Предисловие

В настоящее время образовательный процесс в вузах ориентирован на активное, управляемое самообучение каждого студента, учитывающее его потенциал и уровень базовой подготовки. Такой путь развития высшего образования предполагает соответствующее методическое обеспечение учебного процесса, включая разработку разнообразных форм самостоятельной работы и методов ее контроля.

Основная цель пособия – активизировать самостоятельную работу студентов, учитывая разницу в уровне их начальной математической подготовки, помочь студентам разобраться в решениях типовых задач, научить их самостоятельно решать задачи начального и среднего уровней сложности с помощью приведенных подсказок и алгоритмов, а также проверить их знания посредством математических диктантов и контрольных работ.

Пособие охватывает все основные разделы двухгодичного курса математики первой ступени высшего образования. **Часть 1** включает два раздела: введение в анализ и дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Структура. Каждый раздел начинается подробными решениями 20-30 типовых задач по соответствующей теме. Затем идут тесты для самоконтроля, которые (после ознакомления с решениями задач) позволяют приобрести базовые теоретические и практические навыки решения задач. В этих тестах предлагается решить простые задачи, опираясь на приведенные теоретические подсказки и вычислительные алгоритмы. В каждом задании приводятся варианты ответов и таблица правильных ответов. Этот первый уровень контрольных заданий доступен даже студентам вечерней, заочной и дистанционной форм обучения.

Далее следуют математические диктанты, которые можно использовать для проведения самостоятельных работ-«летучек» во время аудиторных занятий. Поскольку все диктанты снабжены ответами, студенты могут с их помощью самостоятельно проверить свою технику вычислений. Наборы задач и вопросов из математических диктантов относятся к среднему уровню сложности, они рассчитаны на рядового студента дневной формы обучения или «продвинутого» студента иной формы обучения. При этом одна часть заданий из диктантов направлена на выявление формальных (технических) навыков расчетов, другая — на проверку понятийного уровня (использование теоретических знаний), третья — на выявление творческих возможностей студента. Таким образом, контроль знаний с помощью математических диктантов позволяет установить предварительный индивидуальный рейтинг каждого студента.

В дальнейшем предполагается издание электронного приложения в виде CD, содержащего пакеты тематических контрольных заданий (10–15 вариантов) трех уровней сложности (начальный, базовый, повышенный) для проведения зачетных и аттестационных работ по практике. Каждый вариант включают 8–12 заданий, позволяющих уточнить индивидуальный рейтинг. Их можно использовать также в качестве индивидуальных домашних заданий при завершении изучения соответствующего раздела высшей математики.

Рекомендуется: студентам всех форм обучения первой ступени высшего образования, а также преподавателям математики.

Раздел 1. Введение в анализ

Центральными понятиями в теме являются понятия предела переменной величины, предела функции и понятие непрерывной функции.

Задачи с решениями

Использование определения предела числовой последовательности для доказательства утверждений, связанных с пределами

Задача 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-1}{5n+4}=\dfrac{2}{5}$.

Решение

Шаг 1. По определению, число $\dfrac{2}{5}$ будет пределом последовательности с общим членом $x_n=\dfrac{2n-1}{5n+4}$ $n\in\mathbb{N}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется натуральное число n_ε, такое, что для всех членов последовательности x_n, номера которых $n>n_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$\left|\frac{2n-1}{5n+4}-\frac{2}{5}\right|<\varepsilon.$$

Шаг 2. Решим это неравенство относительно *n*:

$$\left|\frac{10n-5-10n-8}{5\ \ 5n+4}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-13}{5\ \ 5n+4}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{13}{5\ \ 5n+4}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{13-20\varepsilon}{25\varepsilon}.$$

Если $\varepsilon<\dfrac{13}{20}$, то $\dfrac{13-20\varepsilon}{25\varepsilon}>0$, и в качестве n_ε можно взять целую часть числа $\dfrac{13-20\varepsilon}{25\varepsilon}$, то есть $n_\varepsilon=\left[\dfrac{13-20\varepsilon}{25\varepsilon}\right]$. Если $\varepsilon\geq\dfrac{13}{20}$, то $\dfrac{13-20\varepsilon}{25\varepsilon}\leq 0$ и требуемое неравенство выполняется для любого значения $n\in\mathbb{N}$.

Таким образом, для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует натуральное число

$$n_\varepsilon = \begin{cases} \left[\dfrac{13-20\varepsilon}{25\varepsilon}\right], & \text{если } \varepsilon < \dfrac{13}{20}, \\ 1, & \text{если } \varepsilon \geq \dfrac{13}{20}, \end{cases}$$

такое, что все члены последовательности $x_n = \dfrac{2n-1}{5n+4}$, номера которых $n > n_\varepsilon$, удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{2n-1}{5n+4} - \frac{2}{5}\right| < \varepsilon.$$

По определению это означает, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{5n+4} = \dfrac{2}{5}$.

Задача 2. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{n+3}{2n^3+1}$ являтся бесконечно малой.

Решение

Шаг 1. Согласно определению, последовательность $x_n = \dfrac{n+3}{2n^3+1}$ будет бесконечно малой, если для любого положительного числа ε найдется натуральное число n_ε такое, что все члены последовательности x_n с номерами $n > n_\varepsilon$, удовлетворяют неравенству $\left|\dfrac{n+3}{2n^3+1}\right| < \varepsilon$.

Шаг 2. Определим, начиная с какого значения n выполняется это неравенство.

Так как $\dfrac{n+3}{2n^3+1} < \dfrac{n+3}{2n^3} < \dfrac{4n}{2n^3} = \dfrac{2}{n^2}$,

то из условия $\dfrac{2}{n^2} < \varepsilon$ тем более будет следовать, что $\dfrac{n+3}{2n^3+1} < \varepsilon$. Поскольку $\dfrac{2}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$, то $n_\varepsilon = \left[\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}\right]$. Итак, если $n > \left[\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}\right]$, то $\dfrac{n+3}{2n^3+1} < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+3}{2n^3+1} = 0$, что соответствует определению бесконечно малой последовательности.

Задача 3. Показать, что последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{3^{n+1}}{2}$ является бесконечно большой.

Решение

Шаг 1. Последовательность $x_n = \dfrac{3^{n+1}}{2}$ является бесконечно большой, если для любого сколь угодно большого положительного числа *E* найдется такое натуральное число n_E, что для всех членов последовательности x_n с номерами $n > n_E$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{3^{n+1}}{2}\right| > E.$$

Шаг 2. Определим, для каких *n* справедливо последнее неравенство. Имеем

$$\frac{3^{n+1}}{2} > E \Leftrightarrow 3^{n+1} > 2E \Leftrightarrow n+1 > \log_3\ 2E\ \Leftrightarrow n > \log_3\ 2E\ -1.$$

Таким образом, для любого сколь угодно большого положительного числа $E > \dfrac{9}{2}$ найдется натуральное число $n_E = \left[\log_3\ 2E\ -1\right]$ такое, что для всех членов последовательности x_n с номерами $n > n_E$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{3^{n+1}}{2}\right| > E$, то есть последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{3^{n+1}}{2}s$ является бесконечно большой.

Техника вычисления пределов числовых последовательностей

Задача 4. Вычислить $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3+n^2-3}{7n^3-2n^2+4}$.

Решение

Шаг 1. При $n \to +\infty$ числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают, поэтому имеет место неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Шаг 2. В данном случае общий член последовательности представляет собой дробно-рациональную функцию натурального аргумента *n*. Для таких функций неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. можно раскрыть, если разделить числитель и знаменатель дроби на n^k, где k — наибольший из показателей степеней n, входящих в данное выражение. В данном примере разделим числитель и знаменатель дроби на n^3.

Получим

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^3+n^2-3}{7n^3-2n^2+4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5+\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^3}}{7-\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^3}}=\frac{5+0-0}{7-0+0}=\frac{5}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{5}{7}$.

Задача 5. Вычислить $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n-1)!+3n!}{(n+1)\cdot(n-1)!-(n-2)!}$.

Решение

Шаг 1. Для того, чтобы избавиться от факториалов, входящих в заданное выражение, выразим их через $(n-2)!$, то есть через факториал меньшего из чисел.

Имеем

$$A=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)!+3n!}{(n+1)(n-1)!-(n-2)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-2)!\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)!(n-1)n}{(n+1)(n-2)!(n-1)-(n-2)!}$$

Шаг 2. Разделив числитель и знаменатель на $(n-2)!$, получим предел дробно-рациональной функции:

$$A=\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1+3(n-1)\cdot n}{(n+1)(n-1)-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-2n-1}{n^2-2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3-\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{2}{n^2}}=\frac{3-0-0}{1-0}=3.$$

Ответ: 3.

Задача 6. Вычислить предел иррациональной последовательности

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^3-2}+5n^2}{\sqrt{4n^4+5}-\sqrt[5]{n^2+2}}.$$

Решение

В этом случае вычисление предела производится по тому же правилу, что и при вычислении предела дробно-рациональной функции.

Шаг 1. Находим старшие степени числителя и знаменателя: это n^2.

Шаг 2. Разделив числитель и знаменатель на n^2, получим

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^3-2}+5n^2}{\sqrt{4n^4+5}-\sqrt[5]{n^2+2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{8n^3-2}}{n^2}+5}{\frac{\sqrt{4n^4+5}}{n^2}-\frac{\sqrt[5]{n^2+2}}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{8}{n^3}-\frac{2}{n^6}}+5}{\sqrt{4+\frac{5}{n^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{n^8}+\frac{2}{n^{10}}}}=$$

$$=\frac{0+5}{2-0}=\frac{5}{2}.$$

Ответ: $\frac{5}{2}$.

Задача 7. Вычислить $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6^{n+1}-5^{n+2}}{2\cdot 6^n-7\cdot 3^{n-2}}$.

Решение

Шаг 1. Каждая из последовательностей $a_n=6^{n+1}$, $b_n=5^{n+2}$, $c_n=3^{n-2}$ при $n\to+\infty$ является бесконечно большой последовательностью. Скорость стремления к $+\infty$ будет тем больше, чем больше основание степени. Таким образом, среди последовательностей a_n, b_n, c_n последовательность a_n стремится к $+\infty$ «с наибольшей скоростью».

Шаг 2. Разделим числитель и знаменатель на 6^n, тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{6^{n+1}-5^{n+2}}{2\cdot 6^n-7\cdot 3^{n-2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{6^n\cdot 6}{6^n}-\frac{5^n\cdot 5^2}{6^n}}{\frac{2\cdot 6^n}{6^n}-\frac{7\cdot 3^n\cdot 3^{-2}}{6^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{6-\left(\frac{5}{6}\right)^n\cdot 5^2}{2-\frac{7}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{6-0}{2-0}=3.$$

Ответ: 3.

Задача 8. Вычислить $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2n^2+4n-1}-\sqrt{2n^2+3n+2}$.

Решение

Шаг 1. В этом случае при $n\to+\infty$ получаем неопределенность вида (∞ - ∞), которую можно привести к неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ путем умножения и деления на выражение, сопряженное данному.

Шаг 2. Таким образом,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n^2+4n-1}-\sqrt{2n^2+3n+2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n^2+4n-1}-\sqrt{2n^2+3n+2} \quad \sqrt{2n^2+4n-1}+\sqrt{2n^2+3n+2}}{\sqrt{2n^2+4n-1}+\sqrt{2n^2+3n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+4n-1-2n^2-3n-2}{\sqrt{2n^2+4n-1}+\sqrt{2n^2+3n+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-3}{\sqrt{2n^2+4n-1}+\sqrt{2n^2+3n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{n}}{\sqrt{2+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 9. Вычислить $\lim\limits_{n\to+\infty} n+\sqrt[3]{2+n-n^3}$.

Решение

Также, как и в предыдущем задании, имеем неопределенность вида (∞ - ∞). Умножая и деля данное выражение на неполный квадрат разности, получим

$$\lim_{n\to+\infty} n+\sqrt[3]{2+n-n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+\sqrt[3]{2+n-n^3} \left(n^2-n\sqrt[3]{2+n-n^3} + \sqrt[3]{2+n-n^3}^{\,2}\right)}{n^2-n\sqrt[3]{2+n-n^3} + \sqrt[3]{2+n-n^3}^{\,2}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2+n-n^3}{n^2-n\sqrt[3]{2+n-n^3} + \sqrt[3]{2+n-n^3}^{\,2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n^2-n\sqrt[3]{2+n-n^3} + \sqrt[3]{2+n-n^3}^{\,2}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1-\sqrt[3]{\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^2}-1}+\left(\sqrt[3]{\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^2}-1}\right)^2} = \frac{0}{1+1+1} = 0.$$

Ответ: 0.

Задача 10. Вычислить предел показательно-степенной числовой последовательности

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n^2-n+3}{4n^2+2n-1}\right)^{n+2}.$$

Решение

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2-n+3}{4n^2+2n-1}=1$, а $\lim\limits_{n\to+\infty}\ n+2\ =+\infty$, то имеем неопределенность вида 1^∞. Для раскрытия этой неопределенности нужно воспользоваться замечательным пределом:

$$\lim_{n\to+\infty}\ 1+\alpha_n\ ^{\frac{k}{\alpha_n}}=e^k,$$

где α_n — бесконечно малая последовательность. Поэтому алгоритм решения этой задачи состоит из трех шагов.

