «Множество разбито на попарно непересекающиеся подмножества, если 1) все подмножества, образующие разбиение, не пустые; 2) эта подмножества не пересекаются; 3) объединением всех подмножеств является данное множество»).

Например, в начальном курсе математики учащиеся встречаются с разбиением множества натуральных чисел на а) подмножества четных и нечетных чисел; б) подмножества однозначных, двузначных, трехзначных и т.д. чисел. Множество углов разбивается на три класса: острые, прямые и тупые. Множество всех многоугольников — на треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т.д.

Однако, необходимо помнить, что несоблюдение одного из приведенных выше условий разбиения может привести к ошибкам в классификации. Например, нельзя разбить множество всех треугольников на два класса: равнобедренных и прямоугольных (почему?).

Не всякое отношение между элементами множества дает разбиение его на классы. Например, нельзя разбить множество учеников школы на классы по признаку «ученик *x* знаком с учеником *y*» (почему?).

Теорема. Для того, чтобы отношение ρ позволяло разбить множество *A* на классы, необходимо и достаточно, чтобы ρ было отношением эквивалентности. (*Без доказательства.*)

Упражнение. Отношение ρ: «число *x* имеет тот же остаток при делении на 3, что и число *y*» задано на множестве $X = \ x \mid x \in R,\ x \le 8\ $. а) Постройте граф отношения ρ. б) Выясните, какие из чисел множества *X* удовлетворяют условию *x*ρ4, 8ρ*y*. в) Докажите, что отношение ρ есть отношение эквивалентности.

4.5. Отношения порядка. Упорядоченные множества. Диаграмма конечного упорядоченного множества. Свойства дискретности и плотности линейно упорядоченных множеств

Определение. Всякое антисимметричное и транзитивное отношение ρ в множестве *A* называется *отношением порядка*.

Если отношение порядка рефлексивно, то оно называется *отношением нестрогого порядка*, если же оно антирефлексивно, то оно называется *отношением строгого порядка*.

Например, отношения порядка «не больше (меньше либо равно)», «параллельно», «делится на», «кратно» будут отношениями нестрогого порядка, а отношения порядка «больше», «выше», «следует за» будут отношениями строгого порядка.

Отношение порядка, заданное на множестве *A*, называется *отношением линейного (строгого) порядка*, если любые два элемента *x* и *y* из множества *A* находятся либо в отношении *x*ρ*y*, либо в отношении *y*ρ*x*. Аналогично, оно называется отношением *нелинейного (частичного) порядка*, если в множестве *A* имеются такие элементы *x* и *y*, которые не находятся ни в отношении *x*ρ*y*, ни в отношении *y*ρ*x*.

Пример. На множестве *A* = {1, 3, 4} заданы отношения ρ: «$x \geq y$» и *T*: «*x* кратно *y*». Построить их графы. Какое из этих отношений будет отношением строгого порядка, а какое отношением частичного порядка?

Из графов отношений (рис. 11) видно, что отношение ρ будет отношением строгого порядка,
а отношение *T* — отношением частичного порядка (действительно, числа 3 и 4 не находятся ни в отношении «3 кратно 4», ни в отношении «4 кратно 3»).

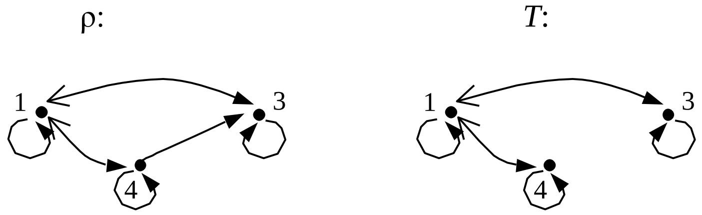


Рис. 11

Определение. Множество X с заданным на нем отношением порядка называется *упорядоченным множеством*.

При этом, если отношение порядка будет отношением линейного порядка, то множество X называется *линейно упорядоченным множеством*, если же оно будет отношением частичного порядка, то X называется *частично (нелинейно) упорядоченным множеством*.

Так, в рассмотренном выше примере, множество A с заданным на нем отношением порядка ρ будет линейно упорядоченным множеством, а с отношением порядка T будет частично упорядоченным множеством.

Упорядочить можно как конечные, так и бесконечные множества.

Отношения порядка и упорядоченные множества часто рассматриваются в начальной школе при изучении множества натуральных чисел, при сравнении отрезков и углов по величине. При решении задач учащиеся встречаются с такими отношениями порядка, как «быть выше», «быть старше», «быть дороже» и т.д.

Сравним теперь диаграммы конечного линейно и частично упорядоченного множества. При этом, точку, изображающую y, будем располагать выше точки, изображающей x, и соединять их отрезком, если y и x находятся в отношений ρ (при этом будем говорить, что x *предшествует* y, или же у следует за x).

Так, диаграммы множества A, упорядоченного отношениями ρ и T (см. предыдущий пример), изображены, соответственно, на рис. 12 (а) и рис. 12 (б). Диаграмма множества А = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, упорядоченного отношением «y кратно x», изображена на рис. 12 (в).

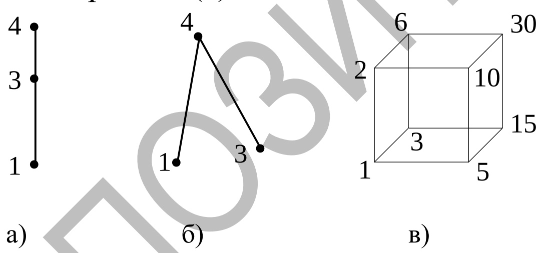


Рис.12

Пусть a, b, c — элементы множества A, упорядоченного отношением ρ. Говорят, что b *лежит между* элементами a и c, если $a\rho b$ и $b\rho c$.

Например, на множестве натуральных чисел, упорядоченном отношением «больше», число 3 лежит между числами 2 и 7, так как $2 < 3$ и $3 < 7$.

Определение. Множество, линейно упорядоченное отношением ρ, называется *дискретным*, если между любыми двумя его элементами лежит только конечное число элементов.

Например, множество натуральных чисел, упорядоченное отношением «больше» — дискретное множество.

Определение. Множество, линейно упорядоченное отношением ρ, называется *плотным*, если между любыми двумя его элементами всегда лежит элемент данного множества.

Например, множество рациональных чисел, упорядоченное отношением «больше», плотно, так как между любыми двумя числами a и b лежит число $\dfrac{a+b}{2}$. Действительно, пусть $a < b$, тогда $2a < a + b < 2b$ и $a < \dfrac{a+b}{2} < b$.

4.6. Функциональные отношения» Область (множество) определения и область (множество) значений функции. Способы задания функций. Числовые функции

Определение. Отношение между элементами двух множеств, при котором каждому элементу первого множества соответствует не более одного элемента второго множества, называется *функцией*.

При этом, область определения отношения называется *областью определения функции*, а область значений отношения — *областью значений функции*.

Например, среди отношений, изображенных на рис. 13, функциями будут f, h и p. Их областями определения будут, соответственно, $D(f) = \{a, b, c\}$, $D(h) = \{a, c\}$, $D(p) = \{a, b, c\}$, а множествами значений $E(f) = \{1, 3\}$, $E(h) = \{1, 2\}$, $E(p) = \{1, 2, 3\}$.

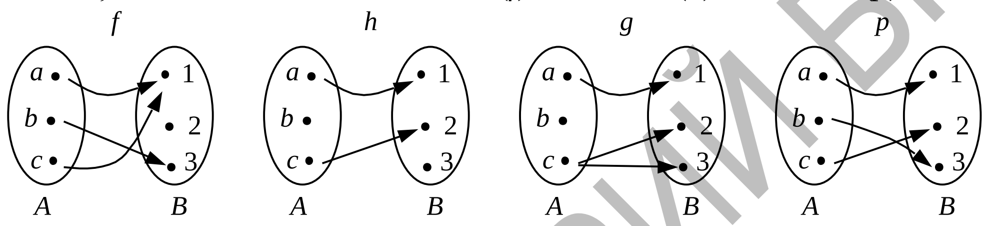


Рис.13

Если $x \in X$, $y \in Y$ и f — функциональное отношение между элементами x и y, то записывают $y = f(x)$ или $x \xrightarrow{f} y$. Элемент $y \in Y$, соответствующий элементу $x \in X$, называют значением функции.

