УДК 536.24

А. В. Алифанов, В. М. Голуб

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРОВ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ХАНКЕЛЯ И ЛАПЛАСА

Рассмотрена задача равномерного нестационарного бокового нагрева двух ограниченных цилиндров с различными теплофизическими характеристиками, находящихся в идеальном тепловом контакте. С помощью метода интегральных преобразований найдено точное аналитическое решение для определения трехмерного температурного поля в реальном пространстве. Исследованы особенности полученного решения, приведены примеры конкретных расчетов.

Рассмотрим систему идеального контакта в плоскости $z = 0$ двух ограниченных цилиндров с различными теплофизическими характеристиками (ТФХ) и нулевой начальной температурой. Цилиндры имеют одинаковый радиус R и длины соответственно l_1 и l_2. В начальный момент времени на всей боковой поверхности цилиндров ($-l_1 \le z \le l_2$, $r = R$) начинает действовать источник тепла постоянной поверхностной мощности Q_R. На торцах цилиндров происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры по закону Ньютона с коэффициентами теплоотдачи α_1 и α_2. Требуется найти распределение температурного поля в системе в любой момент времени. Математически поставленная задача имеет вид двух дифференциальных уравнений теплопроводности в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - a_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0 \ , \quad - l_1 < z < 0 \ ; \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} - a_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) = 0 \ , \quad 0 < z < l_2 \ , \tag{1}$$

со следующими начальным и граничными условиями:

$$T_1 (r, z, 0) = T_2 (r, z, 0) \ , \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1 (r, - l_1, t)}{\partial z} = \alpha_1 T_1 (r, - l_1, t) \ , \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2 (r, - l_2, t)}{\partial z} = - \alpha_2 T_2 (r, l_2, t) \ ; \tag{2}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1 (R, z, t)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2 (R, z, t)}{\partial r} = Q_R \ , \quad \frac{\partial T_1 (0, z, t)}{\partial r} = \frac{\partial T_2 (0, z, t)}{\partial r} = 0 \ . \tag{3}$$

В области контакта ($z = 0$) потребуем выполнения условий сопряжения:

$$T_1 (r, 0, t) = T_2 (r, 0, t) \ , \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1 (r, 0, t)}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2 (r, 0, t)}{\partial z} \ . \tag{4}$$

Последовательно применим к задаче (1)–(4) конечное интегральное преобразование Ханкеля

$$\bar{T}_i (\mu_m, z, t) = \int_0^R r J_0 \left(\mu_m \frac{r}{R} \right) T_i (r, z, t) \, dr$$

и преобразование Лапласа

$$\bar{\bar{T}}_i (\mu_m, z, s) = \int_0^\infty \exp (- st) \, \bar{T}_i (\mu_m, z, t) \, dt \ ,$$

где μ_m – корни уравнения $J_1(\mu) = 0$. После указанных операций первоначальная задача сведется к следующей:

$$\frac{d^2 \bar{\bar{T}}_1}{dz^2} - \sigma_{1m}^2 \bar{\bar{T}}_1 = - \frac{R J_0 (\mu_m, Q_R)}{s \lambda_1} \ , \quad - l_1 < z < 0 \ ; \quad \frac{d^2 \bar{\bar{T}}_2}{dz^2} - \sigma_{2m}^2 \bar{\bar{T}}_2 = - \frac{R J_0 (\mu_m, Q_R)}{s \lambda_2} \ , \quad 0 < z < l_2 \ , \tag{5}$$

$$\lambda_1 \frac{d \bar{\bar{T}}_1 (\mu_m, - l_1, s)}{dz} = \alpha_1 \bar{\bar{T}}_1 (\mu_m, - l_1, s) \ , \quad \lambda_2 \frac{d \bar{\bar{T}}_2 (\mu_m, l_2, s)}{dz} = - \alpha_2 \bar{\bar{T}}_2 (\mu_m, l_2, s) \ ; \tag{6}$$

Физико-технический институт НАН Беларуси, г. Минск; э-почта: phti@ns.igsac.by. Поступила 17.10.2002, в окончательной редакции – 10.01.2003.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

$$\bar{\bar{T}}_1(\mu_m, 0, s) = \bar{\bar{T}}_2(\mu_m, 0, s)\,, \quad \lambda_1 \frac{d\bar{\bar{T}}_1(\mu_m, 0, s)}{dz} = \lambda_2 \frac{d\bar{\bar{T}}_2(\mu_m, 0, s)}{dz}\,; \tag{7}$$