Шаг 1. Числовую последовательность $\frac{4n^2-n+3}{4n^2+2n-1}$ представить в виде $1+\alpha_n$, где α_n — бесконечно малая последовательность;

Шаг 2. В показателе степени отделить сомножитель вида $\frac{1}{\alpha_n}$;

Шаг 3. На основании формулы $\lim\limits_{n\to+\infty}\ 1+\alpha_n\ ^{k/\alpha_n}=e^k$ вычислить заданный предел.

Таким образом, имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n^2-n+3}{4n^2+2n-1}\right)^{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4-3n}{4n^2+2n-1}\right)^{n+2}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{4-3n}{4n^2+2n-1}\right)^{\frac{4n^2+2n-1}{4-3n}}\right)^{\frac{4-3n}{4n^2+2n-1}\cdot\ n+2}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{4-3n\ \ n+2}{4n^2+2n-1}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3n^2-2n+8}{4n^2+2n-1}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3-\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}}{4+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}=e^{-3/4}.$$

Ответ: $e^{-3/4}$.

Задача 11. Вычислить $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+6}{2n^2-3n+7}\right)^{-n^2}$.

Решение

Также, как и в предыдущем задании, имеем неопределенность вида 1^{∞}. Раскрываем эту неопределенность, пользуясь алгоритмом, полученным в решении задачи 10.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+n+6}{2n^2-3n+7}\right)^{-n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4n-1}{2n^2-3n+7}\right)^{-n^2}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{4n-1}{2n^2-3n+7}\right)^{\frac{2n^2-3n+7}{4n-1}}\right)^{\frac{4n-1}{2n^2-3n+7}\cdot\left(-n^2\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-4n^3}{2n^2-3n+7}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-4}{\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{7}{n^3}}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=0.$$

Ответ: 0.

Вычисление пределов функций

Задача 12. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}$.

Решение

Шаг 1. При подстановке вместо переменной x её предельного значения 3 получаем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Шаг 2. Чтобы избавиться от такой неопределённости, представим квадратные трёхчлены числителя и знаменателя в виде произведения линейных множителей по формуле: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c.

$$\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to3}\frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{x+2}=\frac{9}{5}.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}=\frac{9}{5}$.

Ответ: $\frac{9}{5}$.

Задача 13. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-4}{3x^2-2x+5}$.

Решение

Шаг 1. При подстановке вместо переменной *x* её предельного значения получаем неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Шаг 2. Избавиться от такого вида неопределенности можно вынесением за скобки в числителе и знаменателе дроби старшей степени переменной:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-4}{3x^2-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{2}{3}.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-4}{3x^2-2x+5}=\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Задача 14. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}}\frac{20x^2-41x+20}{\sqrt{10x}-\sqrt{5x+4}}$.

Решение

Шаг 1. При подстановке вместо переменной *x* её предельного значения получаем неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Шаг 2. Разложим на множители квадратный трехчлен $20x^2-41x+20$.

$$x_{1,2}=\frac{41\pm\sqrt{1681-1600}}{40}=\frac{41\pm 9}{40}$$

$$x_1=\frac{5}{4};\ x_2=\frac{4}{5}\Rightarrow\ 20x^2-41x+20=20\cdot\left(x-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{5}\right)$$

Шаг 3. Домножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\lim_{x\to\frac{4}{5}}\frac{20\cdot\left(x-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{5}\right)}{\sqrt{10x}-\sqrt{5x+4}}=\lim_{x\to\frac{4}{5}}\frac{20\cdot\left(x-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{5}\right)\cdot\ \sqrt{10x}+\sqrt{5x+4}}{\sqrt{10x}-\sqrt{5x+4}\ \cdot\ \sqrt{10x}+\sqrt{5x+4}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{4}{5}}\frac{20\cdot\left(x-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{5}\right)\cdot\ \sqrt{10x}+\sqrt{5x+4}}{10x-(5x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{4}{5}}\frac{20\cdot\left(x-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{5}\right)\cdot\ \sqrt{10x}+\sqrt{5x+4}}{5x-4}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{4}{5}}\frac{20\cdot\left(x-\frac{5}{4}\right)\cdot\ \sqrt{10x}+\sqrt{5x+4}}{5}=\lim_{x\to\frac{4}{5}}4\cdot\left(x-\frac{5}{4}\right)\cdot\ \sqrt{10x}+\sqrt{5x+4}\ =$$

$$=\lim_{x\to\frac{4}{5}}\ 4x-5\ \cdot\ \sqrt{10x}+\sqrt{5x+4}\ =\left(4\cdot\frac{4}{5}-5\right)\cdot\left(\sqrt{10\cdot\frac{4}{5}}+\sqrt{5\cdot\frac{4}{5}+4}\right)=$$

$$=\left(4\cdot\frac{4}{5}-5\right)\cdot\left(\sqrt{10\cdot\frac{4}{5}}+\sqrt{5\cdot\frac{4}{5}+4}\right)=$$

$$=-\frac{9}{5}\cdot\ \sqrt{8}+\sqrt{8}\ =-\frac{9}{5}\cdot2\sqrt{8}=-\frac{9}{5}\cdot4\sqrt{2}=-\frac{36\sqrt{2}}{5}$$

Итак, $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}}\dfrac{20x^2-41x+20}{\sqrt{10x}-\sqrt{5x+4}}=-\dfrac{36\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $-\dfrac{36\sqrt{2}}{5}$.

Задача 15. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos9x}{1-\cos4x}$.

Решение

Шаг 1. При подстановке вместо переменной x её предельного значения получаем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Шаг 2. Используя формулы преобразования разности тригонометрических функций в произведение и первый замечательный предел, получим:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(5x)-\cos(9x)}{1-\cos(4x)}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\left(\frac{5x+9x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{5x-9x}{2}\right)}{2\sin^2(2x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\;7x\;\cdot\sin\;-2x}{2\sin^2(2x)}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin\;7x\;\cdot\sin\;2x}{2\sin^2(2x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin\;7x}{\sin(2x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin\;7x}{7x}\cdot7x}{\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin\;7x}{7x}\cdot7}{\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot2}=\frac{7\cdot1}{2\cdot1}=\frac{7}{2}.$$

Итак, $\lim_{x\to0}\frac{\cos(5x)-\cos(9x)}{1-\cos(4x)}=\frac{7}{2}$.

Ответ: $\frac{7}{2}$.

Задача 16. Вычислить предел функции $\lim_{x\to0}\frac{x\sin2x}{tg^2 4x}$.

Решение

Шаг 1. При подстановке вместо переменной x её предельного значения получаем неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Шаг 2. В данном случае для освобождения от неопределённости будем использовать первый замечательный предел и одно из его очевидных следствий:

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;\ \lim_{\alpha\to0}\frac{tg\alpha}{\alpha}=1.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin2x}{tg^2 4x}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin2x}{tg4x\cdot tg4x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{4}\cdot\frac{4x}{tg4x}\cdot\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{4x}{tg4x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

Итак, $\lim_{x\to0}\frac{x\sin2x}{tg^2 4x}=\frac{1}{8}$.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Задача 17. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-4}{5x+4}\right)^{9x}$.

Решение

Шаг 1. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-4}{5x+4}=1$, а $\lim\limits_{x\to+\infty}9x=+\infty$, то имеем неопределенность вида $\left(1^{\infty}\right)$.

Шаг 2. Для раскрытия этой неопределенности воспользуемся вторым замечательным пределом: $\lim\limits_{\alpha(x)\to0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-4}{5x+4}\right)^{9x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(5x+4)-8}{5x+4}\right)^{9x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{5x+4}\right)^{9x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{5x+4}\right)^{\left(-\frac{5x+4}{8}\right)\cdot\left(-\frac{8}{5x+4}\right)\cdot9x}=\lim_{x\to\infty}e^{\left(-\frac{8}{5x+4}\right)\cdot9x}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{72x}{5x+4}}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{72}{5+\frac{4}{x}}}=e^{-\frac{72}{5}}.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-4}{5x+4}\right)^{9x}=e^{-\frac{72}{5}}$.

Ответ: $e^{-\frac{72}{5}}$.

Нахождение главной части функции. Вычисление пределов функций с помощью эквивалентных функций

Задача 18. Указать главную часть функции $f(x)=\sin3x\cdot\ln\left(1+x^2-x^3\right)$ вида Cx^k при $x\to0$.

Решение

Главную часть функции степенного вида Cx^k при $x\to0$ можно получить на основании замечательных пределов. В нашем случае имеем

$$f(x)=\sin3x\cdot\ln\left(1+x^2-x^3\right)\underset{x\to0}{\sim}3x\cdot\left(x^2-x^3\right)=3x^3(1-x)\underset{x\to0}{\sim}3x^3.$$

Задача 19. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x-x^2}-1\right)\cdot\mathrm{tg}^2 5x}{\arcsin4x\cdot\mathrm{arctg}\left(3x^2\right)}$ с помощью эквивалентных функций.

Решение

Шаг 1. Найдем главную часть вида Cx^k при $x \to 0$ числителя и знаменателя данной дроби. Имеем

$$\left(\sqrt{1+x-x^2}-1\right)\cdot \operatorname{tg}^2 5x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\left(x-x^2\right)\cdot\left(5x\right)^2=\frac{25}{2}x^3\left(1-x\right)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{25}{2}x^3,$$

$$\arcsin 4x\cdot \operatorname{arctg}\left(3x^2\right)\underset{x\to 0}{\sim} 4x\cdot 3x^2=12x^3.$$

Шаг 2. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x-x^2}-1\right)\cdot \operatorname{tg}^2 5x}{\arcsin 4x\cdot \operatorname{arctg}\left(3x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{25}{2}x^3}{12x^3}=\frac{25}{24}.$$

Ответ: $\dfrac{25}{24}$.

Задача 20. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+2\operatorname{arctg}3x^2}{\ln\left(1+3x+5\operatorname{tg}^2 x\right)}$.

Решение

Шаг 1. Найдем главную часть вида Cx^k числителя и знаменателя при $x \to 0$

$$\sin 2x \underset{x\to 0}{\sim} 2x,\quad 2\operatorname{arctg}3x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 2\cdot 3x^2=6x^2.$$

Поскольку сумма бесконечно малых в точке функций эквивалентна бесконечно малой наиболее низкого порядка, то

$$\sin 2x+2\operatorname{arctg}3x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 2x.$$

$$\ln\left(1+3x+5\operatorname{tg}^2 x\right)\underset{x\to 0}{\sim} 3x+5\operatorname{tg}^2 x \underset{x\to 0}{\sim} 3x.$$

Шаг 2. Таким образом, искомый предел равен

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+2\operatorname{arctg}3x^2}{\ln\left(1+3x+5\operatorname{tg}^2 x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

Исследование непрерывности функции

Задача 21. Исследовать непрерывность функции $f(x)=\dfrac{5}{16^{\frac{1}{x}}-2}$ точках $x_1=0$ и $x_2=4$. Нарисовать схематический график функции $f(x)$.

Решение

Шаг 1. Областью определения функции $f(x)$ является объединение интервалов $(-\infty;0)\cup(0;4)\cup(4;+\infty)$.

Шаг 2. Найдем односторонние пределы функции в точке $x_1=0$:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{5}{16^{\frac{1}{x}}-2}=-\frac{5}{2};\ \lim_{x\to 0+0}\frac{5}{16^{\frac{1}{x}}-2}=0.$$

Шаг 3. Так как эти пределы конечны и не равны друг другу $-\frac{5}{2}\neq 0$, то в точке $x_1=0$ функция имеет разрыв первого рода. Тогда $0-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$ — скачок функции в точке x_1. Так как при $x_1=0$ функция не определена, то график функции не пересекает ось Oy.

Шаг 4. Найдем односторонние пределы функции в точке $x_2=4$:

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{5}{16^{\frac{1}{x}}-2}=+\infty;\ \lim_{x\to 4+0}\frac{5}{16^{\frac{1}{x}}-2}=-\infty.$$

Здесь мы видим, что в точке $x_2=4$ оба односторонних предела являются бесконечными, значит x_2 – точка разрыва второго рода.

Прямая $x_2=4$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Шаг 5. Поскольку

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{5}{16^{\frac{1}{x}}-2}=-5 \text{ и } \lim_{x\to +\infty}\frac{5}{16^{\frac{1}{x}}-2}=-5$$

то прямая $y=-5$ является горизонтальной асимптотой графика функции.