Изучение функций в школьном курсе математики начинается в средних классах, но подготовка учащихся к усвоению этого важного в математике понятия начинается уже в начальных классах.

Функция, устанавливающая отношение между двумя числовыми множествами, называется *числовой функцией*.

Способы задания функции

1) Аналитическое задание функции (задание функции формулой).

Этот способ задания функции наиболее распространен в математике. При аналитическом задании функции указывается формула, которая указывает совокупность операций, которые нужно выполнить, чтобы по заданному значению аргумента функции найти соответствующее значение функции. Одно и тоже числовое выражение может задавать различные функции в зависимости от того множества, на котором рассматривается это выражение.

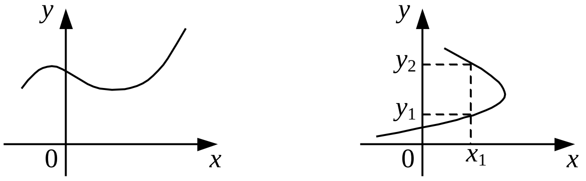
2) Табличный способ задания функции.

В случае конечных множеств функцию можно задать с помощью графа или перечислением всех пар элементов, находящихся в данном отношении. При этом пары элементов можно записать в виде таблицы.

3) Графический способ задания функции.

Функция полностью определяется заданием пар $(x; f(x))$, где x пробегает все множество $D(f)$, а $y = f(x)$ — соответствующие значения функции — множество $E(f)$. Множество этих пар можно записать так: $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in X, y \in Y\}$. Графиком функции $y = f(x)$, $x \in X$ называется множество пар (x, y) таких, что $x \in X$, а $y = f(x)$. Если областью определения и множеством значений функции являются числовые множества, то каждой такой паре соответствует никоторая точка на координатной плоскости, имеющая координаты x (абсцисса) и $f(x)$, (ордината).

Построив график отношения (произвольного), можно определить, является оно функцией или нет. Так, если каждой точке оси абсцисс соответствует не более одной точки оси ординат, то рассматриваемое отношение является функцией. Например, изображенное на рис. 14 (а) отношение является функцией, а отношение на рис. 14 (б) функцией не является, т.к., например, значению аргумента x_1 соответствует два значения отношения — y_1 и y_2.



а) б)

Рис. 14

Сравнивая различные способы задания функции, легко установить, что недостатком аналитического способа задания функции является малая его наглядность, но по аналитическому заданию функции легко проводить ее исследование, используя математический аппарат. Часто сочетают аналитический и графический способы задания функций: по заданной формуле строится график.

Выполнять построение графика функции «по точкам», вообще, нельзя, особенно, если функция определена на бесконечном множестве. В основу построения графика функции положено исследование свойств функции. Построение отдельных точек проводится для уточнения искомого графика. Различают два основных способа построения графика функции: 1) используются графики известных функций и применяются элементарные приемы преобразования графиков; 2) построение графиков функций производится с помощью производной (этот способ в элементарном изложении рассматривается в старших классах школы).

Пример. Построить график функции $y = x^2 + 4x + 3$.

Преобразуем данное выражение: $y = x^2 + 4x + 4 - 1 \Leftrightarrow y + 1 = (x+2)^2$. Воспользовавшись формулами переноса осей координат $O(0;0) \to O'(a;b)$, $x' = x - a,\ y' = y - b,$ строим новую систему координат: $x' = x + 2,\ y' = y + 1.$ В новой системе координат уравнение функции запишется в виде $y' = (x')^2$. Строим график функции в новой системе координат (см. рис. 15).

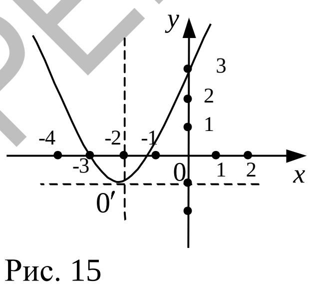


Рис. 15

4.7. Прямая и обратная пропорциональности, линейная функция, их свойства и графики

Определение. Функция, которую можно, задать формулой вида $y = kx$, где $k \neq 0$, называют *прямой пропорциональностью* или просто *пропорциональностью*. Число k называют *коэффициентом пропорциональности*.

О переменной y говорят, что она пропорциональна переменной x. Областью определения прямой пропорциональности служит множество всех действительных чисел или какое-либо его подмножество.

СВОЙСТВО ПРЯМОЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

Теорема. Если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — пары соответствующих значений переменных из множеств X и Y, причем $x_2 \neq 0$, то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

Доказательство. По условию, $y = kx$, следовательно, $y_1 = kx_1$ и $y_2 = kx_2$. Т.к. $k \neq 0$, $x_2 \neq 0$, то $y_2 \neq 0$.

Имеем $\frac{y_1}{y_2} = \frac{kx_1}{kx_2} = \frac{x_1}{x_2}$. Что и требовалось доказать.

Если значения переменных принадлежат множеству положительных чисел, то свойство прямой пропорциональности формулируется так: «с увеличением значения x в несколько раз соответствующее значение y увеличивается во столько же раз; аналогично, с уменьшением значения x в несколько раз соответствующее значение y уменьшается во столько же раз».

Чтобы найти коэффициент пропорциональности k, достаточно знать одну пару соответствующих друг другу значений переменных x и y, отличных от пары (0; 0). Это свойство используется в школе при решении многих задач.

ГРАФИК ПРЯМОЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

Графиком уравнения $y = kx$ является прямая линия, проходящая через начало координат. Угловой коэффициент прямой равен k. Следовательно, коэффициент пропорциональности k совпадает о угловым коэффициентом графика функции $y = kx$.

Легко показать, что при $k > 0$ прямая пропорциональность есть функция возраставшая, а при $k < 0$ — убывавшая. Действительно, пусть $x_1 > x_2$. Тогда $y_1 - y_2 = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2)$. Тогда при $k > 0$, $y_1 > y_2$, а при $k < 0$, $y_1 < y_2$. Что и требовалось доказать.

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Определение. Функция, которая задается формулой вида $y = kx + b$, где k и b некоторые числа, а x и y — переменные, называется *линейной*.

Так как выражение $kx + b$ имеет смысл при любых значениях переменной, то областью определения линейной пункции может служить множество всех действительных чисел или любое его подмножество.

Прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции (при $b = 0$),

Так как графиком уравнения $y = kx + b$ является прямая линия, то для построения графика линейной функции достаточно знать две пары ее соответствующих значений (x_1, y_1) и (x_2, y_2), которые определяют на плоскости две точки, принадлежащие искомому графику. При построении можно воспользоваться графиком прямой пропорциональности (как графиком известной функции) и соответствующим переносом осей координат (можно ограничиться только переносом одной оси).

ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

Рассмотрим три величины, одна из которых равна произведению двух других. Например, для скорости, времени и расстояния $s = vt$. При постоянной скорости путь, пройденный телом, прямо пропорционален времени. Если зафиксировать пройденный путь, то скорость и время обратно пропорциональны (чем больше ваша скорость, тем меньше времени вы потратите на данное расстояние).

Определение. Функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называется *обратной пропорциональностью*.

О переменной y говорят, что она обратно пропорциональна переменной x. Число k называется *коэффициентом обратной пропорциональности*.

Свойство обратной пропорциональности

Теорема. Если данная функция — обратная пропорциональность и (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — пары соответствующих значений переменных x и y, то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

Доказательство. Действительно, $y_1 = \frac{k}{x_1}$, $y_2 = \frac{k}{x_2}$. Отсюда $\frac{y_1}{y_2} = \frac{\frac{k}{x_1}}{\frac{k}{x_2}} = \frac{k}{x_1} \cdot \frac{x_2}{k} = \frac{x_2}{x_1}$, т.е. $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$. Что требовалось доказать.

Если значениями переменных x и y служат положительные числа, то доказанное свойство обратной пропорциональности формулируется так: с увеличением значения x в несколько раз, соответствующее значение y уменьшается во столько же раз, и наоборот.

График обратной пропорциональности

Аналогично тому, как это делалось для прямой пропорциональности, можно показать, что при $k > 0$ функция убывает для всех положительных и для всех отрицательных значений x; аналогично, при $k < 0$ она возрастает. Ось абсцисс является горизонтальной асимптотой, а ось ординат — вертикальной асимптотой. График обратной пропорциональности для различных значений k изображен на рис. 16.