где

где $\quad \sigma_{1m} = \sqrt{\frac{s}{a_1} + \gamma_m^2}\,; \quad \sigma_{2m} = \sqrt{\frac{s}{a_2} + \gamma_m^2}\,, \quad \gamma_m = \frac{\mu_m}{R}\,.$

В итоге от задачи (1)–(4) с дифференциальными уравнениями в частных производных мы пришли к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (5) с граничными условиями (6) и условиями сопряжения (7). Общие решения уравнений (5) записываются следующим образом:

$$\bar{\bar{T}}_1(\mu_m, z, s) = A_m \operatorname{ch} \sigma_{1m} z + B_m \operatorname{sh} \sigma_{1m} z + \frac{a_1 R J_0(\mu_m)\, Q_R}{\lambda_1 s\,(s + a_1 \gamma_m^2)}\,,$$

$$\bar{\bar{T}}_2(\mu_m, z, s) = C_m \operatorname{ch} \sigma_{2m} z + D_m \operatorname{sh} \sigma_{2m} z + \frac{a_2 R J_0(\mu_m)\, Q_R}{\lambda_2 s\,(s + a_2 \gamma_m^2)}\,.$$

После определения с использованием граничных условий и условий сопряжения постоянных интегрирования A_m, B_m, C_m, D_m получим выражения для температур контактирующих цилиндров в пространстве изображений

$$\bar{\bar{T}}_1(\mu_m, z, s) = \frac{R Q_R J_0(\mu_m)}{\lambda_1} \left\{ \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{s \sigma_{2m} Z_m} \lambda_1 (\sigma_{2m} \operatorname{sh} \sigma_{2m} l_2 + h_2 \operatorname{ch} \sigma_{2m} l_2 - h_2)(\sigma_{1m} \operatorname{ch} \sigma_{1m}(l_1 + z) + \right.$$
$$+ h_1 \operatorname{sh} \sigma_{1m}(l_1 + z)) - \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{s \sigma_{1m} Z_m} \left[\lambda_2 \frac{\sigma_{2m}}{\sigma_{1m}} (\sigma_{2m} \operatorname{sh} \sigma_{2m} l_2 + h_2 \operatorname{ch} \sigma_{2m} l_2)(\sigma_{1m} \operatorname{ch} \sigma_{1m}(l_1 + z) + h_1 (\operatorname{sh} \sigma_{1m}(l_1 + z) - \right.$$
$$\left.\left. - \operatorname{sh} \sigma_{1m} z)) + \alpha_1 (\sigma_{2m} \operatorname{ch} \sigma_{2m} l_2 + h_2 \operatorname{sh} \sigma_{2m} l_2) \operatorname{ch} \sigma_{1m} z \right] + \frac{a_1}{s\,(s + a_1 \gamma_m^2)} \right\}, \tag{8}$$

$$\bar{\bar{T}}_2(\mu_m, z, s) = \frac{R Q_R J_0(\mu_m)}{\lambda_2} \left\{ \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{s \sigma_{1m} Z_m} \lambda_2 (\sigma_{1m} \operatorname{sh} \sigma_{1m} l_1 + h_1 \operatorname{ch} \sigma_{1m} l_1 - h_1)(\sigma_{2m} \operatorname{ch} \sigma_{2m}(l_2 - z) + \right.$$
$$+ h_2 \operatorname{sh} \sigma_{2m}(l_2 - z)) - \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{s \sigma_{2m} Z_m} \left[\lambda_1 \frac{\sigma_{1m}}{\sigma_{2m}} (\sigma_{1m} \operatorname{sh} \sigma_{1m} l_1 + h_1 \operatorname{ch} \sigma_{1m} l_1)(\sigma_{2m} \operatorname{ch} \sigma_{2m}(l_2 - z) + h_2 (\operatorname{sh} \sigma_{2m}(l_2 - z) - \right.$$
$$\left.\left. - \operatorname{sh} \sigma_{2m} z)) + \alpha_2 (\sigma_{1m} \operatorname{ch} \sigma_{1m} l_1 + h_1 \operatorname{sh} \sigma_{1m} l_1) \operatorname{ch} \sigma_{2m} z \right] + \frac{a_2}{s\,(s + a_2 \gamma_m^2)} \right\}, \tag{9}$$