Шаг 6. График функции $y=\dfrac{5}{16^{\frac{1}{x}}-2}$ представлен на **рис.1.1**:

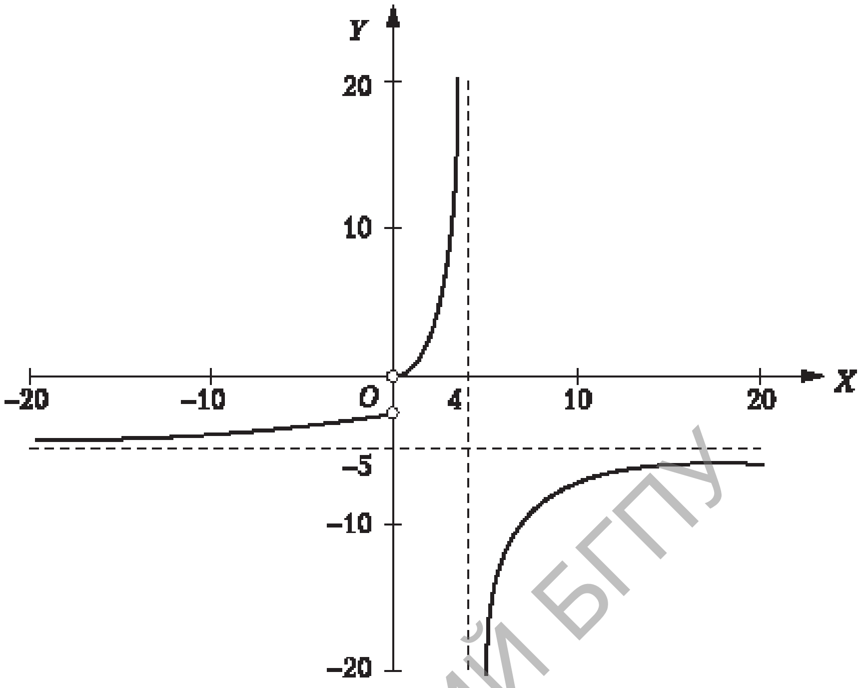

Рис. 1.1

Задача 22. В точках $x_1=0$ и $x_2=4$ для функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{4}(x+4), & \text{если } -\infty<x<0,\\ \dfrac{5}{16}(x-4)^2, & \text{если } 0\le x\le 4,\\ 5x, & \text{если } 4<x<+\infty\end{cases}$$

установить непрерывность или определить характер точек разрыва. Нарисовать схематический график функции $f\left(x\right)$.

Решение

Шаг 1. Областью определения функции $f\left(x\right)$ является объединение трех промежутков $(-\infty;0)\cup[0;4]\cup(4;+\infty)=\left(-\infty;+\infty\right)$, т.е. функция определена при всех значениях x.

Шаг 2. Исследуем поведение функции в окрестности точки $x_1=0$:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{5}{4}(x+4)=5;\;\; \lim_{x\to 0-0}\frac{5}{16}(x-4)^2=5,\;\; f(0)=\frac{5}{16}(0-4)^2=5,$$

т.е. функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_1=0$.

Шаг 3. Исследуем поведение функции в окрестности точки $x_2=4$:

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{5}{16}(x-4)^2=0;\;\; \lim_{x\to 4+0}5x=20.$$

Так как эти пределы конечны и различны, то в точке $x_2=4$ функция имеет разрыв первого рода.

Тогда $20-0=20$ — скачок функции в точке $x_2=4$.

Шаг 4. График функции

$$f(x)=\begin{cases}\frac{5}{4}(x+4), & \text{если } -\infty<x<0,\\ \frac{5}{16}(x-4)^2, & \text{если } 0\le x\le 4,\\ 5x, & \text{если } 4<x<+\infty.\end{cases}$$

представлен на **рис. 1.2.**

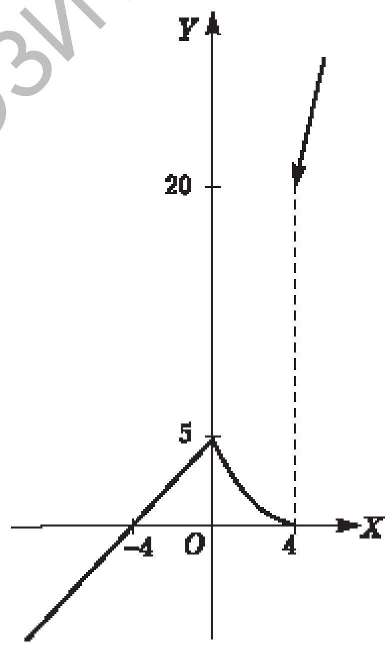

Рис. 1.2

Тесты для самопроверки с указаниями и подсказками

Задание 1. Найдите область определения функции y_i $(i=1, ..., 5)$, используя для этого подсказку к заданию 1.

$$y_1=\frac{x+1}{x^2-1};\quad y_2=\sqrt{2-x-x^2};\quad y_3=\lg\left(1-x^2\right);$$

$$y_4=\frac{1}{\sqrt[4]{5x-x^2}};\quad y_5=\begin{cases}3^{-x}+1, & \text{если } -1\le x<0,\\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, & \text{если } 0\le x<\pi,\\ \dfrac{x}{x^2-2}, & \text{если } \pi<x<6.\end{cases}$$

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 1

Области определения некоторых элементарных функций

Обозначение: $D(f)$ — область определения функции $f(x)$.

1. Пусть $f(x)=P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$, $a_0, a_1, ..., a_n\in\mathbb{R}$, — многочлен.

Тогда $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

2. Пусть $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Тогда $D(f)$ — множество решений неравенства $Q(x)\neq 0$. Или символически:

$D(f)=(-\infty;+\infty)\setminus\{x\,|\,Q(x)=0\}$.

3. Пусть $f(x)=\sqrt[2n]{P(x)}$, где $P(x)$ — многочлен, $2n$ — натуральное четное число.

Тогда $D(f)$ — множество решений неравенства $P(x)\ge 0$ Или символически:

$D(f)=(-\infty;+\infty)\setminus\{x\,|\,P(x)<0\}$.

4. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[2n]{P(x)}}$, где $P(x)$ — многочлен.

Тогда $D\ f$ — множество решений неравенства $P\ x > 0$. Или символически:

$D\ f = -\infty; +\infty \ \backslash\ x \,|\, P\ x \le 0$.

5. Пусть $f\ x = \log_a\ P\ x$, где $a > 0,\ a \ne 1,\ P\ x$ — многочлен.

Тогда $D\ f$ — множество решений неравенства $P\ x > 0$. Или символически:

$D\ f = -\infty; +\infty \ \backslash\ x \,|\, P\ x \le 0$.

6. Пусть $f\ x = \mathrm{tg}\, P\ x$, где $P\ x$ — многочлен.

Тогда $D\ f$ — множество решений совокупности неравенств

$P\ x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Или символически: y_1

$D\ f = -\infty; +\infty \ \backslash \left\{ x \,|\, P\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Варианты ответов представлены в табл. 1:

Таблица 1.

y_i **№ ответа**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
y_1	$-\infty, +\infty$	$1; +\infty$	$-\infty; -1 \cup$ $\cup\ 1; +\infty$	$-\infty; -1 \cup$ $\cup\ -1, 1 \cup$ $\cup\ 1; +\infty$	$-\infty; 1$
y_2	$-2; 1$	$-1; 2$	$-1; 2$	$-2; -1$	$-2; 1$
y_3	$-1; 1$	$-1; 1$	$-\infty; 1$	$-\infty; -1$	$-1; +\infty$
y_4	$5; +\infty$	$0; 5$	$-\infty; 5$	$0; 5$	$-5; 0$
y_5	$-1; 6$	$-1; \pi \cup$ $\cup\ \pi; 6$	$-1; 6$	$-1; 6$	$-1; 0 \cup$ $\cup\ 0; \pi \cup$ $\cup\ \pi; 6$

Правильные ответы представлены в табл. 2:

Таблица 2.

№ функции	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
№ ответа	4	5	1	2	2

Задание 2. Повторите определение сложной функции. Для каждой пары функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданных условиями 2.1–2.3, составьте две сложные функции $u(x)=f(\varphi(x))$ и $v(x)=\varphi(f(x))$.

2.1) $f(x)=x^5;\ \varphi(x)=2x-3.$

2.2) $f(x)=2^x;\ \varphi(x)=x^2.$

2.3) $f(x)=\ln\sqrt{x};\ \varphi(x)=\sin x.$

В каждом из случаев 2.1–2.3 найдите области определения сложных функций $u(x)$ и. $v(x)$.

Варианты ответов представлены в табл. 3:

Таблица 3.

№ ответа № задачи	**1**	**2**	**3**
2.1	$u=2(x-3)^5$, $D(u)=\mathbb{R}$; $v=(2x)^5-3$, $D(v)=\mathbb{R}$	$u=(2x-3)^5$, $D(u)=\mathbb{R}$; $v=2x^5-3$, $D(v)=\mathbb{R}$	$u=2^5x-3^5$, $D(u)=\mathbb{R}$; $v=(2x-3)^5$, $D(v)=\mathbb{R}$
2.2	$u=2x^2$, $D(u)=\mathbb{R}$; $v=4x$, $D(v)=\mathbb{R}$	$u=(2x)^2$, $D(u)=\mathbb{R}$; $v=2^{x^2}$, $D(v)=\mathbb{R}$	$u=2^{x^2}$, $D(u)=\mathbb{R}$; $v=2^{2x}$, $D(v)=\mathbb{R}$

2.3	$u=\ln\sqrt{\sin x}$, $D(u)=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}(2\pi n;\pi+2\pi n)$; $v=\sin(\ln\sqrt{x})$, $D(v)=(0;+\infty)$	$u=\sqrt{\ln\sin x}$, $D(u)=$ $=\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n\,/\,n\in\mathbb{Z}\right\}$; $v=\sin(\ln^2 x)$, $D(v)=(0;+\infty)$	$u=\ln\sin x$, $D(u)=\mathbb{R}$; $v=\sin\sqrt{\ln x}$, $D(v)=[1;+\infty)$

Правильные ответы представлены в табл. 4:

Таблица 4.

№ условия	2.1	2.2	2.3
№ ответа	2	3	1

Задание 3. Используя подсказку к заданию 3, вспомните, как выполняются элементарные преобразования графиков.

Опишите, с помощью какого преобразования из графика функции $y=\sin x$; можно получить график функции y_i (i = 1, 2, …, 6):

3.1) $y_1=-\sin x$; 3.2) $y_2=|\sin x|$; 3.3) $y_3=\sin x+2$;

3.4) $y_4=2\sin x$; 3.5) $y_5=\sin 2x$; 3.6) $y_6=\sin(x+2)$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 3

Элементарные преобразования графиков функций

Симметрия относительно оси Oy. График функции $y=f(-x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ симметричным отражением последнего относительно оси Oy.

Симметрия относительно оси Ox. График функции $y=-f(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ симметричным отражением последнего относительно оси Ox.

Параллельный перенос вдоль оси *Oy*. График функции $y = f(x) + a$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси *Oy* на *a* единиц вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$.

Параллельный перенос вдоль оси *Ox*. График функции $y = f(x - a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом на *a* единиц вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$.

Растяжение (сжатие) вдоль оси *Oy*. График функции $y = af(x)$ получается растяжением (сжатием) графика $y = f(x)$ в *a* раз вдоль оси *Oy*, если $a > 1$ (сжатием в $\frac{1}{a}$ раз, если $0 < a < 1$).

Растяжение (сжатие) вдоль оси *Ox*. График функции $y = f(ax)$ получается сжатием (растяжением) графика функции $y = f(x)$ в *a* раз ($\frac{1}{a}$ раз) вдоль оси *Ox*, если $a > 1$ ($0 < a < 1$).

График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отображением относительно оси *Ox* той части графика, которая лежит ниже оси *Ox*.

Варианты ответов представлены в табл. 5:

Таблица 5.

1.	«Сжатие» в 2 раза вдоль оси *Ox.*
2.	«Растяжение» в 2 раза в направлении оси *Oy.*
3.	Параллельный перенос вдоль оси *Ox* на 2 единицы влево.
4.	Параллельный перенос вдоль оси *Ox* на 2 единицы вправо.
5.	Параллельный перенос вдоль оси *Oy* на 2 единицы вверх.
6.	Симметричное отражение относительно оси *Ox.*
7.	Зеркальное отражение участков графика, лежащих ниже оси *Ox*, относительно этой оси (снизу вверх).

Правильные ответы представлены в табл. 6:

Таблица 6.

№ функции	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
№ ответа	6	7	5	2	1	3

Задание 4. Сформулируйте определения:

- конечного предела функции $y(x)$ при $x \to x_0$; $x \to x_0 + 0$; $x \to x_0 - 0$; $x \to +\infty$; $x \to -\infty$ (где x_0 — число);
- бесконечного предела функции $y(x)$ при $x \to x_0$; $x \to x_0 + 0$; $x \to x_0 - 0$; $x \to +\infty$; $x \to -\infty$ (где x_0 — число);

Изобразите схематические графики функций y_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, из приведенного ниже множества:

$$y_1 = 2^x, \quad y_2 = x^3, \quad y_3 = \ln(x+2), \quad y_4 = \operatorname{tg} x,$$

$$y_5 = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

$$y_6 = \frac{1}{x}.$$

Пользуясь определениями предела и построенными графиками, среди множества функций y_1-y_6 укажите те функции, которые удовлетворяют следующим условиям:

4.1) $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0.$

4.2) $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 0, \ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x\to 0} y(x) = 1.$

4.3) $\lim\limits_{x\to+0} y(x) = 1, \ \lim\limits_{x\to-0} y(x) = -1, \ y(0) = 0.$

4.4) $\lim\limits_{x\to+0} y(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x\to-0} y(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = 0.$

4.5) $\lim\limits_{x\to-2+0} y(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x\to-1} y(x) = 0.$

4.6) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)+0} y(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)-0} y(x) = +\infty, \ \lim\limits_{x\to\pi k} y(x) = 0, \ k \in Z.$

Правильные ответы представлены в табл. 7:

Таблица 7.