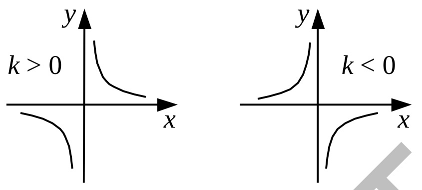


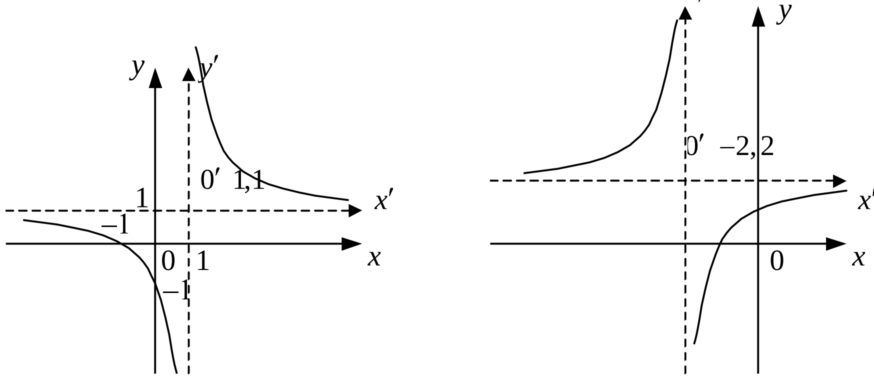
Рис. 16

Определение. Функция вида $y = \frac{ax+b}{cx+k}$ называется *дробно-линейной функцией*.

Путем параллельного переноса осей координат данную функцию можно привести к функции обратной пропорциональности (см. последний пример предыдущей темы).

Упражнение. Построить график функции $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Решение. Проведем следующие преобразования: $y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1-1+1}{x-1} = \frac{x-1\ +2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$. Откуда, $y-1 = \frac{2}{x-1}$. Воспользуемся формулой переноса осей координат: $x' = x-a,\ y' = y-b,$ где a и b — координаты нового начала координат. Имеем, $x' = x-1,\ y' = y-1$. Новое начало координат $O'\ 1{,}1$. В новой системе координат строим график функции $y' = \frac{2}{x'}$ (рис. 17а)



а) б)

Рис. 17

Упражнение. Построить график функции $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$.

Решение. Выражение $\dfrac{2x+1}{x+2}$ преобразуем к виду $2-\dfrac{3}{x+2}$ и получим функцию $y=2-\dfrac{3}{x+2}$. Откуда, $y'=y-2,\ x'=x+2.$ Начало координат переносим в точку $O'(-2;2)$. В новой системе координат строим график функции $y'=-\dfrac{3}{x'}$ (рис. 17б).

4.8. Отображение множества в множество. Виды отображений: отображение множества на множество, взаимно однозначное отображение множества на множество. Равномощные множества. Представление о счетном множестве и множестве мощности континуума

Остановимся на рассмотрении некоторых видов функциональных отношений:

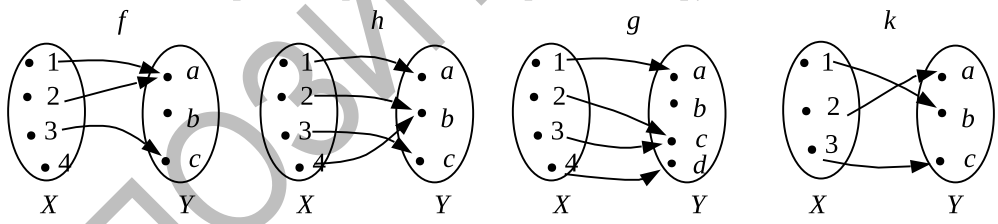


Рис. 18

Пусть A — область определения отношения, а B — ее область значений. Очевидно, что $A\subset X$, $B\subset Y$.

Определение. Если область определения функции совпадает с множеством X, то такую функцию называют *отображением множества X* ***в*** *множество Y*.

Определение. Отображение множества X в множество Y, при котором область значений функции совпадает с множеством Y, называется *отображением множества X* ***на*** *множество Y*.

Например, на рисунке 18 отображения h, g, и k являются отображениями множества X **в** множество Y; из них отображения h и k являются отображениями **на**.

Определение. Отображение множества X на множество Y называется *обратимым*, если обратное ему соответствие между множествами Y и X является отображением.

Обратимые отображения множества X на множество Y называются еще и *взаимно однозначными отображениями*: действительно, каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y, и наоборот, каждому элементу множества Y ставится в соответствие единственный элемент множества X.

Например, отображение k (рис. 18) является взаимно однозначным (или обратимым) отображением множества X на множество Y.

Равномощные множества

Определение. Если между элементами двух множеств A и B можно установить взаимно однозначное отображение, то говорят, что множество A *эквивалентно* множеству B и записывают $A \sim B$.

Отношение между множествами A и B в этом случае является отношением эквивалентности. Действительно, 1) отношение рефлексивно, т.е. $A \sim A$; 2) отношение симметрично, т.е., если $A \sim B$, то и $B \sim A$; 3) отношение транзитивно, т.е., если $A \sim B$ и $B \sim C$, то и $A \sim C$.

Если множества конечные, то очевидно, что они эквивалентны тогда и только тогда, когда имеют одно и то же число элементов. В этом случае говорят, что множества *равночисленные*. Для характеристики численности бесконечных множеств вводится термин «мощность».

Определение. Говорят, что множества A и B имеют одну и ту же *мощность*, если они эквивалентны. Поэтому эквивалентные множества называют *равномощными множествами*.

Для характеристики конечных множеств используются числа, а для характеристики бесконечных множеств — специальные термины: *счетные множества* и *множества мощности континуума*.

Определение. Множество A называется *счетным* множеством, если оно эквивалентно множеству всех натуральных чисел, т.е. имеет ту же мощность, что и множество N.

Например, счетными будут множества четных чисел, квадратов натуральных чисел, рациональных чисел.

Определение. Множества, имеющие ту же мощность, что и множество действительных чисел, называются множествами *мощности континуума*.

Например, мощность континуума имеют множества иррациональных чисел, точек на отрезке, на прямой, на плоскости, в пространстве.

4.9. Понятие об алгебраической операции и алгебраической структуре. Законы коммутативности и ассоциативности алгебраических операций. Нейтральный, поглощающий, симметричный элементы. Определение группы. Дистрибутивные законы, связывающие алгебраические операции. Структуры с двумя алгебраическими операциями. Определение кольца и поля

Определение. *Алгебраической операцией* в множестве X называется отображение $x, y \to z$, ставящее в соответствие всякой упорядоченной паре (x, y) этого множества третий элемент z этого же множества.

Значит, алгебраическая операция в X является отображением декартова произведения $X \times X$ в X. При этом, x называется первой, а y — второй компонентой операции Такая операция называется *бинарной*.

Определение. *Частичной алгебраической операцией* в X называется отображение некоторого подмножества Y декартова произведения $X \times X$ в X.

Множество пар (x, y), которым соответствует элемент $z \in X$, называется *областью определения* частичной алгебраической операции.

Частичная алгебраическая операция может быть и *пустой*, т.е. такой, что ни одной паре (x, y) не соответствует элемент $z \in X$.

Например, пустой является операция сложения в множестве нечетных чисел.

Определение. Если для всякой пары (x, y) из A соответствующий элемент z тоже принадлежит A, то говорят, что множество A *замкнуто* относительно данной алгебраической операции.

В дальнейшем алгебраические операции будем обозначать символами «о», «*», «Т».

Определение. Непустое множество называется *алгебраической структурой*, если в нем определены некоторые операции, обладающие определенными свойствами.

1. Алгебраическая операция называется *ассоциативной*, если для любых трех элементов a, b и c из X выполняется равенство $a * (b * c) = (a * b) * c$.

2. Алгебраическая операция называется *коммутативной*, если для любых двух элементов a и b из X выполняется равенство $a * b = b * a$.

3. Пусть в множестве X заданы две алгебраические операции «о» и «*». Назовем операцию «о» *дистрибутивной* относительно операции «*», если для любых трех элементов a, b и c из X выполняются равенства:

$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$ (1) $\qquad$ $(b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a)$ (2)

При этом, если выполняется только равенство (1), то говорят о *дистрибутивности слева*, а если выполняется только равенство (2), то говорят о *дистрибутивности справа*.

