ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

2003 г. ЯНВАРЬ–ФЕВРАЛЬ ТОМ 76, № 1

УДК 536.24

А. В Алифанов, В. М. Голуб

ДВУМЕРНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ СИСТЕМЫ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРОВ, НАХОДЯЩИХСЯ В ИДЕАЛЬНОМ ТЕПЛОВОМ КОНТАКТЕ

Рассмотрена задача о равномерном стационарном боковом нагреве двух ограниченных цилиндрических тел с различными теплофизическими характеристиками (ТФХ), находящихся в идеальном тепловом контакте в области соприкосновения. Получено точное аналитическое решение данной задачи, исследованы условия энергетического баланса.

В последние годы в связи с развитием высокотемпературной теплофизики большое значение приобрели тепловые задачи с граничными условиями сопряжения. Однако их аналитическое решение, особенно в нестационарных и ограниченных случаях, связано с определенными математическими трудностями. И хотя известно большое количество таких решений [1–4], они обычно обусловлены определенными допущениями (одномерность, неограниченность или полуограниченность пространства, выбор специальной плоскости или оси). В данной работе рассмотрена задача о пространственном распределении температурного поля двух разнородных ограниченных цилиндров при их стационарном нагреве.

Имеются два цилиндра с различными ТФХ радиусом R и с длинами l_1 и l_2. Цилиндры находятся в идеальном тепловом контакте в плоскости $z = 0$ и с боковой поверхности нагреваются постоянным тепловым потоком с поверхностной мощностью Q_R. Необходимо найти распределение стационарного теплового поля в цилиндрах. На торцах происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона с коэффициентами теплоотдачи α_1 и α_2. Если принять температуру окружающей среды равной нулю, то для стационарных температур цилиндров получим уравнения

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_1}{\partial r} = 0\,, \quad -l_1 < z < 0\,; \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_2}{\partial r} = 0\,, \quad 0 < z < l_2\,, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r, -l_1)}{\partial z} = \alpha_1 T_1(r, -l_1)\,, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2(r, l_2)}{\partial z} = -\alpha_2 T_2(r, l_2)\,, \tag{2}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(R, z)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(R, z)}{\partial r} = Q_R \tag{3}$$

и условиями сопряжения

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(r, 0)}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(R, 0)}{\partial z}\,, \quad T_1(r, 0) = T_2(r, 0)\,. \tag{4}$$

Применим к задаче (1)–(4) конечное интегральное преобразование Ханкеля

$$\overline{T}_i(\mu_m, z) = \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_m}{R} r\right) T(r, z)\, dr\,, \tag{5}$$

где μ_m – корни уравнения $J_1(\mu) = 0$. Дифференциальный оператор $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_i}{\partial r}$ при этом примет вид

$$R J_0(\mu_m) \frac{\partial T_i(R, z)}{\partial r} - \left(\frac{\mu_m}{R}\right)^2 \overline{T}_i(\mu_m, z) = R J_0(\mu_m) \frac{Q_R}{\lambda_i} - \gamma_m^2 \overline{T}_i(\mu_m, z)\,, \tag{6}$$

где $\gamma_m = \mu_m / R$. В итоге от задачи (1)–(4) приходим к следующей:

Физико-технический институт НАН Беларуси, г. Минск. Поступила 26.04.2002, в окончательной редакции – 02.07.2002.

$$\frac{d^2\overline{T}_1}{dz^2} - \gamma_m^2 \overline{T}_1 = \left(-\frac{RJ_0(\mu_m)\,Q_R}{\lambda_1} \right), \quad -l_1 < z < 0\,; \quad \frac{d^2\overline{T}_2}{dz^2} - \gamma_m^2 \overline{T}_2 = \left(-\frac{RJ_0(\mu_m)\,Q_R}{\lambda_2} \right), \quad 0 < z < l_2\,, \tag{7}$$

с граничными условиями

$$\lambda_1 \frac{d\overline{T}_1(\mu_m, -l_1)}{dz} = \alpha_1 \overline{T}_1(\mu_m, -l_1)\,, \quad \lambda_2 \frac{d\overline{T}_2(\mu_m, l_2)}{dz} = -\alpha_2 \overline{T}_2(\mu_m, l_2) \tag{8}$$