где

$$Z_m(\mu_m, s) = \sqrt{a_1 a_2}\, (\lambda_1 \sigma_{1m} (\sigma_{1m} \operatorname{sh} \sigma_{1m} l_1 + h_1 \operatorname{ch} \sigma_{1m} l_1)(\sigma_{2m} \operatorname{ch} \sigma_{2m} l_2 + h_2 \operatorname{sh} \sigma_{2m} l_2) +$$
$$+ \lambda_2 \sigma_{2m} (\sigma_{1m} \operatorname{ch} \sigma_{1m} l_1 + h_1 \operatorname{sh} \sigma_{1m} l_1)(\sigma_{2m} \operatorname{sh} \sigma_{2m} l_2 + h_2 \operatorname{ch} \sigma_{2m} l_2)\,, \quad h_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda_1}\,, \quad h_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda_2}\,.$$

Для получения явных выражений для температурных полей необходимо произвести над уравнениями (8) и (9) операции обратных преобразований Лапласа и Ханкеля [1–3]. В этой связи актуальным является вопрос о существовании оригиналов температуры от полученных решений. Известно, что не всякая функция $f(s)$ в пространстве преобразований Лапласа может быть изображением некоторой функции $f(t)$ в реальном пространстве [2]. Как показывает анализ решений (8) и (9), они удовлетворяют всем требованиям существования оригиналов и соответствующих обратных преобразований. Единственная особенность имеется лишь на границе контакта ($z = 0$). Но она приводит только к появлению в окончательном решении некоторой обобщенной функции и не является препятствием для проведения процедуры обратного преобразования. Эта особенность будет обсуждена несколько ниже. В процессе обращения решений (8) и (9) были использованы табличные интегралы преобразований Лапласа [4], а также теоремы разложения Ващенко–Захарченко и умножения изображений Бореля [2]. Ввиду громоздкости данных уравнений и соответственно процедур обратного преобразования приведем только конечный результат, опуская ход самих математических выкладок. Пространственное температурное поле в системе ограниченных разнородных цилиндров, находящихся в идеальном тепловом контакте и нагреваемых с боковой поверхности тепловым потоком постоянной мощности Q_R, определяется следующими выражениями:

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

$$T_1(r,z,t)=\frac{2Q_R}{\lambda_1 R}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{k0}\cos\gamma_{k0}z+B_{k0}\sin\gamma_{k0}z}{a_1^2\gamma_{k0}^4 Z_{k0}}\left(1-\exp\left(-a_1\gamma_{k0}^2t\right)\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_m}{R}r\right)}{\gamma_m^2 J_0(\mu_m)}\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{km}}{(\gamma_{km}^2+\gamma_m^2)Z_{km}}\left(\left(A_{km}\cos\gamma_{km}z+B_{km}\sin\gamma_{km}z\right)F(t)+\left(A'_{km}\cos\gamma_{km}z+B'_{km}\sin\gamma_{km}z\right)G(t)\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(1-\exp\left(-a_1\gamma_m^2t\right)\right)+\frac{\lambda_1\left(1-\exp\left(-a_2\gamma_m^2t\right)\right)-\lambda_2\left(1-\exp\left(-a_1\gamma_m^2t\right)\right)}{\lambda_2+\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\,\lambda_1}\,\eta(z)\right]\right\}, \qquad (10)$$

$$T_2(r,z,t)=\frac{2Q_R}{\lambda_2 R}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_{k0}\cos q_{k0}z+D_{k0}\sin q_{k0}z}{a_1^2\gamma_{k0}^4 Z_{k0}}\left(1-\exp\left(-a_1\gamma_{k0}^2t\right)\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_m}{R}r\right)}{\gamma_m^2 J_0(\mu_m)}\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_{km}}{(\gamma_{km}^2+\gamma_m^2)Z_{km}}\left(\left(C_{km}\cos q_{km}z+D_{km}\sin q_{km}z\right)F(t)+\left(C'_{km}\cos q_{km}z+D'_{km}\sin q_{km}z\right)G(t)\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(1-\exp\left(-a_2\gamma_m^2t\right)\right)+\frac{\lambda_2\left(1-\exp\left(-a_1\gamma_m^2t\right)\right)-\lambda_1\left(1-\exp\left(-a_2\gamma_m^2t\right)\right)}{\lambda_1+\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\,\lambda_2}\,\eta(z)\right]\right\}. \qquad (11)$$