Определение. Элемент e из X называется нейтральным относительно алгебраической операции «*», если для любого элемента a из X выполняется равенство $e*a = a*e = a$.

Например, на множестве натуральных чисел операции сложения и умножения обладают свойствами коммутативности и ассоциативности, а операции вычитания и деления этими свойствами не обладают. Операция умножения будет дистрибутивной относительно операций сложения и вычитания, а операция деления — только дистрибутивной справа. Нейтральным элементом относительно операции сложения будет ноль, а относительно операции умножения — единица. Операции вычитания и деления не имеют нейтральных элементов (проверить самостоятельно).

Теорема. В множестве X не может быть двух различных нейтральных элементов.

Доказательство. Действительно, пусть e и e_1 — два различные нейтральные элементы, т.е. $e \neq e_1$. Тогда, в силу определения нейтрального элемента, $e * e_1 = e$ и $e * e_1 = e_1$. Следовательно, $e_1 = e$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Определение. Элемент ω называется *поглощающим* относительно алгебраической операции «*», если для любого элемента a, принадлежащего X, выполняются равенства $\omega * a = a * \omega = \omega$.

Определение. Назовем элемент a' *симметричным* элементу a относительно алгебраической операции «*», если $a * a' = a' * a = e$.

Например, поглощающим элементом относительно операции умножения будет ноль, а операции сложения, вычитания и деления поглощающего элемента не имеют. Элементом, симметричным элементу a относительно операции сложения, будет $-a$, относительно операции умножения будет $\frac{1}{a}$.

Определение. *Группой* называется непустое множество $\boldsymbol{G}$, в котором определена ассоциативная алгебраическая операция «*» такая, что в $\boldsymbol{G}$ содержится 1) нейтральный элемент e и 2) вместе со всяким элементом a содержится и симметричный ему элемент a'.

Например, множество Q_+ является группой относительно операции умножения, а множество N не является группой ни относительно операции умножения, ни относительно операции сложения.

Определение. Множество X, в котором заданы две алгебраические операции «*» «о» называется *кольцом* относительно этих операций, если оно образует коммутативную группу относительно операции «*», а операция «о» дистрибутивна относительно операции «*».

Обычно в кольце операции «*» и «о» называют соответственно сложением и умножением и обозначают «+» и «·». Нейтральный элемент относительно операции сложения (если он существует) называю *нулем* и обозначают «0». Элемент симметричный a называют *противоположным* и обозначают – a.

Если операция «·» коммутативна в кольце X, то это кольцо называется *коммутативным кольцом*; если она ассоциативна, то кольцо называют *ассоциативным*. Если X содержит нейтральный элемент относительно операции умножения, то говорят, что X — *кольцо с единицей*, а e называют *единицей кольца*.

Кольцо X, элементами которого являются числа, а операциями — сложение и умножение чисел, называется *числовым кольцом*.

Определение. Коммутативное и ассоциативное кольцо с единицей, в котором для всякого элемента а $\neq 0$ найдется обратный элемент a^{-1}, называется *полем*.

Например, Q — поле, а Z — не является полем.

Поле, элементами которого являются числа, называется *числовым полем*

Задания для самостоятельной работы

Занятие № 1 а.

Соответствия и отношения.

Вопросы:

1. Бинарное соответствие между элементами множеств X и У.
2. Полный образ элемента $m \in X$ соответствия Р.
3. Полный прообраз элемента $m \in Y$ соответствия Р.
4. Область определения соответствия.
5. Множество значений соответствия.
6. Соответствие P^{-1}, обратное данному.
7. Соответствие $\overline{P}$, противоположное данному.

1. Соответствие R: «х больше у» задано между элементами множеств X={2,4,6,7} и Y={3,5}.

   А. Задайте соответствие R перечислением пар.

   Б. Постройте граф соответствия R.

   В. Постройте график соответствия R.

   Г. Сформулируйте соответствие, обратное R, представьте его перечислением пар.

   Д. Постройте граф обратного соответствия.

   Е. Постройте график обратного соответствия.

   Ж. Сформулируйте соответствие, противоположенное R, представьте его перечислением пар.
2. Элементы числовых множеств X и Y находятся в соответствии R: «$y = x^2$». По заданному множеству X определите множество Y и постройте график соответствия R, когда:

   А. X={$x / x \in Z, |x| \leq 3$};

Б. X={ $x / x \in R, |x| \le 3$ };

Сформулируйте соответствие, обратное соответствию R для каждого случая и постройте график обратного соответствия.

3. Элементы числовых множеств A и B находятся в соответствии R: «число a – остаток от деления числа b на 6», $a \in A, b \in B$.

А. Определите элементы множества А, когда B={1,5,6,17,9,12,100,121}.

Б. Постройте граф соответствия R.

В. Определите элементы множества А, когда В – множество натуральных чисел.

Г. Сформулируйте соответствие, противоположенное В.

4. Покажите, что соответствие P: «число x – делитель числа y» между элементами множеств X={2,3,5,11} и Y={6,7,9,10} является подмножеством декартового произведения $X \times Y$.

5. Для заданного соответствия R подберите такие множества X и Y, чтобы их элементы находились в соответствии R (xRy, $x \in X, y \in Y$), когда:

А. R: «число x, кратно числу y»;

Б. R: «x+y=5 и $x \in N, y \in N$»;

В. R: «город x - столица страны y»;

Г. R: «река x впадает в море y»;

Д. R: «оперу x создал композитор y»;

6. Определите соответствие P, которое связывает элементы множеств X и Y, когда:

А. X={Лермонтов, Скотт, Быков, Колос, Вейли};

Y={«Айвенго», «На росстанях», «Бородино», «Аэропорт», «Карьер»} .

Б. X={Ленинград, Варшиловград, горький, Свердловск};

Y={«Н.Новгород, Луганск, Екатеринбург, Санкт-Петербург»} .

В. X={x - стих}; Y={y - поэт}.

Г. X={7,9,11,13,15}; Y={14,8,22,28,30}.

Д. X={-643,-27,-8,-1,27,8,1}; Y={1,-1,2,-2,3,-3,-4}.

7. Элементы множества A={12,17,19,10,21} и B={2,3,4,9} находятся в соответствии R: «число a кратно числу b», $a \in A, b \in B$.

А. Постройте граф соответствия R.

Б. Перечислите все пары чисел, которые находятся в соответствии R.

В. Постройте график соответствия R.

Г. Укажите верные записи: 12R4, 3R21, 17R1, 8R2.

Д. Запишите область определения и множество значений соответствия R.

8. Даны множества X={2,4,6,8,10} и Y={1,3,5,7}, между которыми задано соответствие Q: «число x меньше числа y», $x \in X, y \in Y$.

А. Перечислите все пары чисел, которые находятся в соответствии Q.

Б. Постройте график соответствия Q.

В. Запишите область определения и множество значений соответствия Q.

Г. Назовите образ элемента 6 в данном соответствии.

Д. назовите полный прообраз элемента 7 в данном соответствии.

9. Приведите примеры соответствий, которые рассматриваются в школьном курсе математики между:

А. Множеством геометрических фигур и множеством действительных чисел.

Б. Множеством уравнений и множеством действительных чисел.

В. Множеством окружностей и множеством прямых линий.

Г. Множеством треугольников и множеством окружностей.

Занятие 2 а.

Вопросы:

1. Бинарные отношения между элементами множества А.
2. Свойства бинарных отношений:
   - рефлексивность;
   - антирефлексивность;
   - симметричность;
   - антисимметричность;
   - транзитивность.

Задания:

10. Задайте перечислением пар отношение Р: «число х – делитель числа у», заданное на множестве Х={2,4,6}, и постройте граф этого отношения.

11. Отношение Р: «меньше в 3 раза» и Q: «меньше на 3» задано на множестве А={3, 6, 9, 12, 18}.

а) Постройте графы этих отношений.

б) Как еще можно задать эти отношения?

12. Между отрезками существуют отношения «короче», «короче на 8 см», «короче в 2 раза». Задайте отношения обратные данным.

13. Задано множество Х={2,3,4,5}. Назовите все элементы декартова произведения $X \times Y$ и выпишите те подмножества этого декартова произведения, которые задают отношение:

а) «меньше», б) «больше», в) «равно».

Постройте граф каждого отношения.