и условиями сопряжения

$$\lambda_1 \frac{d\overline{T}_1(\mu_m, 0)}{dz} = \lambda_2 \frac{d\overline{T}_2(\mu_m, 0)}{dz}\,, \quad \overline{T}_1(\mu_m, 0) = \overline{T}_2(\mu_m, 0)\,. \tag{9}$$

Общими решениями уравнений (7) и (8) являются

$$\overline{T}_1(\mu_m, z) = A\,\mathrm{ch}\,\gamma_m z + B\,\mathrm{sh}\,\gamma_m z + \frac{RJ_0(\mu_m)\,Q_R}{\gamma_m^2 \lambda_1}\,, \tag{10}$$

$$\overline{T}_2(\mu_m, z) = C\,\mathrm{ch}\,\gamma_m z + D\,\mathrm{sh}\,\gamma_m z + \frac{RJ_0(\mu_m)\,Q_R}{\gamma_m^2 \lambda_2}\,. \tag{11}$$

Для определения постоянных A, B, C, D используем граничные условия (8) и условия сопряжения (9), что дает

$$A = \frac{RJ_0(\mu_m)\,Q_R}{\gamma_m^2} \left\{ \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) (\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1)(\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2) - \right.$$
$$\left. - h_2 (\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1) - h_1 (\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2) \right\} \left\{ \lambda_1 (\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1) \times \right.$$
$$\left. \times (\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2) + \lambda_2 (\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1)(\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2) \right\}^{-1}, \tag{12}$$

$$B = \frac{RJ_0(\mu_m)\,Q_R}{\gamma_m^2} \left\{ \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) (\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1)(\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2) - \right.$$
$$\left. - h_2 (\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1) - h_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2) \right\} \left\{ \lambda_1 (\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1) \times \right.$$
$$\left. \times (\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2) + \lambda_2 (\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1)(\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1) \right\}^{-1}, \tag{13}$$

$$C = \frac{RJ_0(\mu_m)\,Q_R}{\gamma_m^2} \left\{ \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) (\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1)(\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2) - \right.$$
$$\left. - h_2 (\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1) - h_1 (\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2) \right\} \left\{ \lambda_1 (\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1) \times \right.$$
$$\left. \times (\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2) + \lambda_2 (\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1)(\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2) \right\}^{-1}, \tag{14}$$

$$D = \frac{RJ_0(\mu_m)\,Q_R}{\gamma_m^2} \left\{ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right) (\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1)(\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2) - \right.$$
$$\left. - h_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1) + h_1 (\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2) \right\} \left\{ \lambda_1 (\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1) \times \right.$$
$$\left. \times (\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2) + \lambda_2 (\gamma_m\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_1 + h_1\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_1)(\gamma_m\,\mathrm{sh}\,\gamma_m l_2 + h_2\,\mathrm{ch}\,\gamma_m l_2) \right\}^{-1}, \tag{15}$$

где $h_i = \alpha_i/\lambda_i$.

Здесь необходимо отметить, что полученные результаты справедливы для всех $\mu_m > 0$, которые являются корнями уравнения $J_1(\mu) = 0$. Но функция $J_1(\mu)$ имеет нуль также и в точке $\mu = 0$. Решение задачи (1)–(4) для данного случая рассмотрим отдельно. Преобразование Ханкеля и оператор дифференцирования по r примут вид соответственно $\overline{T}_i(0, z) = \int\limits_0^R rT_i(r, z)dr$ и $\frac{d^2T_i}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT_i}{dr} = R\frac{Q_R}{\lambda_i}$. Таким образом, в случае нулевого корня от задачи (1)–(4) переходим к следующей:

$$\frac{d^2\overline{T}_1}{dz^2} = -\frac{RQ_R}{\lambda_1}, \quad -l_1 < z < 0 \; ; \quad \frac{d^2\overline{T}_2}{dz^2} = \left(-\frac{RQ_R}{\lambda_2}\right), \quad 0 < z < l_2 \, , \tag{16}$$