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

Здесь

$$F(t)=\left(1-\frac{\gamma_{km}^2}{\beta_{km}^2}\exp\left(-a_2\gamma_m^2t\right)-\frac{\gamma_m^2}{\beta_{km}^2}\left(\exp\left(-a_2\gamma_m^2t\right)-\frac{a_2}{a_1}\exp\left(-a_1\left(\gamma_{km}^2+\gamma_m^2\right)t\right)\right)\right),$$

$$G(t)=\left(1-\exp\left(-a_1\gamma_m^2t\right)-\frac{\gamma_m^2}{\gamma_{km}^2}\left(\exp\left(-a_1\gamma_m^2t\right)-\exp\left(-a_1\left(\gamma_{km}^2+\gamma_m^2\right)t\right)\right)\right),$$

$$Z_{km}=\left(\lambda_1\left(h_1\left(\frac{\gamma_{km}}{\beta_{km}}(1+h_2l_2)+\frac{\beta_{km}}{\gamma_{km}}\right)-\gamma_{km}\beta_{km}l_1\right)+\lambda_2\left(h_2\left(\frac{\beta_{km}}{\gamma_{km}}(1+h_1l_1)+\frac{\gamma_{km}}{\beta_{km}}\right)-\frac{a_1\gamma_{km}\beta_{km}l_2}{a_2}\right)\right)\times$$

$$\times\cos\gamma_{km}l_1\cos q_{km}l_2+\left(\lambda_1\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\,h_2\left(\frac{h_1}{\gamma_{km}}-\gamma_{km}l_1\right)-\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\,\gamma_{km}h_1l_2\right)-\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\,\lambda_2\times\right.$$

$$\left.\times\left(\gamma_{km}(2+h_2l_2)+\frac{\beta_{km}^2}{\gamma_{km}}(1+h_1l_1)\right)\right)\cos\gamma_{km}l_1\sin q_{km}l_2+\left(\lambda_2\left(\frac{h_1h_2}{\beta_{km}}-\beta_{km}\left(h_2l_1+\frac{a_1}{a_2}h_1l_2\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\lambda_1\left(\beta_{km}(2+h_1l_1)+\frac{\gamma_{km}^2}{\beta_{km}}(1+h_2l_2)\right)\right)\cos q_{km}l_2\sin\gamma_{km}l_1+\left(\lambda_1\left(\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\,\gamma_{km}^2l_2-\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\,h_2(2+h_1l_1)\right)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\,\lambda_2\left(\beta_{km}^2l_1-h_1(2+h_2l_2)\right)\right)\sin\gamma_{km}l_1\sin q_{km}l_2\,,$$

$$A_{k0}=2\left\{(a_1\lambda_2-a_2\lambda_1)\left(\sqrt{a_1}\,\gamma_{k0}\cos\gamma_{k0}l_1+\sqrt{a_1}\,h_1\sin\gamma_{k0}l_1\right)\left(h_2\cos q_{k0}l_2-q_{k0}\sin q_{k0}l_2\right)+\right.$$
$$\left.+\alpha_1a_1\left(\sqrt{a_1}\,\gamma_{k0}\cos q_{k0}l_2+\sqrt{a_2}\,h_2\sin q_{k0}l_2\right)+h_2a_2\lambda_1\left(\sqrt{a_1}\,\gamma_{k0}\cos\gamma_{k0}l_1+\sqrt{a_1}\,h_1\sin\gamma_{k0}l_1\right)\right\},$$

$$B_{k0}=2\left\{(a_1\lambda_2-a_2\lambda_1)\sqrt{a_1}\left(h_1\cos\gamma_{k0}l_1+\gamma_{k0}\sin\gamma_{k0}l_1\right)\left(h_2\cos q_{k0}l_2-q_{k0}\sin q_{k0}l_2\right)-\right.$$

Корни уравнения (12) для систем медь–титан и сталь–цирконий

m	μ_m	γ_{1m}		γ_{2m}		γ_{3m}		γ_{4m}		γ_{5m}	
		CuTi	FeZr	CuTi	FeZr	CuTi	FeZr	CuTi	FeZr	CuTi	FeZr
0	0	2.68	6.33	13.91	33.14	33.75	71.60	54.50	96.31	72.73	138.91
1	3.83	38.55	52.01	70.96	86.04	86.87	127.96	111.12	159.42	136.25	194.94
2	7.02	26.17	5.28	68.59	61.10	92.38	101.05	124.59	147.50	150.98	166.30
3	10.17	55.15	19.18	90.11	68.26	127.12	115.94	154.89	158.41	175.86	199.30
4	13.32	36.84	27.57	82.59	76.42	121.73	128.27	154.78	169.16	179.95	217.34
5	16.47	21.48	33.06	66.98	85.69	110.79	137.94	151.04	181.53	178.78	229.26

$$- \alpha_1 a_1 \sqrt{a_1} \,(h_2 \cos q_{k0} l_2 - q_{k0} \sin q_{k0} l_2) + h_2 a_2 \lambda_1 \sqrt{a_1} \,(h_1 \cos \gamma_{k0} l_1 - \gamma_{k0} \sin \gamma_{k0} l_1) \Big\} ,$$