14. Класс выставил на соревнования по плаванию команду мальчиков в составе Саши, Вити, Коли и Андрея. Коля проплыл дистанцию быстрее Андрея, но не так быстро, как Саша. Андрей затратил на эту же дистанцию времени больше, чем Витя, но проплыл менее быстро, чем Коля. Как распределились места на соревнованиях?

15. Мы наблюдаем за вертолетом, орлом, дирижаблем, самолетом. Орел находится выше вертолета, вертолет ниже самолета, но выше дирижабля, а орел ниже самолета. В каком порядке по высоте распределились Вертолет, орел, дирижабль и самолет?

16. Из лагеря вышли 5 туристов: Вася, Галя, Толя, Лена, Миша. Толя идет перед

Мишей, Лена перед Васей, но за Мишей, Галя перед Толей. Кто идет вторым, а кто последним?

17. В нашем лесу каждый занимается своим делом и этому делу учит других: одни плетут корзины, другие ловят рыбу. Ремеслу мы научились один от одного. Кот учился у Выдры, Ежик у зайца, Лиса у Волка, Мышь у Ежа. Бобр учил Волка и Выдру, Заяц – Белку, а Барсук – Зайца. Бобр был учеником Медведя, а Еж – учителем Дятла. Лучше всех плел корзины Еж.

    а) Чем занимаются Дятел, Заяц, Волк и Лиса?

    б) Кто из зверей нашего леса первым среди всех научился ловить рыбу а кто плести корзины?

18. На множестве А={3,5,7,9} заданы отношения Р: «а меньше b», R: «а меньше b на 2», М: «а меньше или равно b», $a, b \in A$. Постройте графы этих отношений и укажите среди них граф отношения: а) рефлексивного; б) транзитивного; в) антисимметричного.

19. Отношение К, заданное на множестве В={3,4,5}, рефлексивное и транзитивное. Какое из следующих множеств является отношением К:

    а) {(3,3), (3,4), (4,3), (4,4), (5,5)};

    б) {(3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (4,5), (5,4)}?

20. Запишите с помощью символов свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности отношение R, заданное на множестве X.

21. Отношение R задано на множестве А. Какое из следующих высказываний является определением свойства симметричности , антисимметричности отношения R:

    а) $(\forall x, y \in A)\,(xRy \Rightarrow \overline{yRx})$; b) $(\forall x, y \in A)\,(xRy \Rightarrow yRx)$;

    в) $(\forall x, y \in A)\,((xRy \wedge x \neq y) \Rightarrow \overline{yRx})$; г) $(\forall x, y \in A)\,((xRy \wedge x \neq y) \Rightarrow yRx)$?

22. Постройте граф отношения Е: «х непосредственно следует за у» $x, y \in E$, заданного на множестве X={7,8,9,10}, и среди следующих высказываний укажите истинные:

    а) отношение Е антисимметрично; б) отношение Е транзитивно.

23. Отношение R: «быть делителем» задано на множестве А={5, 10, 15, 25}. Сформулируйте свойство рефлексивности этого отношения.

Занятие 3 а.

Отношения эквивалентности, порядка.

1. На множестве отрезков заданы отношения Р: «отрезок х равен отрезку у», Q «отрезок х длиннее отрезка у» и R: «отрезок х квадратнее отрезка у». Укажите среди данных отношений:

    а. Рефлексивное;

    б. Транзитивное;

    в. Антисимметричное;

    г. Антирефлексивное и транзитивное;

    д. Симметричное;

    е. Антирефлексивное;

ж. Симметричное и транзитивное;

з. Рефлексивное, симметричное и транзитивное.

2. Дано множество А={2,3,4,5}. Назовите все элементы декартового произведения $A \times A$, выпишите те подмножества этого произведения, которые задают отношение R:

а. «меньше»;

б. «больше»;

в. «равно»;

г. «не больше»;

д. «меньше на 1»;

е. «непосредственно следовать за».

3. На множестве отрезков заданы отношения Р: «длиннее» и М: «иметь ту же длину». Какое из них является отношением эквивалентности?

4. Укажите среди ниже перечисленных отношения эквивалентности:

а. «равно» на множестве дробей;

б. «иметь равные площади» на множестве прямоугольников;

в. «больше »на множестве натуральных чисел;

г. «иметь один и тот же остаток при делении на 3» на множестве N;

д. «подобия» на множестве треугольников;

е. «не длиннее» на множестве отрезков;

ж. «быть равноотдаленными от Минска» в множестве городов;

з. «принадлежать одному и тому же виду» для живых существ;

и. «иметь общую границу» во множестве стран.

5. На множестве целых чисел от 0 до 9999 задано отношение F: «иметь в записи одно и то же количество цифр». Покажите, что оно является отношением эквивалентности. На сколько классов оно разбивает данное множество цифр? Назовите наименьший и наибольший элементы каждого класса разбиения.

6. На множестве М студентов БГПА задано отношение R: «учится на одном курсе». Докажите, что R – отношение эквивалентности. На какие классы разобьется множество М этим отношением?

7. Разбейте множество $X = \{x / x \in N, 1 < x \leq 20\}$ на классы так, чтобы в один класс попали числа, которые имеют одинаковый остаток при делении на 5. Сколько получилось классов? По какому отношению эквивалентности проведено это разбитие?

8. Какие из следующих отношений между людьми рефлексивные, какие симметричные, какие транзитивные:

а. «а сестра b»;

б. «а друг b»;

г. «а начальник b»;

д. «а на 4 см выше b»;

е. «а имеет тот же цвет волос, что и b»;

ж. «а родился в том же году, что и b».

9. Отношение P: «число x имеет такой же самый остаток от деления на 4, что и число y», задано на множестве $X=\{x / x \in N, x<10\}$.

а. Постройте график отношения P.

б. Какие из чисел множества X удовлетворяют условию xP4, 8Py?

в. Докажите, что P является отношением эквивалентности.

10. Отношение P: «больше или равно» заданного на множестве A={3 см, 5 см, 18 см, 12 см}. Докажите, что P – отношение порядка.

11. Определите, какими свойствами обладают следующие отношения:

а) "a равно b "на множестве треугольников;

б) " a концентрично b " на множестве окружностей плоскости;

в) " a равно b " на множестве рациональных чисел;

г) "число a – делитель числа b" на множестве натуральных чисел;

д) "a меньше или равно b" на множестве целых чисел;

е) "a не больше b" на множестве действительных чисел;

ж) "a кратно b" на множестве натуральных чисел;

з) "a – подмножество множества b" на множестве геометрических фигур;

и) "a – следующее число за b" на множестве натуральных чисел.

Назовите среди них отношения эквивалентности и отношения порядка.

Занятие 4а.

Свойства Бинарных отношений.

Отношения дискретности. Плотные отношения.

1. Отношение P: «больше или равно» задано на множестве A={3 см, 5 см, 18 см, 12 см}. Докажите, что P – отношение порядка.

2. Является ли отношение «быть выше ростом», заданное на множестве студентов группы, отношением порядка?

3. В начальном курсе математики на множестве натуральных чисел изучаются отношения «больше», «больше на», «больше в … раз», «непосредственно стоять за». Какие из них упорядочивают множество натуральных чисел?

4. Постройте граф отношения «x старше y», заданного на множестве детей. Укажите область определения и множество значений этого отношения. Является ли это отношение отношением порядка?

Имя	Андрей	Оля	Коля	Таня	Митя	Петя
Возраст	8	7	8	9	7	10

5. На множестве детей (см табл.) рассмотрите отношение «x не старше y». Постройте граф этого отношения. Будет ли приведенное отношение отношением порядка?

6. Среди следующих отношений, заданных на множестве отрезков, укажите отношения порядка:

а) «длиннее»; б) «короче в 2 раза»;

в) «длиннее на 3 см»; г) «иметь ту же длину».

7. Заданы множества: А- множество букв латинского алфавита, B={a, b, c, d, e, f}, C={c, f}, D={b, a, d}, E={d, k, l, m, n}, F={k, l, m, n}. Рассмотрите между ними отношение R: «быть подмножеством».

а) Выпишите все пары множеств, которые на находятся в отношении R.

б) Докажите, что R – отношение порядка.

8. Какое из следующих множеств является дискретным, плотным:
а) Z; б) A={a/a$\in$N, a<15}; в) Q; г) B={в/в$\in$R, $|b|$<20}?