с граничными условиями

$$\lambda_1 \frac{d\overline{T}_1(0, -l_1)}{dz} = \alpha_1 \overline{T}_1(0, -l_1) \, , \quad \lambda_2 \frac{d\overline{T}_2(0, l_2)}{dz} = -\alpha_2 \overline{T}_2(0, l_2) \tag{17}$$

и условиями сопряжения

$$\lambda_1 \frac{d\overline{T}_1(0, 0)}{dz} = \lambda_2 \frac{d\overline{T}_2(0, 0)}{dz} \, , \quad \overline{T}_1(0, 0) = \overline{T}_2(0, 0) \, . \tag{18}$$

Общие решения уравнений (16) выглядят следующим образом:

$$\overline{T}_1(0, z) = -\frac{RQ_R}{2\lambda_1} z^2 + Ez + F \, , \quad \overline{T}_2(0, z) = -\frac{RQ_R}{2\lambda_2} z^2 + Gz + H \, . \tag{19}$$

Для определения постоянных E, F, G, H используем условия (17) и (18), что дает

$$E = RQ_R \frac{h_1 l_2 \left(1 + \frac{h_2 l_2}{2}\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} h_2 l_1 \left(1 + \frac{h_1 l_1}{2}\right)}{\lambda_1 h_1 (1 + h_2 l_2) + \lambda_2 h_2 (1 + h_1 l_1)} \, , \tag{20}$$

$$G = RQ_R \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} h_1 l_2 \left(1 + \frac{h_2 l_2}{2}\right) - h_2 l_1 \left(1 + \frac{h_1 l_1}{2}\right)}{\lambda_1 h_1 (1 + h_2 l_2) + \lambda_2 h_2 (1 + h_1 l_1)} \, , \tag{21}$$

$$F = H = RQ_R \frac{l_1 (1 + h_2 l_2) \left(1 + \frac{h_1 l_1}{2}\right) + l_2 (1 + h_1 l_1) \left(1 + \frac{h_2 l_2}{2}\right)}{\lambda_1 h_1 (1 + h_2 l_2) + \lambda_2 h_2 (1 + h_1 l_1)} \, . \tag{22}$$

Теперь с учетом (10)–(15), (19)–(22) и с помощью обратного конечного преобразования Ханкеля $T_i(r, z) = \frac{2}{R^2}\left(\overline{T}_i(0, z) + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_m \frac{r}{R}\right)}{J_0^2(\mu_m)} \overline{T}_i(\mu_m, z)\right)$ получаем окончательное решение исходной задачи (1)–(4)

$$T_1(r, z) =$$

$$= \frac{2Q_R}{R}\left(\frac{l_1 (1 + h_2 l_2)\left(1 + \frac{h_1 l_1}{2}\right) + l_2 (1 + h_1 l_1)\left(1 + \frac{h_2 l_2}{2}\right) + \left(h_1 l_2 \left(1 + \frac{h_2 l_2}{2}\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} h_2 l_1 \left(1 + \frac{h_1 l_1}{2}\right)\right) z}{\lambda_1 h_1 (1 + h_2 l_2) + \lambda_2 h_2 (1 + h_1 l_1)} - \right.$$

$$- \frac{z^2}{2\lambda_1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_m \frac{r}{R}\right)}{\gamma_m^2 J_0(\mu_m)} \left[\left[\left\langle \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) (\gamma_m \operatorname{ch} \gamma_m l_1 + h_1 \operatorname{sh} \gamma_m l_1)(\gamma_m \operatorname{sh} \gamma_m l_2 + h_2 \operatorname{ch} \gamma_m l_2) - \right.\right.\right.$$

$$\left. - h_2 (\gamma_m \operatorname{ch} \gamma_m l_1 + h_1 \operatorname{sh} \gamma_m l_1) - h_1 (\gamma_m \operatorname{ch} \gamma_m l_2 + h_2 \operatorname{sh} \gamma_m l_2) \right\rangle \operatorname{ch} \gamma_m z +$$