№ условия	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
Функция	y_2	y_1	y_5	y_6	y_3	y_4

Задание 5. Сформулируйте определение и перечислите свойства бесконечно малых в точке функций. Используя их (см. подсказку к заданию 5), вычислите приведенные ниже пределы (в них через $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ обозначены бесконечно малые в точке x_0 функции):

5.1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(2\alpha(x)+3\beta(x)-5\right)$;

5.2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\left(\beta(x)+2\right)^2-4\alpha(x)\cdot\beta(x)\right)$;

5.3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(6\alpha(x)\cdot\sin x+7\beta(x)\cdot\cos x\right)$;

5.4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left(3-\beta(x)\right)^3}{2\alpha(x)}$;

5.5) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(3^{-\frac{1}{\alpha^2(x)+\beta^2(x)}}+2\right)$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 5

Свойства функций, имеющих пределы в данной точке

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B,\quad A,B\neq\infty$. Тогда

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B,$

$\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=C\cdot A,$ где $C-$ лбое число,

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=A\cdot B,$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n=A^n,$ где $n-$ натуральное число.

Из этих свойств следует, что если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$ т. е. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые в точке x_0 функции (коротко б.м.ф.), то $\alpha(x) \pm \beta(x)$, $C\alpha(x)$, $\alpha(x) \cdot \beta(x)$, $(\alpha(x))^n$ — тоже б.м.ф. в точке x_0.

Важно! Известно также, что если $\alpha(x)$ — б.м.ф. в точке x_0, а $f(x)$ — любая функция, ограниченная в некоторой окрестности точки x_0, то $\alpha(x) \cdot f(x)$ — б.м.ф. в точке x_0.

К числу ограниченных на своей области определения функций относятся, например, функции $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$, $\arcsin(ax+b)$, $\arccos(ax+b)$, $\operatorname{arctg}(ax+b)$, $\operatorname{arcctg}(ax+b)$ и др.

Варианты ответов: 1) ∞ 2) 0; 3) 2; 4)–5; 5) 4.

Правильные ответы представлены в табл. 8:

Таблица 8.

№ задачи	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5
№ ответа	4	5	2	1	3

Задание 6. В указанном множестве функций $\{y_i\}$, $i = 1, ..., 7$, найдите бесконечно малые при $x \to 0$ функции:

$$y_1 = 2x+3;\ \ y_2 = x^2;\ \ y_3 = 2^{x-1};\ \ y_4 = 2^x - 1;$$

$$y_5 = \cos 2x;\ \ y_6 = \sin^3 5x;\ \ y_7 = \sqrt{x+4} - 2.$$

Правильные ответы: $\{y_2;\ y_4;\ y_6;\ y_7\}$.

Задание 7. Вспомните основные замечательные пределы. Используя их (см. подсказку к заданию 7), найдите те значения a, при которых справедливы приведенные ниже равенства:

$$7.1)\ \lim_{x \to a} \frac{\sin x}{x} = 1;\ \ 7.2)\ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{ax} = 1;\ \ 7.3)\ \lim_{x \to 0} (1-x)^{a/x} = e;$$

$$7.4)\ \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = 1;\ \ 7.5)\ \lim_{x \to 0} \frac{\log_3(1-2x)}{ax} = \frac{1}{\ln 3};$$

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 7

Основные замечательные пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ и } \lim_{\alpha\ x\ \to 0}\frac{\sin\alpha\ \ x}{\alpha\ \ x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1 \text{ и } \lim_{\alpha\ x\ \to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha\ \ x}{\alpha\ \ x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\ 1+x\ ^{1/x}=e \text{ и } \lim_{\alpha\ x\ \to 0}\ 1+\alpha\ \ x\ \ ^{1/\alpha\ x}=e.$$

При $a>0, a\neq 1$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ и $\lim\limits_{\alpha\ x\ \to 0}\frac{a^{\alpha\ x}-1}{\alpha\ \ x}=\ln a.$

При $a>0, a\neq 1$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a\ 1+x}{x}=\frac{1}{\ln a}$ и $\lim\limits_{\alpha\ x\ \to 0}\frac{\log_a\ 1+\alpha\ \ x}{\alpha\ \ x}=\frac{1}{\ln a}.$

Варианты ответов:

1) $a = e$; 2) $a = 0$; 3) $a = -2$; 4) $a = \pi$; 5) $a = 1$; 6) $a = -1$.

Правильные ответы представлены в табл. 9:

Таблица 9.

№ задачи	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5
№ ответа	2	4	6	1	3

Задание 8. «Расшифруйте» понятие неопределенности, возникающее при вычислении пределов. Объясните смысл символических обозначений неопределенностей:

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right],\quad 0\cdot\infty\ ,\quad \infty-\infty\ ,\ \left[1^{\infty}\right],\ \left[0^{0}\right],\ \left[\infty^{0}\right].$$

Определите, содержат ли неопределенности (если да, то какого типа), следующие пределы:

8.1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; 8.2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2+8x+15}$;

8.3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{11+2x}}$; 8.4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\ \sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\ $;

8.5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}$; 8.6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

8.7) $\lim\limits_{x\to +0} (\sin x)^{x}$; 8.8) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^{x}$.

Варианты ответов:

1) $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$; 2) неопределенности нет; 3) $\left[\dfrac{0}{0}\right]$; 4) $\left[0^0\right]$;

5) $[0\cdot\infty]$; 6) $\left[\infty^0\right]$; 7) $[\infty-\infty]$; 8) $\left[1^\infty\right]$.

Правильные ответы представлены в табл. 10:

Таблица 10.

№ задачи	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8
№ ответа	3	2	1	7	2	8	4	6

Задание 9. Сформулируйте определение и перечислите свойства эквивалентных в точке функций. Напишите таблицу основных эквивалентных при $x\to 0$ функций. Используя таблицу эквивалентных бесконечно малых функций (подсказка к заданию 9), найдите простейшую степенную функцию вида Ax^m, эквивалентную функции $y_i(x)$ при $x\to 0$ (i = 1, 2, …, 6):

$$y_1(x)=1-\cos x;\quad y_2(x)=\frac{\arcsin\left(\dfrac{x\sqrt{x^3}}{3}\right)}{x^2};$$

$$y_3(x)=\frac{\ln(1-5x^4)}{2\operatorname{tg}\sqrt{x}};\quad y_4(x)=\cos(2x^2)-\cos(3x^2);$$

$$y_5(x)=\frac{e^{3\sqrt{x^7}}-1}{6(\sin x)^{5/2}};\quad y_6(x)=7^{5x}-7^{2x}.$$

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 9

Если $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ и $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — б.м.ф. при $x\to 0$ то они называются эквивалентными б.м.ф. при $x\to 0$ Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to 0$

<u>Таблица основных эквивалентных б.м.ф.</u> при $x\to 0$:

$\sin x\sim x,\qquad \arcsin x\sim x,$

$\operatorname{tg} x\sim x,\qquad \operatorname{arctg} x\sim x,$

$e^x-1\sim x,\qquad a^x-1\sim x\ln a\ \ (a>0,\ a\neq 1),$

$\ln(1+x)\sim x,\qquad \log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}\ \ (a>0, a\neq 1).$

<u>Важно!</u> При вычислении пределов эквивалентные б.м.ф. можно заменять друг на друга в произведении и частном. Так, если при $x\to 0$ $f(x)\sim\alpha(x)$, $g(x)\sim\beta(x)$ и существует $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Варианты ответов:

1) $A=\frac{1}{3}$, $m=\frac{1}{2}$; 2) $A=-\frac{5}{2}$, $m=\frac{7}{2}$; 3) $A=\frac{5}{2}$, $m=4$;

4) $A=\frac{1}{2}$, $m=2$; 5) $A=3\ln 7$, $m=1$; 6) $A=\frac{1}{2}$, $m=1$.

Правильные ответы представлены в табл. 11:

Таблица 11.

Функция	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
№ ответа	4	1	2	3	6	5

Задание 10. Сформулируйте определения:

- непрерывности функции в точке;
- непрерывности функции в точке справа;
- непрерывности функции в точке слева.

Используя эти определения (см. подсказки 1 и 2 к заданию 10) найдите такие значения a, при которых функция y_i ($i = 1, \dots, 5$) будет непрерывна в указанной точке x_0.

$$y_1 = \begin{cases} x, & \text{если } x \le 1, \\ a + \ln x, & \text{если } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$$

$$y_2 = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x-2}}, & \text{если } x < 2, \\ \dfrac{a}{x}, & \text{если } x \ge 2, \end{cases} \quad x_0 = 2.$$

$$y_3 = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x}, & \text{если } x < 0, \\ a, & \text{если } x = 0, \\ \dfrac{x}{2x + x^2}, & \text{если } x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$y_4 = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{если } x < \dfrac{\pi}{4}, \\ 4\cos^2 x + a, & \text{если } x \ge \dfrac{\pi}{4}, \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$y_5 = \begin{cases} (1 - 2x)^{1/x}, & \text{если } x < 0, \\ (1 + 4x)^{1/2x}, & \text{если } x > 0, \\ e^a, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

ПОДСКАЗКА 1 К ЗАДАНИЮ 10

Определение непрерывной в точке x_0 функции

Функция $y = f(x)$, которая определена в точке x_0 и удовлетворяет условию $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, называется непрерывной в точке x_0.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 справа (слева), если она определена в этой точке и

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

Важно! Если функция не определена в точке x_0, то в этой точке она не является непрерывной (т. е. является разрывной в точке x_0).

Функция является непрерывной в точке x_0, если и только если она непрерывна в ней и слева и справа, т. е. $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

ПОДСКАЗКА 2 К ЗАДАНИЮ 10

Теорема о непрерывности элементарных функций

Любая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

Варианты ответов:

1) $a=\frac{1}{2}$; 2) $a=0$; 3) таких значений нет; 4) $a=-1$; 5) $a=1$.

Правильные ответы представлены в табл. 12:

Таблица 12.

Функция	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
№ ответа	5	2	1	4	3

Задание 11. Используя понятие точки разрыва функции и определения типов точек разрыва (см. подсказку к заданию 11), выясните, является ли точка $x_0=3$ точкой разрыва данных функций (в случае утвердительного ответа определите тип разрыва):

$$y_1=(x-3)^2;\ \ y_2=\frac{1}{x-3};\ \ y_3=\ln(x-3);\ \ y_4=\frac{(x-3)^2}{x-3};$$

$$y_5=\sin x+\frac{1}{x^2+x-3};\ \ y_6=\begin{cases}-3x, & \text{если } x<3,\\ x^2+1, & \text{если } x>3.\end{cases}$$

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 11

Классификация точек разрыва

Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$ если в этой точке левый и правый пределы функции равны одному и тому же числу, которое не совпадает со значением $f(x_0)$ если функция $f(x)$ определена в точке x_0.

Точка x_0 называется точкой разрыва I рода функции $f(x)$ если левый и правый пределы в этой точке конечны, но различны.

Точка x_0 называется точкой разрыва II рода функции $f(x)$ если хотя бы один из односторонних пределов в этой точке либо не существует, либо бесконечен.

Важно! Для определения характера точки разрыва x_0 нужно вычислить односторонние пределы в этой точке или установить не существование этих пределов.

Варианты ответов:

1) не является точкой разрыва;
2) точка устранимого разрыва;
3) точка разрыва I рода;
4) точка разрыва II рода.

Правильные ответы представлены в табл. 13:

Таблица 13.

Функция	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
№ ответа	1	4	1	2	1	3

Математический диктант «Предел последовательности»

Вариант 1

1. Указать неточности (если они есть) в следующем определении предела последовательности x_n : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$, если для любого $\xi > 0$ существует натуральное число $n(\xi)$ такое, что все члены последовательности x_n с номерами $n \geq n\ \ \xi$ удовлетворяют неравенству: $\left|x_n - 1\right| < \xi$.

2. Доказать по определению (указав соответствующий номер $n(\xi)$), что последовательность $x_n = \dfrac{2}{\sqrt[3]{5n-2}}$ — бесконечно малая.

3. Доказать, что последовательность $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{4}$ расходится.

4. Привести примеры таких расходящихся последовательностей x_n и y_n , для которых последовательность $x_n \cdot y_n$ сходится.

5. Доказать или опровергнуть: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{}^2 = a^2$.