9. Установите, в какой зависимости находятся величины x и y, если:

а) x – радиус окружности, y – длина этой окружности;

б) x – радиус круга, y – площадь этого круга;

в) x – длина одной стороны прямоугольника, y – длина другой (площадь прямоугольника постоянна) .

10. Между множествами X и У задано отношение R: «y=x+2».

1. Укажите множество У, если:

а) X=R; б) X={x/x$\in$R, x>2}; в) X=Z; г) X={x/x$\in$N, $|x|\le 8{,}5$ }.

2. Укажите множество X, если:

а) Y=R; б) У={ y/y$\in$R, y$\ge$-3}; в) У=N; г)У= {y/y$\in$N, $|y|$<8}.

11. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=1; \\ x+y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=x^2 \\ x-y=2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y-2x=0 \\ 2y+x-10=0. \end{cases}$

12. Нарисуйте линию, заданную уравнением:

а) 2x+3y=4; б) xy=-8; в) y=x^2; г) $(x+3)^2 + y^2=9$;
д) y=$|x|$; е) $|x|=y^2$; ж) y=2-$|x|$; з) $|x|-|y|$=3;
и) y^2-x=0; к) x= y^2; л) y=-$\sqrt{x}$; м) x^2+4x+ y^2-6y=16;
н) x^2+y^2-4x+6y+9=0; о) x^2+y^2+6x+6y+2=0;
п) x^2+y^2-8x-6y=0; р) x^2+y^2-2x-4y-20=0;

13. Определите, какие множества точек задаются следующими уравнениями и постройте их:

а) x(y-1)=0; б) (2x-3y)(x-4y)=0; в) x^2-y^2=0; г) (x-2)(y+3)=0;
д) x^2+2y^2=0; е) (x+1)$\sqrt{y-2}$=0; ж) y$\sqrt{x-3}$=0; з) xy- y^2=0;
и) $|x|+|y|$=2; к) x^2+y^2=4; л) x^2+y^2=0; м) xy=0;
н) y^2-x=0; о) x^2=xy; п) xy+ y^2=0; р) $x^2y=y^2$;
с) $\frac{y-x}{x-1}=0$; т) $\frac{x^2+5x+6-y}{x-4}=0$; у) $\frac{x^2-3x+2-y}{(x-4)(y+1)}=0$;
ф) $\frac{2x+y}{Y-3}=0$; х) $\frac{y+x^2+3x-4}{(x+2)(y-2)}=0$; ц) $\frac{y+12-x(x+1)}{xy}=0$.

Занятие 5а

Уравнение линии на плоскости. Уравнение окружности, прямой.

Вопросы:

1. Уравнение линии на плоскости.
2. Расстояние между двумя точками на плоскости.
3. Координаты середины отрезка.
4. Понятие окружности. Уравнение окружности.
5. Общее уравнение прямой. Угол наклона прямой.
6. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Задачи:

1. Напишите уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точек A(1;2) и B(3;-2).

   А) Как называется эта линия?

   Б) Постройте эту линию.

   В) Лежат ли на этой линии точки C(2;0), D(1;-1), E(4;1)?
2. Написать уравнение линии, каждая точка которой удаленна от начала координат на расстояние 4. Как эта линия называется?
3. Составьте уравнение окружности с центром в точке A и радиусом R:

   а) A(0;0), R= $\sqrt{2}$; б) A(-2;3), R=2; в) A(1;2), R=3; г) A(0;-1,5), R=1,5.

   Постройте эти окружности.
4. Составьте уравнение окружности радиусом 5, если:

   А) Центр окружности лежит на оси OX и окружность проходит через начало координат;

   Б) Центр окружности лежит на оси OY и окружность проходит через начало координат;

   В) Центр окружности находится во втором координатном углу и кружность касается осей координат;

   Г) Окружность касается осей координат.
5. Составьте уравнение окружности с центром в точке A(4;-1), которая проходит через точку M(1;3).
6. Укажите координаты центра и радиуса окружностей, которые заданы следующими уравнениями и постройте эти окружности:

   а) $(x-1)^2+(y+3)^2=16$; б) $4x^2+4y^2-4x+20y=23$;

   в) $x^2+y^2+4x-2y-4=0$; г) $x^2+y^2+2y=0$;

   д) $x^2+y^2-6x=0$; е) $x^2+y^2-4x+8=0$;

   ж) $x^2+y^2+12y-13=0$; з) $x^2+y^2-2x-6y+10=0$;

   и) $x^2+y^2-8y=0$;
7. Найдите координаты точек пересечения окружности $x^2+y^2-6x+4y+8=0$:

   а) с осью OX; б) С осью OY.

8. Окружность задана уравнением $x^2+y^2+5x=0$, а прямая линия – уравнением x+y=0:

А) Не выполняя построения, найдите координаты точек их пересечения.

Б) Проверьте вычисления построением.

9. Даны точки A(-2;1) и B(3;-4). Напишите уравнение прямой, которая перпендикулярна AB и проходит через его середину. Постройте эту прямую.

10. Найдите угловой коэффициент прямой и длину отрезка, отсечённого ею на оси ординат, если прямая заданна уравнением :

A) y=4x-2; B) 3x+y-5=0; C)y=3; D) x-2y=0; E) 2x+4y-5=0; F)x+y=0.

11. Найдите длину отрезка прямой 4x+3y-36=0, находящегося между осями координат, двумя способами.

12. Напишите уравнение прямой, которая проходит через начало координат и составляет с осью Ox угол:

А) 45^0; Б) $\frac{\pi}{3}$; В) 135^0; Г)0^0; Д)arctg(-2).

13. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точки A и B:

а) A(0;2); B(3;1);

б) A(-3;0); B(0;-3);

в) A(-2;3); B(0;-1);

г) A(0;0); B(3;4).

14. Будут ли параллельны следующие пары прямых:

а) y=10x-5 и y=2x+5; б) 3x+4y=5 и y=1.25-0.75x;

в)y=10x-5 и 2y-20x=3; г) 2x-3y=18 и x-3y=6?

Занятие 6а.

Задачи:

1. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку C и параллельна прямой x+2y-6=0, если: а) C(0,0); б) C(4,5).

2. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку A(2,-3) параллельно:

а) оси абсцисс; б) прямой 2x-y-9=0;

в) оси ординат; г) биссектрисе II-го и IV-го координатных углов.

3. Будут ли взаимно перпендикулярными следующие пары прямых:

а) y=0,8x-2 и y=-1,25x+3; б) y-0,6x+2=0 и 3y+6x+9=0;

в) 2x-3y=9 и 3x+2y=8; г) 2x+7y+63=0 и 14x-4y+16=0.

4. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку C перпендикулярно прямой x+2y-6=0, если: а) C(0,0); б) C(4;5).

5. В точках пересечения прямой x-4y-8=0 с осями координат построены перпендикуляры к этой прямой. Напишите уравнения этих перпендикуляров.

6. При каких значениях a прямая (a^2 -16)x+6ay-2a+5=0 проходит:

а) параллельно оси OX; б) перпендикулярно оси OX;

в) параллельно биссектрисе I и III координатных углов;

г) через начало координат.

7. Найдите координаты вершин треугольника, стороны которого заданы уравнениями: а) $4x+3y+20=0$; $6x-7y-16=0$; $x-5y+5=0$;

   б) $7x+3y-25=0$; $2x-7y-15=0$; $9x-4y+15=0$.

8. Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых $3x-4y-10=0$ и $4x+3y-5=0$:

   а) параллельно прямой $5x+y-6=0$;

   б) перпендикулярно прямой $5x+y-6=0$.

9. Покажите, что точка А(3,0) лежит внутри окружности, заданной уравнением $x^2+y^2-4x+2y+1=0$, и напишите уравнение хорды, которая делится в точке А пополам.

Занятие 7 а.

Функциональные отношения.

Вопросы:

1. Взаимно однозначное отношение.
2. Функциональное отношение(функция).
3. Область определения функции. Обозначения.
4. множество значений функции. Обозначения.
5. Обратная функция f^{-1}. Ее область определения, множество значений.
6. Правило построения обратной функции.
7. Линейная функция. Область определения и множество значений линейной функции (все возможные случаи).
8. Виды графиков линейной функции.
9. Прямо пропорциональная функция. Ее область определения и множество значений. Ее график.
10. Обратно пропорциональная функция. Ее область определения и множество значений. Ее график.
11. Дробно линейная функция.
12. Отображение множества Х в У. Область определения этого отображения.
13. Отображение множества Х на У. Область определения и множество значений этого отображения.
14. Обратимые (взаимно однозначные) отображения.