$$+\left\langle\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)(\gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m l_1 + h_1 \operatorname{ch}\gamma_m l_1)(\gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m l_2 + h_2 \operatorname{ch}\gamma_m l_2) -\right.$$

$$\left.- h_2(\gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m l_1 + h_1 \operatorname{ch}\gamma_m l_1) + h_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(\gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m l_2 + h_2 \operatorname{ch}\gamma_m l_2)\right\rangle \operatorname{sh}\gamma_m z\Bigg]\times$$

$$\times\Big[\lambda_1(\gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m l_1 + h_1 \operatorname{ch}\gamma_m l_1)(\gamma_m \operatorname{ch}\gamma_m l_2 + h_2 \operatorname{sh}\gamma_m l_2) +$$

$$+\lambda_2(\gamma_m \operatorname{ch}\gamma_m l_1 + h_1 \operatorname{sh}\gamma_m l_1)(\gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m l_2 + h_2 \operatorname{ch}\gamma_m l_2)\Big]^{-1} + \frac{1}{\lambda_1}\Bigg|\Bigg), \quad -l_1 \le z \le 0\,; \tag{23}$$

$$T_2(r, z) =$$

$$= \frac{2Q_R}{R}\left(\frac{l_1(1+h_2l_2)\left(1+\frac{h_1l_1}{2}\right) + l_2(1+h_1l_1)\left(1+\frac{h_2l_2}{2}\right) + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}h_1l_2\left(1+\frac{h_2l_2}{2}\right) - h_2l_1\left(1+\frac{h_1l_1}{2}\right)\right)z}{\lambda_1h_1(1+h_2l_2)+\lambda_2h_2(1+h_1l_1)} -\right.$$

$$-\frac{z^2}{2\lambda_2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_m\frac{r}{R}\right)}{\gamma_m^2 J_0(\mu_m)}\Bigg[\Bigg[\left\langle\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)(\gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m l_1 + h_1 \operatorname{ch}\gamma_m l_1)(\gamma_m \operatorname{ch}\gamma_m l_2 + h_2 \operatorname{sh}\gamma_m l_2) -\right.$$

$$\left.- h_2(\gamma_m \operatorname{ch}\gamma_m l_1 + h_1 \operatorname{sh}\gamma_m l_1) - h_1(\gamma_m \operatorname{ch}\gamma_m l_2 + h_2 \operatorname{sh}\gamma_m l_2)\right\rangle \operatorname{ch}\gamma_m z +$$

$$+\left\langle\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)(\gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m l_1 + h_1 \operatorname{ch}\gamma_m l_1)(\gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m l_2 + h_2 \operatorname{ch}\gamma_m l_2) -\right.$$

$$\left.- h_2\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m l_1 + h_1 \operatorname{ch}\gamma_m l_1) + h_1(\gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m l_2 + h_2 \operatorname{ch}\gamma_m l_2)\right\rangle \operatorname{sh}\gamma_m\Bigg]\times$$

$$\times\Big[\lambda_1(\gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m l_1 + h_1 \operatorname{ch}\gamma_m l_1)(\gamma_m \operatorname{ch}\gamma_m l_2 + h_2 \operatorname{sh}\gamma_m l_2) +$$

$$+\lambda_2(\gamma_m \operatorname{ch}\gamma_m l_1 + h_1 \operatorname{sh}\gamma_m l_1)(\gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m l_2 + h_2 \operatorname{ch}\gamma_m l_2)\Big]^{-1} + \frac{1}{\lambda_2}\Bigg|\Bigg), \quad 0 \le z \le l_2\,. \tag{24}$$

Полученное решение имеет довольно сложный вид. Чтобы убедиться в точности полученного результата, проанализируем его. Если в уравнениях (23) и (24) положить $l_1 = l_2 = l$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $h_1 = h_2 = h$, то для T_1 и T_2 получим

$$T_1 = T_2 = T = \frac{2Q_R}{\lambda R}\left(\frac{l\left(1+\frac{hl}{2}\right)}{h} - \frac{z^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_m\frac{r}{R}\right)}{\gamma_m^2 J_0(\mu_m)}\left(1-\frac{h \operatorname{ch}\gamma_m z}{\gamma_m \operatorname{sh}\gamma_m l + h \operatorname{ch}\gamma_m l}\right)\right). \tag{25}$$

Выражение (25) полностью совпадает с уравнением, определяющим стационарную температуру однородного цилиндра, расположенного симметрично относительно плоскости $z = 0$, нагреваемого с боковой поверхности постоянным тепловым потоком с плотностью Q_R и имеющего на торцах одинаковые коэффициенты теплоотдачи.