6. Вычислить пределы последовательностей: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1\ ^4 - \ n-1\ ^4}{2n+1\ ^4 + \ n-1\ ^4}$;

   б) $\lim\limits_{n\to\infty}\ n - \sqrt[3]{n^3-5}\ \ n\sqrt{n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+9}{4n-3}\right)^{5n+2}$.

Вариант 2

7. Указать неточности (если они есть) в следующем определении предела последовательности x_n : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, если для любого $\xi > 0$ существует натуральный номер $n(\xi)$ такой, что все члены последовательности x_n с номерами $n < n\ \ \xi$ удовлетворяют неравенству: $\left|x_n - 2\right| < \xi$.

8. Доказать по определению (указав соответствующий номер $n(\xi)$), что

последовательность $x_n = \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ — бесконечно малая.

9. Доказать, что последовательность $x_n = \cos\frac{\pi n}{3}$ расходится.

10. Привести примеры таких расходящихся последовательностей (x_n) и (y_n), для которых последовательность $(x_n + y_n)$ сходится.

11. Доказать или опровергнуть: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{}^2 = a^2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

12. Вычислить пределы последовательностей: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n+1}{7n-5}\right)^{-14n}$.

Ответы к математическому диктанту «Предел последовательности»

Вариант 1

1. В неравенстве должно быть написано $|x_n + 1| < \xi$.
2. $n(\xi) = \left[\frac{1}{5}\left(\frac{8}{\xi^3}+2\right)\right]$.
3. Указать две подпоследовательности, сходящиеся к различным пределам.
4. Например, если $x_n = (-1)^n = y_n$, то $x_n y_n = (-1)^{2n} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1$.
5. Верно по теореме о пределе произведения двух сходящихся последовательностей.
6. а) $\frac{15}{17}$; б) 0; в) e^{15}.

Вариант 2

1. В определении должно быть написано: для всех членов последовательности x_n с номерами $n > n(\xi)$.

2. $n(\xi) = \left[\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\xi}}\right]$.

3. Указать две подпоследовательности, сходящиеся к различным пределам.

4. Например, если $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$, тогда $x_n + y_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$.

5. Неверно, например, если $x_n = (-1)^n$, то $1 = (-1)^n \cdot (-1)^n = x_n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 1$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ вообще не существует.

6. а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{3}{2}$; в) e^{-12}.

Математический диктант «Введение в анализ»

Вариант 1

1. Привести пример функции $f(x)$, заданной графически, удовлетворяющей всем указанным условиям одновременно:

$$D(f) = (-\infty; +\infty), \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x\to-2-0} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to-2+0} f(x) = 1{,}5, \ f(-2) = 1, \ \lim_{x\to 0} f(x) = 2, \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = e.$$

2. Исследовать непрерывность функции $f(x) = \dfrac{3}{(1-x)(x-3)^2}$ и построить ее схематический график.

3. В указанном множестве функций $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ отобрать (приведя обоснование) бесконечно большие при $x \to x_0$ функции:

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x},\ x_0 = 1;$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2},\ x_0 = 2;$$

$$f_3(x) = \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x - x\cos\sqrt{x}},\ x_0 = +0;$$

$$f_4(x) = \frac{e^{5x} - e^{x}}{\ln(1 + 2x)},\ x_0 = 0;$$

$$f_5(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x,\ x_0 = +\infty,\ x_0 = -\infty.$$

4. Доказать или опровергнуть: $3\sin^2 x^2 - 6x^3 = o(x^2)$ при $x \to 0$.

5. Выделить главную часть функции $f(x) = \sin^2 2x - \arcsin^3 x + 2\,\mathrm{arctg}(x^2)$ вида Ax^{α} при $x \to 0$.

6. Выяснить, имеют ли функции $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ и $g(x) = x^3 - x$ один и тот же порядок: а) при $x \to 1$, б) при $x \to +\infty$.

7. Определить порядок малости функции $f(x) = 1 - \cos^3 2x$ относительно функции x при $x \to 0$.

Вариант 2

1. Привести пример функции $f(x)$, заданной графически, удовлетворяющей всем указанным условиям одновременно:

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty),\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \pi,\ \lim_{x\to+0} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to1} f(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

2. Исследовать непрерывность функции $f(x) = 3^{\frac{1}{2-x}}$ и построить ее схематический график.

3. В указанном множестве функций f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 отобрать (приведя обоснование) бесконечно малые при $x \to x_0$ функции:

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}, \; x_0 = 1;$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2}, \; x_0 = 2;$$

$$f_3(x) = \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x - x\cos\sqrt{x}}, \; x_0 = +0;$$

$$f_4(x) = \frac{e^{5x} - e^x}{\ln(1 + 2x)}, \; x_0 = 0;$$

$$f_5(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \; x_0 = +\infty, \; x_0 = -\infty.$$

4. Доказать или опровергнуть: $\sin\left(\sqrt{x^2 + 9} - 3\right) = o(x^3)$ при $x \to 0$.

5. Выделить главную часть функции $f(x) = 2e^{x^4} - 2 + (\cos x - 1)^2$ вида Ax^α при $x \to 0$.

6. Выяснить, имеют ли функции $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2}$ и $g(x) = \dfrac{3}{x}$ один и тот же порядок: а) при $x \to 1$, б) при $x \to +\infty$.

7. Определить порядок малости функции $f(x) = \ln\left(1 + \sqrt[3]{5x^2\sqrt{3\,\mathrm{tg}^5(x^2)}}\right)$ относительно функции x при $x \to 0$.

Ответы к математическому диктанту «Введение в анализ»

Вариант 1

1. См. рис. Д1.

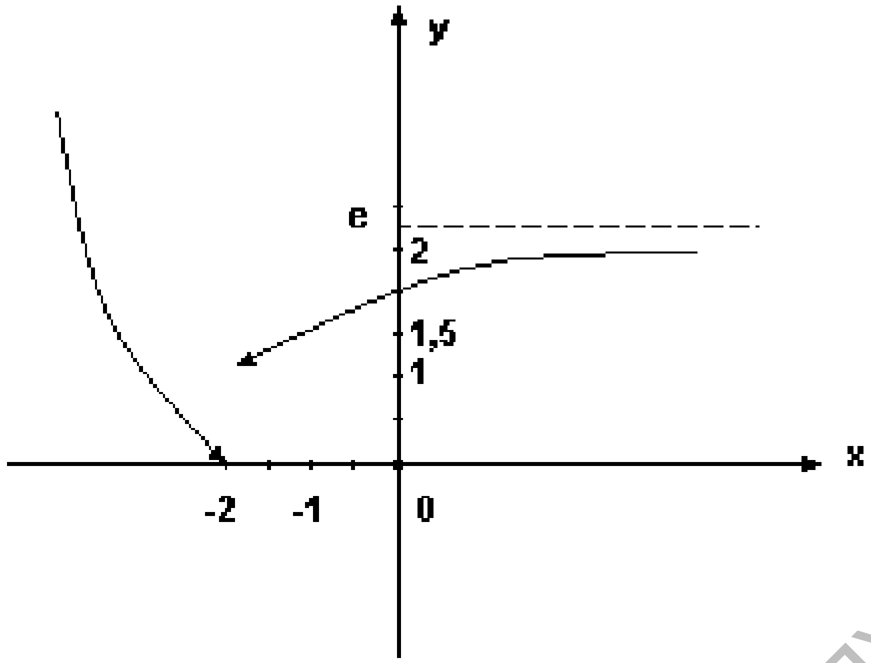

Рис. Д1.

2. См рис. Д2.

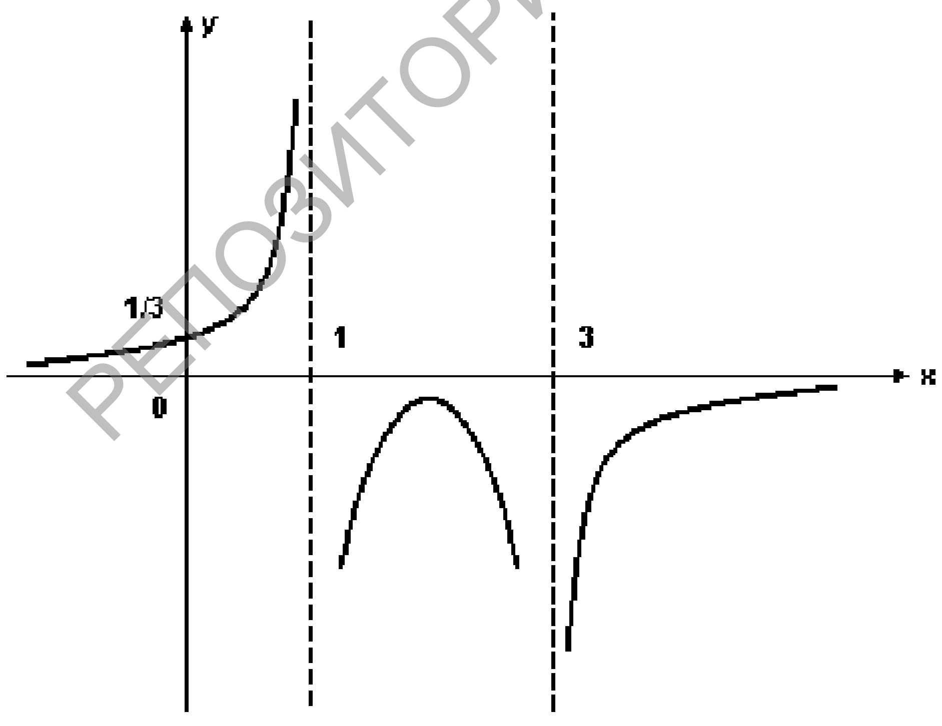

Рис. Д2.

3. f_2; f_5 при $x \to -\infty$.

4. Верно.

5. $6x^2$.

6. а) Нет, б) да.

7. 2.

Вариант 2

1. См. рис. Д3.

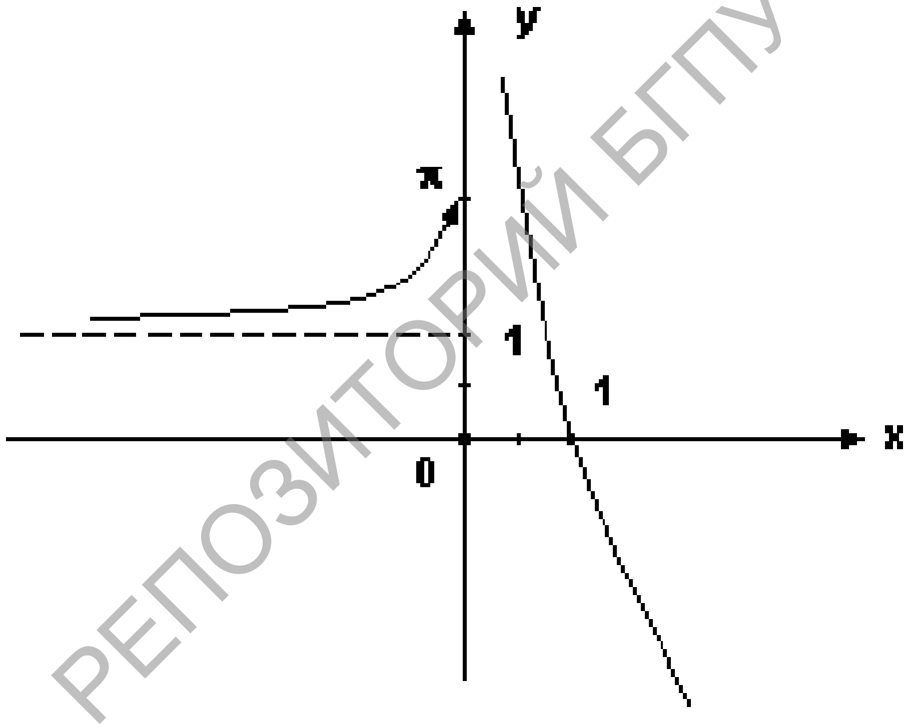

Рис. Д3.

2. См. рис. Д4

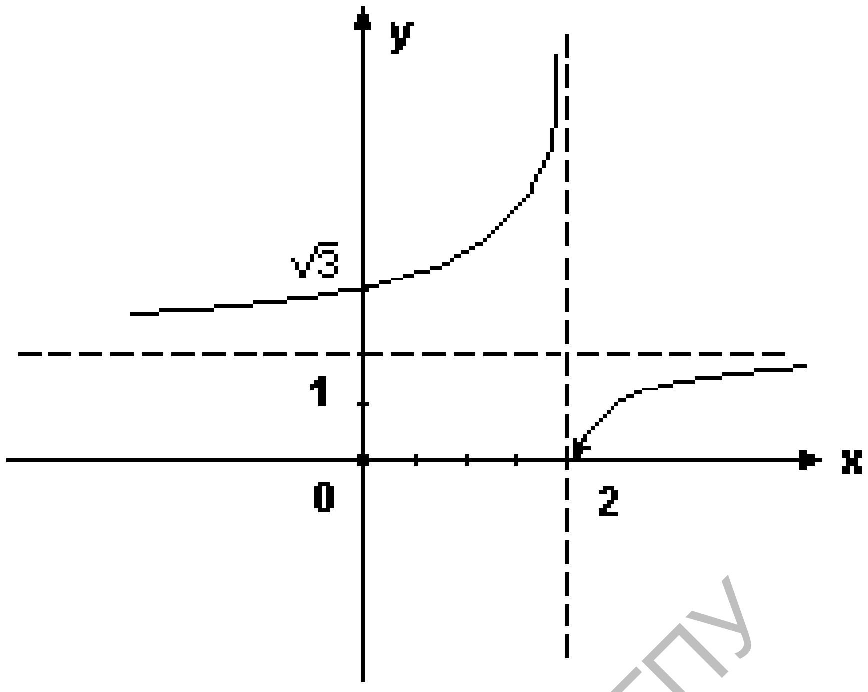

Рис. Д4.