Задачи:

1. Является ли отношение R: «окружность b имеет центр а» и F: «точка а – центр окружности b », заданные между множеством А точек плоскости и множеством В окружностей этой плоскости функциональными?
2. Задайте формулой функцию f^{-1}, обратную функции $f(x)=\sqrt{3-x}$ и укажите область определения и множество значений полученной функции. Постройте графики обеих функций.

3. Проанализируйте графы отображений между множествами X и У (рис) и укажите среди них графы отображений; графы отображений «в», «на»; обратимых отображений.

4. На рисунке показаны графы разных отображений.

   а) Для каждого отображения укажите область определения и множество значений.

   б) Назовите отображения «X в У», «X на У».

   в) Назовите функциональные отношения.

   г) Назовите обратимые отображения.

   д) Задайте отношения s и t при помощи формул.

5. На рисунке показаны графики разных отношений.

   а) Для каждого отношения укажите область определения и множество значений.

   б) Назовите функциональные отношения.

   в) Задайте каждое отношение с помощью формулы.

6. Каждому числу из множества $X=\{3,4,5\}$ поставлен в соответствие его натуральный делитель. Будет ли это отношение функцией?

7. Укажите множество значений функции y=4-x, областью определения которой является множество X: а) X=R; б) $X=(-\infty;0]$; в) X=[-2;2].

8. Найдите область определения функции:

   а) $f(x)=\dfrac{3x}{(x+1)(x-2)}$; б) $g(x)=\sqrt{2-x}$.

9. Пусть X - множество прямоугольников, У – множество окружностей. Поставим прямоугольнику x в соответствие вписанную в него окружность y. Укажите область определения и множество значений этого отношения. Будет ли данное отношение функциональным?

10. Множество X состоит из действительных чисел, а множество У – из треугольников. Будет ли отношение R: «число x – периметр треугольника y» функциональным? Сформулируйте отношение R^{-1}, обратное отношению R, и определите, будет ли оно функциональным?

11. Будет ли функциональным отношение « параллелограмм x описан вокруг окружности y»? Укажите область отправления и область значений этого отношения.

12. Каждому студенту факультета поставим в соответствие чило – его возраст.

    а) Докажите, что это отношение – функция.

    б) Назовите область определения и множество значений этой функции.

    в) Какому множеству принадлежат значения этой функции?

    г) Назовите полный прообраз числа 20.

13. В книге 120 страниц. Мальчик каждодневно прочитывает по 15 страниц.

    а) Сколько страниц у ему останется прочитать через x дней?

    б) Запишите отношение между x и y при помощи равенства.

    в) Будет ли это отношение функциональным?

    г) Назовите область определения и множество значений этого отношения.

14. Заданы множества A={a,b,c,d} и B={2,3}. Изобразите их при помощи кругов Эйлера и постройте графы двух отношений P и R таким образом, чтобы отношение P было функциональным, а отношение R –не функциональным.

15. Между множествами X и У задано отношение R= {(x,y)/ x$\in, X, y \in Y$ }:

а) R={(-3,9), (3,9), (-2,4), (2,4), (-1,1), (1,1), (0,0)};

б) R={(-3,-6), (-2,-4), (-1,-2), (0,0), (-3,6), (5,10), (4,8)};

в) R={(1,1), (-1,1), (2,0.5), (3, $\frac{1}{3}$), (4,0.25)};

г) R={(-4,-1), (-1,2), (2,5), (7,10)};

Задания:

1) Укажите функции;
2) Каждую функцию задайте формулой;
3) Для каждой функции укажите область определения и множество значений;
4) Задайте в каждом случае отношение, обратное данному;
5) Укажите среди обратных отношений функции, задайте каждую формулой.

16. Задайте формулой функцию, обратную данной, укажите область определения и множество значений обратной функции, если:

а) y=2x+3; б) y=3x-2; в) 5x-3y+2=0;
г)7x+4y-1=0; д) y=x ^{2} +7; е) y= x ^{2}, x$\in$ [redacted];+∞)

Занятие 8а

Задания:

1. На множестве натуральных чисел задано отношение К: «каждому натуральному числу поставлено в соответствие его остаток от деления на 8».

а) Укажите область определения и множество значений отношения К.

б) Постройте график отношения К.

в) Будет ли это отношение функцией?

2. Между множествами A={a,b,c,d} и B={m,n,x}заданы отношения:

а) {(a,x),(b,m), (c,x), (d,n) }; б) {(a,x), (b,m), (a,n), (c,x), (d,m)};

в) {(a,m), (b,n), (c,x)}; г) {(a,m), (b,n), (c,x), (d,x), (c,n)}.

Укажите среди них отображения, обратимые отображения.

3. О каких из следующих отношений можно утверждать, являются они обратимыми или не являются:

а) $\{\ldots(a,x),(d,y),(c,z)\ldots\}$, б) $\{\ldots(a,x),(d,y),(c,z),(a,y)\ldots\}$,

в) $\{\ldots(a,x),(d,y),(c,z)\ldots\}$, г) $\{(0,0),(-1,1),(-2,2),(-3,3)\ldots\}$?

4. Точке М отрезка АВ, который не пересекает прямую l , ставится в соответствие ее проекция M_1 на прямую.

а) Покажите, что в этом случае отрезок АВ отображается на прямую l .

б) Каким будет образ отрезка АВ при этом отображении?

5. Элементы множеств X={4,15,9,6} и У={2,3,19} связаны отношениями «число x

меньше числа у» и «число х кратно числу у» ($x \in X, y \in У$).

а) Укажите область определения и множество значений каждого отношения.

б) Какое из отношений является отображением множества X в У?

в) Будет ли это отображение взаимнооднозначным?

6. Каждой точке X окружности ставится в соответствие такая точка X_1 ее диаметра AB, что $XX_1 \perp AB$.

   а) Будет ли отображение окружности на диаметр?

   б) Является ли это отображение взаимнооднозначным?

7. N – множество натуральных чисел, У – множество квадратов натуральных чисел. Докажите, что существует обратимое отображение множества N на множество У.

8. Отношение R: «фигура х имеет площадь у» задано между множествами М геометрических фигур и R действительных чисел.

   а) Будет ли отношение R функцией?

   б) Будет ли отношение R отображением множества М в множество R?

   в) Будет ли отношение R отображением множества М на множество R?

   в) Является ли это отображение обратимым?

9. Отношение между множествами $A = \{(,1),(,2),(,3),(,4),(,5),(,6)\}$ и $B = \{z \mid z \in N, 0 \prec z \prec 10\}$ такое, что каждой паре (х,у)$\in$А ставится в соответствие число $z \in B$ такое, что z=xy. Будет ли это отношение отображением множества А в множество В?

10. Множество X={1,2,3}. Составьте множество $A=X\times X$. Поставьте в соответствие каждой паре (х,у)$\in$А такое число z$\in$X, что z=x+y. Будет ли это отношение отображением множества X в множество А?

Занятие 9а

Мощность множеств.

Вопросы:

1. Эквивалентные (равнозначные) множества.
2. Равномощные множества.
3. Связь между эквивалентными и равномощными множествами.
4. Счетные множества.
5. Множество мощности континуума.

Задачи:

1. Пусть X – множество точек отрезка AB, У – множество точек отрезка СД (отрезки AB и СД лежат в одной плоскости, не пересекаются и AB$\neq$СД). Докажите, что множества X и У равномощны.
2. Докажите, что множество квадратов целых неотрицательных чисел счетное.
3. Докажите, что:

   а) операция сложения будет отображением множества $N\times N$ в N;

   б) операция умножения будет отображением множества $N\times N$ в N;

   в) операция вычитания не будет отображением множества $N\times N$ в N;

3. Установите зависимость между переменными х и у, если:

а) x – радиус окружности, y – его длина;

б) x – радиус круга, y – его площадь.

4. Постройте график функции y=3x, если ее область определения есть:

   а) Множество R; б) множество Z; в) отрезок [0;4]; г) множество {-2;-1;0;1;2}.