Рассмотрим теперь выполнение условия стационарности. Очевидно, что в стационарном состоянии суммарное количество тепла, отдаваемого через торцы цилиндров, должно быть равным количеству тепла, получаемого через боковую поверхность

$$2Q_R(l_1 + l_2) = R(\alpha_1 T_1(r, -l_1) + \alpha_2 T_2(r, l_2))\,. \tag{26}$$

Положим теперь в (23) и (24) $z = -l_1$ и $z = l_2$ соответственно и рассмотрим слагаемые перед знаками суммы (отвечающие нулевому корню уравнения $J_1(\mu) = 0$), подставив их в правую часть (26). Ввиду громоздкости арифметических выкладок, приведем только их заключительный этап

$$R\left(\alpha_1 T_1(r, -l_1) + \alpha_2 T_2(r, l_2)\right) = 2Q_R \frac{(l_1 + l_2)\left(\lambda_1 h_1 (1 + h_2 l_2) + \lambda_2 h_2 (1 + h_1 l_1)\right)}{\lambda_1 h_1 (1 + h_2 l_2) + \lambda_2 h_2 (1 + h_1 l_1)} = 2Q_R (l_1 + l_2) . \quad (27)$$

Полученный результат совпадает с левой частью (26), что соответствует выполнению условия энергетического баланса. Для определения величины вклада в тепловой поток слагаемых, находящихся под знаком суммы в уравнениях (23) и (24), необходимо проинтегрировать их по r с учетом соответствующих коэффициентов теплоотдачи. Каждый член суммы будет представлять собой произведение некоторой постоянной на интеграл вида $\int_0^R rJ_0\left(\mu_m \frac{r}{R}\right)dr$. Обозначив $z = r/R$, с учетом [3, 5] формулы $\int_0^1 zJ_0(\mu_m z)dz = \frac{1}{\mu_m} J_1(\mu_m)$ получаем $\int_0^R rJ_0\left(\mu_m \frac{r}{R}\right)dr = 0$, поскольку μ_m являются корнями уравнения $J_1(\mu) = 0$). Таким образом, тепловой поток с торцов цилиндров полностью определяется слагаемыми, находящимися перед знаками суммы в (23) и (24). Как показывают численные расчеты, слагаемые под знаками суммы дают незначительный вклад в общую температуру и играют роль корректирующих членов, от которых зависит распределение температуры по радиусу. В случаях, когда необходимо знание лишь абсолютной величины нагрева и не требуется высокой точности нахождения пространственного распределения температурного поля (например, при диффузионной сварке малогабаритных изделий), достаточным будет использование слагаемых перед знаками суммы в (23) и (24), которые имеют к тому же относительно простой вид (полиномы второй степени).

Обозначения

R – радиус цилиндров; l_1, l_2 – длины цилиндров; λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности; α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи; h_1, h_2 – приведенные коэффициенты теплоотдачи; Q_R – поверхностная мощность теплового потока; T_1, T_2 – температуры цилиндров; $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ – температуры цилиндров в области изображений преобразования Ханкеля; J_0, J_1 – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков; μ_m, γ_m – параметры конечного преобразования Ханкеля; z, r – переменные интегрирования.

Литература

1. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М., 1961.
2. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М., 1964.
3. **Карташов Э. М.** Аналитические методы в теории теплопроводности. М., 1985.
4. **Козлов В. П.** Двумерные нестационарные осесимметричные задачи теплопроводности. Минск., 1986.
5. **Ватсон Г. Н.** Теория бесселевых функций. М., 1949.