$$A_{km} = 2\lambda_1 (\gamma_{km} \cos \gamma_{km} l_1 + h_1 \sin \gamma_{km} l_1) (q_{km} \sin q_{km} l_2 - h_2 \cos q_{km} l_2 + h_2) ,$$

$$B_{km} = 2\lambda_1 (h_1 \cos \gamma_{km} l_1 - \gamma_{km} \sin \gamma_{km} l_1) (q_{km} \sin q_{km} l_2 - h_2 \cos q_{km} l_2 + h_2) ,$$

$$A'_{km} = 2 \Bigg[\lambda_2 (\gamma_{km} \cos \gamma_{km} l_1 + h_1 \sin \gamma_{km} l_1) (h_2 \cos q_{km} l_2 - q_{km} \sin q_{km} l_2) + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \frac{\alpha_1 \gamma_{km}}{\beta_{km}} (q_{km} \cos q_{km} l_2 + h_2 \sin q_{km} l_2) \Bigg] ,$$

$$B'_{km} = 2\lambda_2 (h_2 \cos q_{km} l_2 - q_{km} \sin q_{km} l_2) (h_1 \cos \gamma_{km} l_1 - \gamma_{km} \sin \gamma_{km} l_1 + h_1) ,$$

$$C_{k0} = 2 \Big\{ (a_2 \lambda_1 - a_1 \lambda_2) (h_1 \cos \gamma_{k0} l_1 - \gamma_{k0} \sin \gamma_{k0} l_1) (\sqrt{a_1}\, \gamma_{k0} \cos q_{k0} l_2 + \sqrt{a_2}\, h_2 \sin q_{k0} l_2) + $$
$$+ \alpha_2 a_2 (\sqrt{a_1}\, \gamma_{k0} \cos \gamma_{k0} l_1 + \sqrt{a_1}\, h_1 \sin \gamma_{k0} l_1) + h_1 a_1 \lambda_2 (\sqrt{a_1}\, \gamma_{k0} \cos q_{k0} l_2 + \sqrt{a_2}\, h_2 \sin q_{k0} l_2) \Big\} ,$$

$$C_{km} = 2 \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \Bigg[\lambda_1 (h_1 \cos \gamma_{km} l_1 - \gamma_{km} \sin \gamma_{km} l_1) (q_{km} \cos q_{km} l_2 + h_2 \sin q_{km} l_2) + \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \frac{\alpha_2 \beta_{km}}{\gamma_{km}} (\gamma_{km} \cos \gamma_{km} l_1 + h_1 \sin \gamma_{km} l_1) \Bigg] ,$$

$$C'_{km} = 2 \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \,\lambda_2 (q_{km} \cos q_{km} l_2 + h_2 \sin q_{km} l_2) (\gamma_{km} \sin \gamma_{km} l_1 - h_1 \cos \gamma_{km} l_1 + h_1) ,$$

$$D_{km} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \, B_{km} , \quad D'_{km} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \, B'_{km} , \quad \beta_{km} = \sqrt{\gamma_{km}^2 + \left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right) \gamma_m^2} , \quad q_{km} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \, \beta_{km} ,$$

$$\eta(z) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad z \neq 0 , \\ 1 & \text{при} \quad z = 0 . \end{cases}$$

Величины γ_{km} являются корнями трансцендентного уравнения

$$\lambda_1 \gamma_{km} (\sqrt{a_1}\, \beta_{km} \cos q_{km} l_2 + \sqrt{a_2}\, h_2 \sin q_{km} l_2) (h_1 \cos \gamma_{km} l_1 - \gamma_{km} \sin \gamma_{km} l_1) +$$
$$+ \lambda_2 \sqrt{a_1}\, \beta_{km} (\gamma_{km} \cos \gamma_{km} l_1 + h_1 \sin \gamma_{km} l_1) (h_2 \cos q_{km} l_2 - q_{km} \sin q_{km} l_2) = 0 . \qquad (12)$$

Анализ полученных уравнений (10) и (11) показывает, что они имеют гораздо более сложную структуру, чем решения для однородных цилиндров [1, 5], одномерных задач контактной теплопроводности [1, 5, 6], а также пространственных задач в полуограниченных и неограниченных областях [5–8]. Кроме сложного общего вида конечных выражений, необходимо отдельно обратить внимание на две их особенности.