3. f_1; f_5 при $x \to +\infty$.

4. Неверно.

5. $\frac{9}{4}x^4$.

6. а) Да, б) да.

7. $\frac{7}{3}$.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

При изучении этой темы основным понятием является определение производной, ее геометрическое и механическое истолкование. Особую роль при решении задач играет правило вычисления производной сложной функции.

Задачи с решениями

Вычисление производной функции

Задача 1. Пользуясь определением, найти производную функции $f(x)=2x^2+1$ в точке $x_0=1$.

Решение

Шаг 1. Запишем определение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Шаг 2. Вычислим производную заданной функции в точке $x_0=1$:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+1-(2\cdot 1+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}2(x+1)=4.$$

Ответ: 4.

Задача 2. Вычислить односторонние производные функции

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1-2x)+1, x<0,\\ e^{3x}, x\ge 0\end{cases}$$

в точке $x_0=0$.

Решение

Левостороннюю производную функции в точке $x_0 = 0$ можно вычислить по формуле

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Найдем значение функции при $x_0 = 0$: $f(0) = e^{3\cdot 0} = 1$.

При $x < 0$ функция задана формулой: $f(x) = \ln(1-2x) + 1$, поэтому

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-0} \frac{\ln(1-2x)+1-1}{x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{\ln(1-2x)}{x} = \left|\ln(1-2x) \sim -2x,\ x\to 0\right| =$$
$$= \lim_{x\to 0-0} \frac{-2x}{x} = -2.$$

Аналогично вычисляем правостороннюю производную в точке $x_0 = 0$. Имеем:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \left|e^{3x} - 1 \sim 3x,\ x\to 0\right| =$$
$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{3x}{x} = 3.$$

Так как $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, то заданная функция не имеет производной в точке $x_0 = 0$.

Ответ: $f'_-(0) = -2,\ f'_+(0) = 3.$

Задача 3. Найти производную функции $y = \ln \arcsin 6x.$

Решение

Применяя правило дифференцирования сложной функции, находим производную

$$y'(x)=\frac{1}{\arcsin 6x}\left(\arcsin 6x\right)'=\frac{1}{\arcsin 6x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(6x)^2}}\cdot(6x)'=$$

$$=\frac{1}{\arcsin 6x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(6x)^2}}\cdot 6.$$

Ответ: $\left(\ln\arcsin x\right)'=\dfrac{6}{\arcsin 6x\sqrt{1-(6x)^2}}.$

Задача 4. Найти производную функции $y=\dfrac{\cos 7x}{\sqrt{1-3x^4}}.$

Решение

Используем формулу вычисления производной частного двух функций:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{v^2(x)}.$$

В нашем случае получаем:

$$y'(x)=\frac{(\cos 7x)'\cdot\sqrt{1-3x^4}-\cos 7x\cdot\left(\sqrt{1-3x^4}\right)'}{\left(\sqrt{1-3x^4}\right)^2}=$$

$$=\frac{-\sin 7x\cdot(7x)'\cdot\sqrt{1-3x^4}-\cos 7x\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{1-3x^4}}\cdot\left(1-3x^4\right)'}{1-3x^4}=$$

$$=\frac{-7\sin 7x\cdot\sqrt{1-3x^4}-\dfrac{\cos 7x}{2\sqrt{1-3x^4}}\left(-12x^3\right)}{1-3x^4}=$$

$$=\frac{-7\sin 7x\cdot\left(1-3x^4\right)+6x^3\cos 7x}{\left(1-3x^4\right)\cdot\sqrt{1-3x^4}}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\cos 7x}{\sqrt{1-3x^4}}\right)'=\dfrac{-7\sin 7x\cdot\left(1-3x^4\right)+6x^3\cos 7x}{\left(1-3x^4\right)\cdot\sqrt{1-3x^4}}.s$

Задача 5. Найти производную функции $y=3^{tgx}\cdot\sin 5x$.

Решение

Пользуясь формулой вычисления производной произведения двух функций, находим

$$y'(x)=\left(3^{tgx}\right)'\sin 5x+3^{tgx}\cdot\left(\sin 5x\right)'=3^{tgx}\ln 3\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\sin 5x+5\cdot 3^{tgx}\cdot\cos 5x.$$

Ответ: $3^{tgx}\left(\ln 3\cdot\dfrac{\sin 5x}{\cos^2 x}+5\cos 5x\right)$.

Задача 6. Найти производную показательно-степенной функции $y=\left(\arccos x\right)^{arctgx}$.

Решение

Шаг 1. Логарифмируем заданную функцию:

$$\ln y=\ln\left(\arccos x\right)^{arctgx}\Leftrightarrow \ln y=arctgx\cdot\ln\left(\arccos x\right).$$

Шаг 2. Дифференцируем последнее равенство:

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln\left(\arccos x\right)+arctgx\cdot\frac{1}{\arccos x}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Шаг 3. Умножая полученное равенство на y, находим производную:

$$y'=\left(\arccos x\right)^{arctgx}\left(\frac{\ln\left(\arccos x\right)}{1+x^2}-\frac{arctgx}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Ответ: $\left(\left(\arccos x\right)^{arctgx}\right)'=\left(\arccos x\right)^{arctgx}\left(\dfrac{\ln\left(\arccos x\right)}{1+x^2}-\dfrac{arctgx}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Приложения производной

Задача 7. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=\sqrt[3]{x}-1$ в точке с абсциссой $x_0=8$.

Решение

Шаг 1. Находим производную заданной функции:

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Шаг 2. Вычисляем значение производной при $x_0=8$:

$$y'(8)=\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{12}.$$

Шаг 3. Вычисляем значение функции при $x_0=8$:

$$y(8)=\sqrt[3]{8}-1=2-1=1.$$

Шаг 4. Подставляем найденные значения функции и ее производной при $x_0=8$ в уравнение касательной:

$$y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0).$$

Таким образом, уравнение касательной к заданной кривой в точке с абсциссой $x_0=8$ имеет вид:

$$y-1=\frac{1}{12}(x-1)\Leftrightarrow x-12y+11=0.$$

Шаг 5. Уравнение нормали к кривой $y=y(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид:

$$y-y(x_0)=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0).$$

В нашем случае имеем:

$$y-1=-12(x-1)\Leftrightarrow 12x+y-13=0.$$

Ответ: $x-12y+11=0,\quad 12x+y-13=0.$

Задача 8. В какой точке $M_0(x_0;y_0)$ кривой $y=\frac{x^5}{5}+x+1$ касательная к ней перпендикулярна прямой $x+2y-3=0$?

Решение

Шаг 1. Находим угловой коэффициент касательной $k_{кас}$ к заданной кривой в точке $M_0(x_0;y_0)$:

$$k_{кас}=y'(x_0)=x_0^4+1.$$

Шаг 2. Вычисляем угловой коэффициент k заданной прямой:

$$x+2y-3=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \Rightarrow k=-\frac{1}{2}.$$

Шаг 3. Касательная должна быть перпендикулярна заданной прямой, поэтому

$$k_{кас}\cdot k=-1 \Rightarrow -\frac{1}{2}(x_0^4+1)=-1.$$

Таким образом, $x_0=1$ или $x_0=-1$.

Шаг 4. Вычисляем значения функции в найденных точках:

$$y(1)=\frac{1}{5}+1+1=\frac{11}{5},$$

$$y(-1)=-\frac{1}{5}-1+1=-\frac{1}{5}.$$

Значит, $M_0^1\left(1;\frac{11}{5}\right)$, $M_0^2\left(-1;-\frac{11}{5}\right)$.

Ответ: $M_0^1\left(1;\frac{11}{5}\right)$, $M_0^2\left(-1;-\frac{11}{5}\right)$.

Задача 9. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=5t^2-2t$. Определить среднюю скорость движения за промежуток времени от $t_0=1$ до $t_1=1{,}1$ и $t_2=1{,}01$, вычислить мгновенную скорость материальной точки в момент времени t_0.

Решение

Шаг 1. Вычислим координаты материальной точки в моменты времени t_0, t_1, t_2:

$$x(t_0)=x(1)=5-2=3; \quad x(t_1)=5\cdot(1{,}1)^2-2\cdot 1{,}1=6{,}05-2{,}2=3{,}85;$$
$$x(t_2)=5\cdot(1{,}01)^2-2\cdot 1{,}01=3{,}0805.$$

Шаг 2. Воспользовавшись формулой

$$v_{ср.} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0},$$

вычислим среднюю скорость движения за промежутки времени от $t_0 = 1$ до $t_1 = 1{,}1$ и от t_0 до $t_2 = 1{,}01$:

$$v_{1ср.} = \frac{3{,}85 - 3}{1{,}1 - 1} = 8{,}5; \quad v_{2ср.} = \frac{3{,}0805 - 3}{1{,}01 - 1} = 8{,}05.$$

Шаг 3. Воспользуемся формулой мгновенной скорости в момент времени t_0:

$$v(t_0) = x'(t_0).$$

Вычислим производную функции $x\ t\ = 5t^2 - 2t$ в точке $t_0 = 1$:

$$x'\ t_0\ = x'\ 1\ = (5 \cdot 2t - 2)\big|_{t=1} = 10 - 2 = 8.$$

Ответ: средняя скорость движения материальной точки за промежуток времени от $t_0 = 1$ до $t_1 = 1{,}1$ равна 8,5; средняя скорость движения материальной точки за промежуток времени от $t_0 = 1$ до $t_2 = 1{,}01$ равна 8,05; мгновенная скорость материальной точки в момент времени $t_0 = 1$ равна 8.

Задача 10. Два катера начинают двигаться одновременно от одной точки по взаимно перпендикулярным курсам. С какой скоростью увеличивается расстояние между ними в процессе движения, если скорость первого катера 15 км/ч, а второго – 20 км/ч?

Решение

Шаг 1. Направим ось *Ox* по курсу движения первого катера, а ось *Oy* – по курсу движения второго. Тогда в момент времени *t* координаты первого катера *(15t, 0)*, второго катера – *(0, 20t)*.

Шаг 2. Вычислим расстояние между катерами в момент времени *t*:

$$S(t) = \sqrt{(15t - 0)^2 + (0 - 20t)^2} = \sqrt{625t^2} = 25t.$$

Шаг 3. Вычислим искомую скорость, используя формулу

$$v(t) = S'(t).$$

В нашем случае

$$v(t) = S'(t) = (25t)' = 25.$$

Ответ: расстояние между катерами увеличивается со скоростью 25 км/ч.

Задача 11. Две точки движутся по оси Ox, закон движения одной $x_1(t) = t^2 + 2t$, второй – $x_2(t) = 48 + 4t$. Определить скорость удаления этих точек друг от друга в момент их встречи.

Решение

Шаг 1. Из уравнения $t^2 + 2t = 48 + 4t$ определим момент встречи точек:

$$t^2 + 2t = 48 + 4t \Leftrightarrow t^2 - 2t - 48 - 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -6, \\ t_2 = 8. \end{array}\right.$$

С учетом условия $t > 0$ получаем $t = 8$.

Шаг 2. Расстояние между точками изменяется по закону

$$S(t) = x_2(t) - x_1(t) = 48 + 4t - t^2 - 2t = 48 + 2t - t^2.$$

Шаг 3. Вычислим искомую скорость в момент времени $t = 8$:

$$v(8) = S'(8) = (48 + 2t - t^2)'\Big|_{t=8} = (2 - 2t)\Big|_{t=8} = 2 - 16 = -14.$$

Ответ: скорость удаления точек друг от друга в момент их встречи равна -14.

Дифференцирование функций, заданных неявно

Задача 12. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $x^3 y + y^4 - x - 7 = 0$ в точке $M_0(2;1)$.

Решение

Шаг 1. Дифференцируем заданное уравнение вида $F(x, y) = 0$ по переменной x, считая y функцией, зависящей от x. В результате получаем:

$$3x^2 y + x^3 \cdot y' + 4y^3 \cdot y' - 1 = 0.$$

Шаг 2. Решая полученное уравнение относительно y', находим:

$$y' = \frac{1 - 3x^2 y}{x^3 + 4y^3}.$$

Шаг 3. Вычисляем производную в точке $M_0(2;1)$, подставляя в последнее равенство значения $x = 2$ и $y = 1$.