5. Постройте график функции y=2x и с его помощью покажите, что одинаковым изменениям переменной x соответствуют одинаковые изменения переменной y.

6. Найдите коэффициент k прямой пропорциональности, график которой проходит через точку M(2;-7).

7. Найдите коэффициент k обратной пропорциональности, график которой проходит через точку M(2;-7).

8. Постройте график функции $y=\frac{12}{x}$ и с его помощью покажите, что когда значение переменной x увеличить в 2 раза, то значение переменной y уменьшится в 2 раза.

9. Основание прямоугольника 3м, высота x м, площадь y кв. м.

   а) Задайте с помощью уравнения зависимость между переменными x и y.

   б) Постройте график этой зависимости и с его помощью установите:

   1) какую площадь имеет прямоугольник высотой 2,5 м;

   2) при какой высоте площадь прямоугольника будет 5 кв. м?

10. Постройте график функции:

    а) $y=\frac{12}{x}$; б) $y=\frac{12}{x}$, D(y)={-3;-2;-1;0;1;2;3};

    в) $y=\frac{3}{2-x}$; г) y=2x+3; д) y=2x+3, D(y)= $[-5;3)$.

11. Докажите, что множества A и B равномощные, когда:

    а) A – множество сторон треугольника, B – множество его углов;

    б) A – множество букв слова «колос», B – множество цифр числа 34574;

    в) A – множество дней недели, B={a,b,c,d,e,f,g}.

12. X – множество окружностей плоскости, У – множество точек этой плоскости. Между этими множествами задано отношение R: «окружность x имеет центр y».

    а) Является ли отношение R функцией?

    б) Докажите, что отношение R является отображением множества X в множество У?

    в) Является ли это отображение обратимым?

    г) Будут ли множества X и У равномощными?

13. Докажите, что множество натуральных чисел равномощно множеству:

    а) нечетных натуральных чисел; б) целых неотрицательных чисел;

    в) квадратов натуральных чисел; г) натуральных чисел, кратных 5.

Занятие 10а.

***Алгебраическая операция**

Определение. Алгебраической операцией на множестве X называется отображение

$(x,y) \to z$, которое каждой упорядоченной паре (x,y) этого множества ставит в соответствие третий элемент $z \in X$. Другими словами, алгебраической операцией на множестве X называется отображение декартова произведения $X \times X$ в X.

Определение. Частичной алгебраической операцией на множестве X называется отображение некоторого подмножества У декартового произведения $X \times X$ в X. Множество пар (x,y), которым соответствует элемент z, называется областью определения частичной алгебраической операции.

Определение. Если при заданной алгебраической операции для каждой пары (x,y) из множества X соответствующий элемент z также принадлежит множеству X, то говорят, что множество X замкнуто относительно данной алгебраической операции.

Определение. Элемент «е» называется *нейтральным* относительно алгебраической операции *****, если для каждого элемента $x \in X$ выполняется равенство

$e*x=x*e=x$.

Определение. Элемент «w»называется *поглощающим* относительно алгебраической операции *** ,** если для каждого элемента $x \in X$ выполняется равенство

$w*x=x*w=w$.

Определение. Если во множестве X существует нейтральный элемент «е» относительно алгебраической операции ***,** то элемент x^{-1} называется симметричным элементу x относительно данной алгебраической операции при условии, что

$x* x^{-1} = x^{-1} *x=e$

Основные свойства алгебраической операции

1. Алгебраическая операция ***** называется ассоциативной (сочетательной), когда для любых трех элементов $x, y, z \in X$ выполняется равенство:
   $x*(y*z)= (x*y)*z$.
2. Алгебраическая операция ***** называется коммутативной (переместительной), когда для любых двух элементов $x, y \in X$ выполняется равенство:
   $x*y= y*x$.
3. Пусть во множестве X заданы две алгебраические операции* и #. Операция # называется дистрибутивной (разместительной) относительно операции *, если для любых трех элементов $x, y, z \in X$ выполняются равенства:
   $x\#(y*z)=(x\#y)*(x\#z)$;
   $(y*z)\#a=(y\#a)*(z\#a)$.

Определение. Группой называется непустое множество G, в котором определена ассоциативная алгебраическая операция * , относительно которой:

1. Нейтральный элемент $e \in G$;
2. Вместе с каждым элементом $a \in G$ и симметричен ему элемент $a^{-1} \in G$.

Определение. Кольцом относительно операций * и # называется множество A, в котором заданы две алгебраические операции * и #, когда оно образует коммутативную группу относительно операции *, а операция # дистрибутивна относительно операции *.

Определение. Полем называется коммутативное и ассоциативное кольцо с единицей, в котором для каждого элемента $a \neq 0$ существует обратный элемент a^{-1}.

Задачи:

1. Будет ли умножение алгебраической операцией на множестве: а) A={-1;0;1}; б) A={0;1} в) A={0;1;2}; г) A={0;1;2;3}.

   Будет ли сложение алгебраической операцией на этом множестве?

   Решение

пары	умножение		сложение	
(-1;-1)	(-1)(-1)=1	$1 \in A$	(-1)+(-1)=-2,	$-2 \notin A$
(0,0)	(0)(0)=0,	$0 \in A$	0+0=0,	$-2 \in A$
(1,1)	1*1=1,	$1 \in A$	1+1=2,	$2 \in A$
(-1,0)	(-1)*0=0,	$0 \in A$	1+0=1,	$1 \in A$
(-1,1)	(-1)*1=-1	$-1 \in A$	-1+1=0,	$0 \in A$
(0,1)	0*1=0,	$0 \in A$	0+1=1,	$1 \in A$
(0,-1)	0*(-1)=0,	$0 \in A$	0+(-1)=-1,	$-1 \in A$
(1,-1)	1*(-1)=-1	$-1 \in A$	1+(-1)=0,	$0 \in A$
(1,0)	1*0=0,	$0 \in A$	1+0=1,	$1 \in A$

Решенне. Составим все возможные пары из элементов данного множества и найдём результаты умножения и сложения.

Поскольку все результаты умножения принадлежат множеству A, то умножение является алгебраической операцией на множестве A.

Поскольку не все результаты сложения принадлежат множеству A, то сложение не является алгебраической операцией на множестве A.

Ответ: умножение является алгебраической операцией на A; сложение не является алгебраической операцией на A.

2. Операция возведения в степень рассматривается на множестве N.

   а) найдите образы пар (2;3), (3,2), (5,2), (2,5) при этой операции.

   б) Покажите, что возведение в степень – алгебраическая операция на множестве N.

   в) Будет ли эта алгебраическая операция коммутативной?

   г) будет ли эта алгебраическая операция ассоциативной?

   д) Будет ли множество N замкнуто относительно названной операции?

3. Докажите, что сложение и умножение являются алгебраическими операциями на множестве натуральных чисел.

4. Почему вычитание и деление являются частично алгебраическими операциями на множестве N.

5. Будет ли вычитание алгебраической операцией на множестве целых чисел?

6. Какие из следующих алгебраических операций на множестве целых чисел являются коммутативными, ассоциативными:

   а) сложение; б) операция, заданная формулой $(x,y) \Rightarrow 2x-y$;

   а) умножение; б) операция, заданная формулой $(x,y) \Rightarrow |x-y|$;

   а) вычитание; б) операция, заданная формулой $(x,y) \Rightarrow x^2 - y^2$?

7. Будет ли алгебраической операция на множестве чисел вида $6k+5$, $k \in Z$:

   а) сложение; б) вычитание; в) умножение?

8. Укажите нейтральный элемент на множестве N для алгебраической операции:

а) сложение; б) умножение; в) возведение в степень.

9. Почему число 0 является нейтральным элементом относительно сложения на множестве целых чисел? Существуют ли еще нейтральные элементы для вычитания, умножения, деления на этом множестве?

10. На множестве целых чисел задана алгебраическая операция сложения (умножения). Укажите число, симметричное числу: -8; -1; 0; 1; 3.

11. Какие из целых чисел имеют симметричные элементы относительно умножения (деления)?

12. На множестве рациональных чисел задана алгебраическая операция умножения. Какое число симметрично числу: 8; 0,3; $-\frac{3}{4}$; 0?

13. Существует ли поглощающий элемент во множестве N (Z, Q, R) для алгебраической операции:

а) сложение;

б) вычитание;

в) умножение;

г) деление;

д) возведение в степень?