Первая состоит в том, что в уравнениях (10), (11) в показатели при экспонентах и в знаменатели членов сумм рядов входит комбинация величин $\gamma_{km}^2 + \gamma_m^2$. В случаях однородных материалов данные слагаемые являются корнями независимых трансцендентных уравнений для осевого и радиального направлений. При рассмотрении же задач с ограниченными контактирующими телами, имеющими различные теплофизические характеристики, корни продольных трансцендентных уравнений зависят от величин γ_m, что очевидно из выражения (12). Именно поэтому в нашем решении они имеют двойной индекс km. Происходящее явление можно назвать гибридизацией осевых и радиальных корней. Предположим, что для достижения оптимальной точности решения необходимо ввести в рассмотрение m радиальных членов суммы и k – осевых. Тогда в случае однородного материала нам понадобится решить $m + k$ трансцендентных уравнений. Если же рас-

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

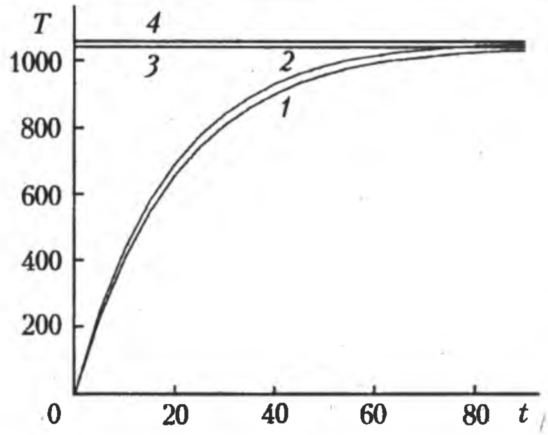

Рис. 1. Изменение температуры в плоскости контакта на поверхности цилиндров в процессе нагрева: *1* – система медь–титан; *2* – сталь–цирконий; *3* и *4* – стационарные температуры; рассчитанные по результатам [9] для этих систем

сматривается задача для двух разнородных контактирующих тел, это число увеличивается до $m\,(k+1)$. Анализ уравнения (12) показывает, что причиной такой зависимости является именно различие теплофизических характеристик соприкасающихся объектов. Действительно, если положить $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $a_1 = a_2 = a$, $h_1 = h_2 = h$, $l_1 = 0$, $l_2 = l$, то получим хорошо известное [1, 2, 5] трансцендентное уравнение для ограниченного однородного тела с одинаковыми коэффициентами теплоотдачи на поверхностях $z = 0$ и $z = l$

$$h\,(\gamma \cos \gamma l + h \sin \gamma l) + \gamma\,(h \cos \gamma l - \gamma \sin \gamma l) = 0\ .$$

Вторая особенность полученного решения заключается в наличии в нем точечной единичной функции $\eta(z)$. Математически ее появление предопределено тем, что выражения для температур в пространстве изображений (8) и (9) имеют конечные пределы в точке $z = 0$ при условии $s \to \infty$: $\left(\lambda_2 + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\,\lambda_1\right)^{-1}$ для $\bar{\bar{T}}_1(\mu_m, z, s)$ и $\left(\lambda_1 + \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\,\lambda_2\right)^{-1}$ для $\bar{\bar{T}}_2(\mu_m, z, z)$. Этот эффект отсутствует при рассмотрении контактных одномерных [1, 5] и неограниченных [5–8] задач теплопроводности. Необходимо также отметить, что в стационарном случае решение нашей задачи не имеет никаких особенностей в плоскости контакта и описывается гладкими функциями [9].

В заключение приведем результаты расчетов температурных полей в процессе диффузионной сварки двух различных систем, состоящих из цилиндров с различными теплофизическими характеристиками (медь–титан и сталь–цирконий). С целью большей наглядности сравнения размеры цилиндров и параметры нагрева выбраны идентичными (радиусы и длины цилиндров – по 40 мм, коэффициенты теплоотдачи на всех торцах – 100 Вт/(м^2·град), мощность нагрева – 1 кВт/м^2). Таким образом, динамика пространственного распределения температуры будет зависеть только от характеристик нагреваемых материалов. В таблице приведены