Производная $\frac{dy}{dx}$ в точке $M_0(2;1)$ равна:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{M_0} = \frac{1 - 3\cdot 4\cdot 1}{2^3 + 4\cdot 1} = -\frac{11}{12}.$$

Ответ: $-\frac{11}{12}$.

Задача 13. Составить уравнение касательной к кривой $tg(xy) = x - y^2 + 4$ в точке $M_0(0;2)$.

Решение

Шаг 1. Дифференцируем уравнение кривой:

$$\frac{1}{\cos^2(xy)}(y + xy') = 1 - 2yy'.$$

Шаг 2. Находим производную неявной функции:

$$y' = \frac{\cos^2(xy) - y}{x + 2y\cos^2(xy)}.$$

Шаг 3. Вычисляем значение производной в точке $M_0(0;2)$:

$$\left.y'\right|_{M_0(0;2)} = \frac{\cos^2 0 - 2}{0 + 2\cdot 2\cos^2 0} = -\frac{1}{4}.$$

Шаг 4. Составляем уравнение касательной:

$$y - 2 = -\frac{1}{4}x \Leftrightarrow x + 4y - 8 = 0.$$

Ответ: $x + 4y - 8 = 0$.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Задача 14. Составить уравнение нормали к кривой $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$ в точке, соответствующей значению параметра $t_0 = \frac{3\pi}{4}$.

Решение

Шаг 1. Находим производную функции *y*, зависящей от *x*, по формуле:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{4\cos t}{-2\sin t}=-2ctgt.$$

Шаг 2. Вычисляем значение найденной производной в точке, соответствующей значению параметра $t_0=\frac{3\pi}{4}$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_0=\frac{3\pi}{4}}=-2ctg\frac{3\pi}{4}=2.$$

Шаг 3. Находим значения *x(t)* и *y(t)* при $t_0=\frac{3\pi}{4}$:

$$x\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\cos\frac{3\pi}{4}=-\sqrt{2};\quad y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=4\sin\frac{3\pi}{4}=2\sqrt{2}.$$

Шаг 4. Составляем уравнение нормали к кривой в точке $M_0\left(x\left(t_0\right),y\left(t_0\right)\right)$, используя формулу:

$$y-y\left(t_0\right)=-\frac{1}{y'\left(t_0\right)}\left(x-x\left(t_0\right)\right).$$

Для заданной кривой получаем искомое уравнение нормали

$$y-2\sqrt{2}=-\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow x+2y-3\sqrt{2}=0.$$

Ответ: $x+2y-3\sqrt{2}=0.$

Вычисление дифференциала функции и применение дифференциала в приближенных вычислениях

Задача 15. Найти дифференциал функции $y=2arctg\sqrt{\sin x}$ в точке $x_0=\frac{\pi}{6}$.

Решение

Шаг 1. Находим производную функции:

$$y' = \frac{2}{1+\sin x} \cdot \left(\sqrt{\sin x}\right)' = \frac{2}{1+\sin x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{(1+\sin x)\sin x}.$$

Шаг 2. Вычисляем значение производной функции в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$:

$$y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\left(1+\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Шаг 3. Находим дифференциал функции в точке x_0 по формуле:

$$dy(x_0) = y'(x_0)\,dx.$$

Для заданной функции в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$ получим

$$dy = \frac{2\sqrt{3}}{3}dx.$$

Ответ: $dy = \frac{2\sqrt{3}}{3}dx.$

Задача 16. Найти приращение и дифференциал функции $y = -x^3 + 5$ в точке $x_0 = 2$, если приращение аргумента Δx равно –0,1. Определить абсолютную и относительную погрешности, которые получаются при замене приращения функции в этой точке ее дифференциалом.

Решение

Шаг 1. Вычисляем приращение функции в точке x_0 соответствующее приращению аргумента Δx:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = -(2 + \Delta x)^3 + 5 - (-2^3 + 5) =$$
$$= -8 - 12\Delta x - 6(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3 + 5 + 8 - 5 = -12\Delta x - 6(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3 =$$
$$= -12\cdot(-0{,}1) - 6\cdot(-0{,}1)^2 - (-0{,}1)^3 = 1{,}2 - 0{,}06 + 0{,}001 = 1{,}141.$$

Шаг 2. Находим дифференциал функции в точке x_0:

$$dy(x_0) = y'(x_0)\,dx = -3x_0^2\Delta x = -3\cdot 4\cdot(-0{,}1) = 1{,}2.$$

Шаг 3. Абсолютная погрешность δ при использовании приближенного равенства $\Delta y \approx dy$ равна

$$\delta = |\Delta y - dy| = |1{,}141 - 1{,}2| = 0{,}059.$$

Шаг 4. Относительная погрешность ε при замене приращения функции дифференциалом определяется по формуле:

$$\varepsilon = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|\cdot 100\% = \frac{0{,}059}{1{,}141}\cdot 100\% \approx 5{,}17\%.$$

Ответ: 1,141; 1,2; 0,059; 5,17%.

Задача 17. Найти приближенное значение площади круга, радиус которого равен 2,005 м.

Решение

Площадь круга выражается формулой $S = \pi R^2$. Полагая $R_0 = 2,\ \Delta R = 0{,}005$, имеем $\Delta S \approx dS = 2\pi R_0 \cdot \Delta R = 2\pi\cdot 2\cdot 0{,}005 = 0{,}02\pi.$

Значит, приближенное значение площади круга составляет

$$S \approx \pi R_0^2 + dS(R_0) = \pi\cdot 4 + 0{,}02\pi = 4{,}02\pi \approx 12{,}62\ (м^2).$$

Ответ: $12{,}62\ м^2$.

Вычисление производных и дифференциалов высших порядков

Задача 18. Точка движется прямолинейно по закону $S(t)=\frac{t^3}{3}-4t^2+5t-2$. В какой момент времени ускорение равно нулю?

Решение

Величина ускорения равна второй производной от функции *S(t)*. Последовательно дифференцируя функцию *S(t)*, получим

$$S'(t)=t^2-8t+5;\quad S''(t)=2t-8.$$

Решая уравнение $2t-8=0$, находим значение $t=4$. Таким образом, в момент времени $t=4$ ускорение равно нулю.

Ответ: 4.

Задача 19. Для функции $y=5^{3x}$ в точке $x=0$ найти производную двадцатого порядка.

Решение

Находим $y'(x)=5^{3x}\cdot 3\ln 5$, $y''(x)=5^{3x}\cdot(3\ln 5)^2$, следовательно

$$y^{(n)}(x)=5^{3x}\cdot(3\ln 5)^n,\quad n=1,2,\ldots .$$

Значит, $y^{(20)}(x)=5^{3x}\cdot(3\ln 5)^{20}$. Тогда $y^{(20)}(0)=5^{3\cdot 0}\cdot(3\ln 5)^{20}=(3\ln 5)^{20}$.

Ответ: $(3\ln 5)^{20}$.

Задача 20. Для функции $y(x)=x^2\cdot shx$ найти производную пятнадцатого порядка.

Решение

Заданная функция представляет собой произведение двух функций. В этом случае для нахождения n-ой производной нужно применить формулу Лейбница

$y^{(n)}(x)=\left(u(x)\cdot v(x)\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(u(x)\right)^{(n-k)}\left(v(x)\right)^{(k)}$, где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} \quad (m! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m,\ 0! = 1).$$

Для заданной функции в случае $n = 15$ формула Лейбница принимает вид:

$$y^{(15)}(x) = (x^2 shx)^{(15)} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (shx)^{(15-k)}\cdot (x^2)^{(k)} =$$

$$= C_{15}^0 (shx)^{(15)}(x^2)^{(0)} + C_{15}^1 (shx)^{(14)}(x^2)^{(1)} + C_{15}^2 (shx)^{(13)}(x^2)^{(2)}.$$

Так как $(x^2)^{(3)} = \ldots = (x^2)^{(15)} = 0,$ то все остальные слагаемые равны нулю. Находим производные от функции shx:

$$(shx)' = chx, \quad (shx)'' = shx, \ldots, \quad (shx)^{(14)} = shx, \quad (shx)^{(13)} = (shx)^{(15)} = chx.$$

Таким образом,

$$y^{(15)}(x) = 1\cdot chx\cdot x^2 + 15\cdot shx\cdot 2x + \frac{15\cdot 14}{1\cdot 2} chx\cdot 2 = x^2 chx + 30xshx + 210chx.$$

Ответ: $x^2 chx + 30xshx + 210chx.$

Задача 21. Найти вторую производную y''_{xx} от функции, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$

Решение

Вычислим сначала y'_x по формуле $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Находим

$$x'_t = e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t - \sin t),$$

$$y'_t = e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\sin t + \cos t).$$

Значит, $y'_x = \dfrac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}.$

Вторая производная вычисляется по формуле:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Найдем теперь $(y'_x)'_t$:

$$(y'_x)'_t=\left(\frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}\right)'_t=\frac{(-\sin t+\cos t)(\cos t-\sin t)-(\cos t+\sin t)(-\sin t-\cos t)}{(\cos t-\sin t)^2}=$$

$$=\frac{\cos^2 t-2\sin t\cos t+\sin^2 t+\cos^2 t+2\cos t\sin t+\sin^2 t}{(\cos t-\sin t)^2}=\frac{2}{(\cos t-\sin t)^2}.$$

Значит,

$$y''_{xx}=\frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}.$$

Ответ: $y''_{xx}=\dfrac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}.$

Задача 22. В точке $M_0(1;2)$ найти дифференциалы первого и второго порядков функции, заданной неявно уравнением $x^3+2y^2+xy-11=0.$

Решение

Шаг 1. Дифференцируем уравнение по *x*, считая *y* функцией, зависящей от *x*, и выражаем y' из полученного тождества:

$$3x^2+4yy'+y+xy'=0\Rightarrow y'=-\frac{3x^2+y}{x+4y}\Rightarrow y'\big|_{M_0(1;2)}=-\frac{3+2}{1+8}=-\frac{5}{9}.$$

Значит, $dy=-\dfrac{5}{9}dx.$

Шаг 2. Находим вторую производную, дифференцируя y' еще раз по *x*:

$$y''=-\frac{(6x+y')(x+4y)-(3x^2+y)(1+4y')}{(x+4y)^2}\Rightarrow$$

$$y''\big|_{M_0(1;2)}=-\frac{\left(6-\frac{5}{9}\right)(1+8)-(3+2)\left(1+4\left(-\frac{5}{9}\right)\right)}{(1+8)^2}=-\frac{496}{729}.$$

Таким образом, $d^2y=y''dx^2\Rightarrow d^2y=-\dfrac{496}{729}dx^2.$

Ответ: $-\dfrac{496}{729}dx^2.$

Вычисление пределов функций с помощью правила Лопиталя

Задача 23. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-1+\ln x}$.

Решение

Числитель и знаменатель стремятся к нулю при $x\to 1$, поэтому имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Воспользуемся правилом Лопиталя и перейдем к пределу отношения производных функций, стоящих в числителе и знаменателе данной дроби:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-1+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^3-3x^2+2\right)'}{\left(x^2-1+\ln x\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-6x}{2x+\dfrac{1}{x}}=\frac{3-6}{2+1}=-1.$$

Ответ: -1.

Задача 24. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3e^{2x}+1}{4e^{5x}-x}$.

Решение

Если $x\to +\infty$, то числитель и знаменатель неограниченно возрастают, поэтому имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Тогда с помощью правила Лопиталя получим:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3e^{2x}+1}{4e^{5x}-x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3\cdot 2e^{2x}}{4\cdot 5e^{5x}-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{3\cdot 2^2\cdot e^{2x}}{4\cdot 5^2\cdot e^{5x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3}{25}e^{-3x}=0.$$

Здесь правило Лопиталя применено дважды.

Ответ: 0.

Задача 25. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\sin \pi x\cdot ctg\dfrac{\pi}{2}x.$

Решение

В данном случае имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$, которая сводится к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$, которая затем раскрывается по правилу Лопиталя. Имеем:

$$\lim_{x\to 2}\sin\pi x\cdot ctg\frac{\pi}{2}x=\lim_{x\to 2}\frac{\sin\pi x}{tg\frac{\pi}{2}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\pi\cos\pi x}{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}2\cos\pi x\cdot\cos^2\frac{\pi}{2}x=2\cos 2\pi\cdot\cos^2\pi=2\cdot 1\cdot(-1)^2=2.$$

Ответ: 2.

Задача 26. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0+0}(\sin 3x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Решение

Этот предел содержит неопределенность вида 0^0. Обозначим функцию $(\sin 3x)^{\frac{1}{\ln x}}$ через y и прологарифмируем ее:

$$\ln y=\ln(\sin 3x)^{\frac{1}{\ln x}}=\frac{\ln\sin 3x}{\ln x}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0+0}\ln y=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{3x\cos 3x}{\sin 3x}=\left|\sin 3x\underset{x\to 0}{\sim}3x\right|=\lim_{x\to 0+0}\frac{3x\cos 3x}{3x}=1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln y=1$, то $\lim\limits_{x\to 0+0}y=e$.

Ответ: e.