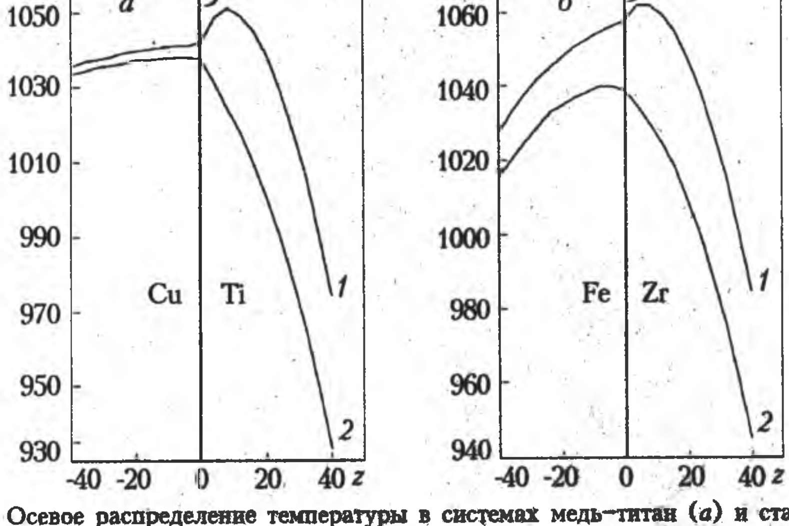

Рис. 2. Осевое распределение температуры в системах медь–титан (*а*) и сталь–цирконий (*б*): *1* – вдоль образующий цилиндров; *2* – вдоль центральной оси; *3* – граница плоскости контакта

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

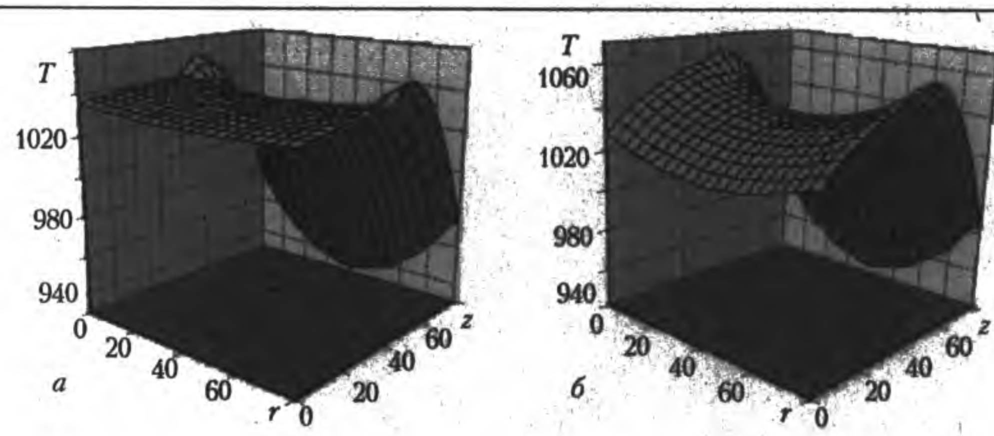

Рис. 3. Пространственное распределение температурного поля в центральной плоскости цилиндров: *а* – медь–титан; *б* – сталь–цирконий

первые пять корней уравнения $J_1(\mu) = 0$, которые связаны с величинами γ_m соотношением $\mu_m = \gamma_m R$, и соответствующие им корни трансцендентного уравнения (12) γ_{km}.

Как видно из таблицы, величины γ_{km} действительно сильно зависят как от корней радиального уравнения $J_1(\mu) = 0$ (изменяются с изменением μ_m в пределах одной системы), так и от вида контактирующих материалов (различны для одинаковых μ_m в разных системах).

На рис. 1 представлены графики изменения температуры в плоскости контакта на поверхности цилиндров для обеих систем. На нем же приведены величины температуры в стационарном состоянии при аналогичных условиях нагрева и теплоотдачи, рассчитанные по результатам [9]. Как следует из графиков, результаты расчетов (уровень выхода на стационарный режим) согласуются с удовлетворительной степенью точности.

Почти совпадающие кривые изменения температуры на рис. 1 могут привести к выводу о том, что при одинаковых условиях теплообмена распределение температурного поля в различных системах находится в слабой зависимости от их ТФХ. Но это не совсем так. На рис. 2 приведено продольное распределение температуры на поверхности соприкасающихся цилиндров и вдоль их центральной оси в состоянии, близком к стационарному. На поверхности максимум смещен от границы раздела (плоскости симметрии систем) в сторону материала с меньшим коэффициентом температуропроводности *a* (титана или циркония). На центральной оси сразу же за плоскостью контакта температура быстро падает в этом же направлении. Эти эффекты характерны для обеих систем, но в случае меди и титана они выражены гораздо ярче. Можно отметить также незначительное изменение температуры от поверхности к центру для медного цилиндра. Различие в характере температурных полей более отчетливо заметно на рис. 3, где приведено их пространственное распределение в центральных плоскостях цилиндров. Наблюдается снижение температуры к центральной оси и торцевым поверхностям, которое соответствует граничным условиям (3) (боковой нагрев) и (2) (теплоотдача через торцы). Но отличие в поведении температурной функции для разных материалов весьма существенно. Особенно это касается меди, величина нагрева которой практически постоянна по всему объему. Это связано с тепловыми свойствами исследуемых материалов, которые изменяются в достаточно больших пределах. Например, коэффициенты температуропроводности в системе сталь–цирконий достаточ-

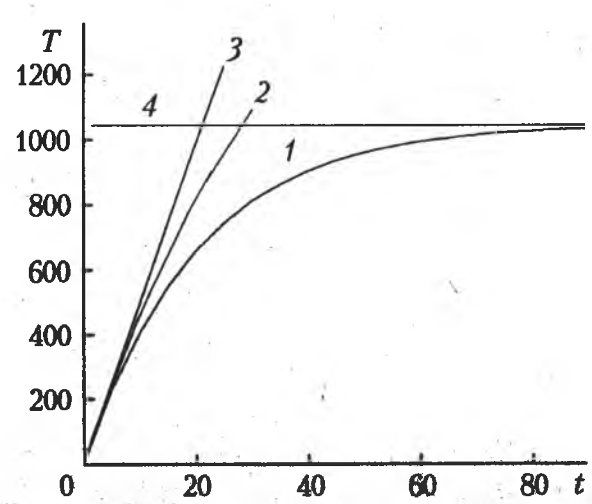

Рис. 4. Скорость изменения температуры в плоскости контакта в зависимости от величины коэффициента теплоотдачи для системы медь–титан: *1* – α = 100 Вт/(м^2·°С); *2* – 50; *3* – 5; *4* – стационарная температура, рассчитанная по результатам [9]

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ

но близки ($a_1/a_2 \approx 1.8$), а для меди и титана они отличаются более чем в десять раз ($a_1/a_2 \approx 12.6$). Этим и объясняется различный вид температурного поля на рис. 3.

Большой практический интерес представляет такой параметр, как время выхода процесса на стационарный режим. Из рис. 1 следует, что этот период весьма значителен (около одного часа). В то же время, как показывает практика, стационарное состояние достигается гораздо быстрее. Это можно объяснить тем, что при нагреве в вакууме основным механизмом теплоотвода является излучение, и в начале процесса коэффициент теплоотдачи α принимает небольшие значения в силу того, что температура нагреваемых тел незначительно отличается от температуры окружающей среды. При этом температура системы будет возрастать гораздо быстрее. На рис. 4 представлено ее изменение при различных величинах α. Видно, что при малом коэффициенте теплоотдачи, характерном для начала процесса, рабочий режим достигается буквально через несколько минут. Этот результат находится в хорошем соответствии с практическими данными.

Таким образом, полученное аналитическое решение поставленной задачи позволяет адекватно описывать пространственное распределение температурного поля и его динамику в системе ограниченных разнородных тел при постоянном коэффициенте теплоотдачи и производить достаточно точную оценку процесса нагрева с учетом изменения граничных условий.

Обозначения

R – радиус цилиндров, м; l_1, l_2 – длины цилиндров, м; Q_R – поверхностная мощность теплового потока, Вт/м^2; α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи, Вт/(м$^2\cdot$°С); a_1, a_2 – коэффициенты температуропроводности, м^2/с; λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности, Вт/(м·°С); h_1, h_2 – приведенные коэффициенты теплоотдачи, м$^{-1}$; T_1, T_2 – температуры цилиндров, °С; $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ – температуры цилиндров в области изображений, °С·м^2·с; J_0 и J_1 – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков; γ_{km} – корни трансцендентного уравнения (12); s – параметр преобразования Лапласа; t – время, с; z, r – переменные интегрирования. Индексы 1 и 2 относятся к первому и второму цилиндрам соответственно.

Литература

1. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М., 1964.
2. **Карташов Э. М.** Аналитические методы в теории теплопроводности. М., 1985.
3. **Ватсон Г. Н.** Теория бесселевых функций. М., 1949.
4. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Таблицы интегральных преобразований. Т. 1, М., 1969.
5. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М., 1961.
6. Козлов В. П. Двумерные нестационарные осесимметричные задачи теплопроводности. Минск., 1986.
7. **Мандрик П. А., Козлов В. П.**//ИФЖ. 2001. Т. 74, № 2. С. 157–163.
8. **Мандрик П. А.**//ИФЖ. 2001. Т. 74, № 5. С. 153–159.
9. **Алифанов А. В., Голуб В. М.**//ИФЖ. 2003. Т. 76, № 1. С.173-177.

РЕПОЗИТОРИЙ БГПУ