Разложение функций по формуле Тейлора

Задача 27. Разложить функцию $f(x)=\sqrt{x-1}$ по формуле Тейлора второго порядка в окрестности точки $x_0=2$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Решение

Шаг 1. Запишем формулу Тейлора второго порядка в окрестности точки x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + R_2(x),$$

где $R_2(x) = \dfrac{f'''(c)}{3!}(x-x_0)^3$ — статочный член в форме Лагранжа.

Шаг 2. Находим значение функции и ее первой и второй производной в точке $x_0 = 2$. Имеем:

$$f(2) = \sqrt{2-1} = 1; \quad f'(2) = \left.\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right|_{x_0=2} = \frac{1}{2};$$

$$f''(2) = \left.\frac{1}{2}\left((x-1)^{-\frac{1}{2}}\right)'\right|_{x_0=2} = -\left.\frac{1}{4\sqrt{(x-1)^3}}\right|_{x_0=2} = -\frac{1}{4}.$$

Шаг 3. Вычисляем третью производную функции и записываем остаточный член $R_2(x)$ в форме Лагранжа:

$$f'''(x) = \frac{3}{8\cdot\sqrt{(x-1)^5}}; \quad R_2(x) = \frac{3}{8\cdot 3!\cdot\sqrt{(c-1)^5}}(x-2)^3 = \frac{(x-2)^3}{16\sqrt{(c-1)^5}}.$$

Шаг 4. Подставляем найденные значения $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$ и $R_2(x)$ в формулу и получаем искомое разложение:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{16\cdot\sqrt{(c-1)^5}}(x-2)^3.$$

Ответ: $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}(x-2) - \dfrac{1}{8}(x-2)^2 + \dfrac{1}{16\cdot\sqrt{(c-1)^5}}(x-2)^3.$

Задача 28. Разложить функцию $f(x) = xe^{5x+2}$ по формуле Маклорена n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано.

Решение

Шаг 1. Воспользуемся известной формулой Маклорена для функции e^t с остаточным членом в форме Пеано:

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + o\left(t^n\right).$$

Шаг 2. Представим заданную функцию в следующем виде: $f(x) = e^2 x \cdot e^{5x}$.

Шаг 3. Запишем разложение функции по формуле Маклорена, положив $t = 5x$. Получим:

$$f(x) = e^2 \cdot x\left(1 + 5x + \frac{(5x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(5x)^n}{n!} + o\left(x^n\right)\right) =$$

$$= e^2 \cdot \left(x + 5x^2 + \frac{5^2}{2!}x^3 + \ldots + \frac{5^n}{n!}x^{n+1}\right) + o\left(x^{n+1}\right) = e^2 x + 5e^2 x^2 + \frac{5^2 e^2}{2!}x^3 + \ldots + \frac{5^{n-1}e^2}{(n-1)!}x^n + o\left(x^n\right).$$

Ответ: $f(x) = e^2 x + 5e^2 x^2 + \frac{5^2 e^2}{2!}x^3 + \ldots + \frac{5^{n-1}e^2}{(n-1)!}x^n + o\left(x^n\right).$

Задача 29. Вычислить $\cos 5^\circ$ с точностью до 10^{-5}.

Решение

Шаг 1. Поскольку $5^\circ = \frac{\pi}{36}$, то для нахождения $\cos 5^\circ$ подставим $x = \frac{\pi}{36}$, в формулу Маклорена для функции $\cos x$ (см. подсказку к заданию 23). Получим:

$$\cos 5^\circ = 1 - \left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left(\frac{\pi}{36}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{(2n)!} + R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{36}\right).$$

Шаг 2. Запишем остаточный член в форме Лагранжа:

$$\left|R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{36}\right)\right| = \frac{|\cos c|}{(2n+2)!} \cdot \left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n+2}.$$

Шаг 3. Выясним, сколько членов в заданном разложении нужно взять, чтобы достичь требуемой точности вычисления. Для этого подберем n так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{36}\right)\right| < 10^{-5}.$$

Получаем

$$\left|R_{2n+1}\left(\frac{\pi}{36}\right)\right| = \left|\frac{\cos c}{(2n+2)!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n+2}\right| \le \frac{1}{(2n+2)!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n+2}.$$

Так как уже при $n=1$ достигается заданная точность вычислений, ибо

$$\left|R_3\left(\frac{\pi}{36}\right)\right| < \frac{1}{4!}\left(\frac{3{,}15}{36}\right)^4 < 2{,}5\cdot 10^{-6},$$

то искомое число приближенно равно

$$\cos 5^\circ \approx 1-\left(\frac{\pi}{36}\right)^2\cdot\frac{1}{2!} \approx 1-0{,}00381 = 0{,}99619.$$

Ответ: 0,99619.

Задача 30. С помощью формулы Тейлора вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)-1+\sqrt{1+4x}}{1-e^{-x^2}}$.

Решение

Представим функции $\ln(1-2x)$, $\sqrt{1+4x}$, e^{-x^2} по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, используя для этого известные разложения функций $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, e^x. Знаменатель дроби разложим до члена 2-го порядка включительно:

$$1-e^{-x^2} = 1-\left(1-x^2+o(x^2)\right) = x^2+o(x^2).$$

Аналогичным образом запишем числитель:

$$\ln(1-2x)-1+\sqrt{1+4x} = \left(-2x-\frac{(-2x)^2}{2}+o(x^2)\right)-1+$$
$$+\left(1+\frac{1}{2}(4x)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(4x)^2}{2!}+o(x^2)\right)=$$
$$=-2x-2x^2+o(x^2)-1+1+2x-2x^2+o(x^2) = -4x^2+o(x^2).$$

Таким образом, выражение, стоящее под знаком предела, принимает вид:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)-1+\sqrt{1+4x}}{1-e^{-x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{-4x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = -4.$$

Ответ: -4.

Применение дифференциального исчисления для исследования поведения функций и построения графиков

Задача 31. С помощью производной первого порядка найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$.

Решение

Шаг 1. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Найдем производную функции:

$$y' = 3x^3 - 3x^2 - 18x = 3x(x+2)(x-3).$$

Шаг 2. Найдем стационарные точки функции, являющиеся корнями уравнения $y' = 0$. Получим $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 3$.

Шаг 3. Исследуем знак производной на интервалах $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(0;3)$, $(3;+\infty)$. Полученные результаты занесем в таблицу 14:

Таблица 14.

Производная	$x \in D(y)$						
	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	Убывает	min	Возрастает	max	Убывает	min	Возрастает

Ответ: функция возрастает на интервалах $(-2;0)$, $(3;+\infty)$, убывает на интервалах $(-\infty;-2)$, $(0;3)$, $x=-2, x=3$ — точки минимума, $x=0$ — точка максимума.

Задача 32. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 1$ на отрезке $[1;9]$.

Решение

Шаг 1. Вычисляем производную данной функции:

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 120.$

Шаг 2. Решаем уравнение $f'(x) = 0$ и находим стационарные точки: $x_1 = -5,\ x_2 = 4.$

Шаг 3. Среди стационарных точек выбираем те, которые принадлежат отрезку $[1;9]$. Это точка $x_2 = 4.$

Шаг 4. Вычисляем значения функции в точке $x = 4$ и на концах отрезка, то есть в точках $x = 1,\ x = 9$:

$$f(4) = 2\cdot 4^3 + 3\cdot 4^2 - 120\cdot 4 + 1 = -303;$$
$$f(1) = 2\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 - 120\cdot 1 + 1 = -114;$$
$$f(9) = 2\cdot 9^3 + 3\cdot 9^2 - 120\cdot 9 + 1 = 622.$$

Шаг 5. Сравнивая полученные значения, выбираем наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Таким образом, наибольшее значение функции равно 622 и достигается в точке $x = 9$, наименьшее значение равно –303 и достигается в точке $x = 4$.

Ответ: $f_{\max} = f(9) = 622,\ f_{\min} = f(4) = -303.$

Задача 33. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{(x-5)^3}{x^2 - 10x + 9}$ и построить ее график.

Решение

Шаг 1. Находим область определения функции: $D(y) = (-\infty;1) \cup (1;9) \cup (9;+\infty).$

Шаг 2. Проверим, является ли функция четной или нечетной. Вычислим $f(-x) = \dfrac{(-x-5)^3}{(-x)^2 - 10(-x) + 9} = \dfrac{-(x+5)^3}{x^2 + 10x + 9}.$

Поскольку $f(-x) \neq f(x),\ f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Функция не является периодической.

Шаг 3. Находим точки пересечения графика с осями координат. Если $x=0$, то $y=-13\frac{8}{9}$; значит $B\left(0;-13\frac{8}{9}\right)$ — точка пересечения графика с осью Oy. Если $y=0$, то $x=5$, поэтому $A(5;0)$ — точка пересечения графика с осью Ox.

Шаг 4. Исследуем непрерывность функции. Поскольку данная функция является элементарной, она непрерывна на всей своей области определения *D(y)*. Точки $x=1$ и $x=9$ не принадлежат *D(y)*, а следовательно, являются точками разрыва. Исследуем характер разрыва в указанных точках. Для этого вычислим односторонние пределы функции в точках $x=1$ и $x=9$. Имеем:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-5)^3}{(x-1)(x-9)}=\frac{-64}{(-0)(-8)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-5)^3}{(x-1)(x-9)}=\frac{-64}{(+0)(-8)}=+\infty.$$

Значит, $x=1$ — точка разрыва 2-го рода, а прямая $x=1$ — двусторонняя вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to 9-0}\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to 9-0}\frac{(x-5)^3}{(x-1)(x-9)}=\frac{64}{8\cdot(-0)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 9+0}\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to 9+0}\frac{(x-5)^3}{(x-1)(x-9)}=\frac{64}{8\cdot(+0)}=+\infty.$$

Следовательно, $x=9$ — точка разрыва 2-го рода, а прямая $x=9$ — двусторонняя вертикальная асимптота.

Шаг 5. Находим наклонные асимптоты $y=kx+b$ графика функции. Для этого вычисляем следующие пределы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-5)^3}{(x^2-10x+9)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1-\frac{5}{x}\right)^3}{1-\frac{10}{x}+\frac{9}{x^2}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-15x^2+75x-125-x^3+10x^2-9x}{x^2-10x+9}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x^2+66x-125}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5+\frac{66}{x}-\frac{125}{x^2}}{1-\frac{10}{x}+\frac{9}{x^2}}=-5.$$

Значит, прямая $y=x-5$ является наклонной асимптотой графика функции при $x\to\pm\infty$.

Шаг 6. Определяем промежутки монотонности и экстремумы данной функции. Находим первую производную функции

$$y'=\frac{3(x-5)^2(x^2-10x+9)-(2x-10)(x-5)^3}{(x^2-10x+9)^2}=\frac{(x-5)^2\cdot(x^2-10x-23)}{(x-1)^2\cdot(x-9)^2}.$$

Определяем стационарные точки функции, решая уравнение $y'=0$. Это точки $x_1=5-4\sqrt{3}\approx-1{,}9$; $x_2=5$, $x_3=5+4\sqrt{3}\approx 11{,}9$.

Исследуем знак y' и находим интервалы монотонности и точки экстремума. Составляем таблицу 15:

Таблица 15.

Производная	$x\in D(y)$							
	$(-\infty; 5-4\sqrt{3})$	$5-4\sqrt{3}$	$(5-4\sqrt{3}; 1)$	$(1; 5)$	5	$(5; 9)\cup(9; 5+4\sqrt{3})$	$5+4\sqrt{3}$	$(5+4\sqrt{3}; +\infty)$
y'	+	0	–	–	0	–	0	+
y	Возрастает	Точка максимума	Убывает	Убывает	Нет экстремума	Убывает	Точка минимумы	Возрастает

Вычислим значения функции в точках экстремума $x_1 = 5 \pm 4\sqrt{3}$. Получаем

$y_{\max}\left(5-4\sqrt{3}\right) = -6\sqrt{3}$, $y_{\min}\left(5+4\sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3}$.

Таким образом, точка $C\left(5-4\sqrt{3};-6\sqrt{3}\right)$ — это точка локального максимума, а $D\left(5+4\sqrt{3};6\sqrt{3}\right)$ — локального минимума функции.

Шаг 7. Определим промежутки выпуклости и точки перегиба. Находим вторую производную функции

$$y'' = \frac{32\cdot\left(x-5\right)\cdot\left(x^2-10x+73\right)}{\left(x-1\right)^3\left(x-9\right)^3}.$$

Точки из области определения первой производной, в которых вторая производная обращается в нуль или не определена, являются точками возможного перегиба графика функции. В нашем случае это точка $x=5$. Исследуем знак второй производной. Поскольку $f''(x)>0$ при $x\in\left(1;5\right)\cup\left(9;+\infty\right)$, то на этих интервалах график функции является выпуклым вниз. Аналогично, $f''(x)<0$ при $x\in\left(-\infty;1\right)\cup\left(5;9\right)$, то на этих интервалах график функции является выпуклым вверх. Значит, точка $x=5$ — это точка перегиба.

Шаг 8. На основании всех полученных результатов строим график функции $y=\dfrac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}$ **(**рис.2.1**):**

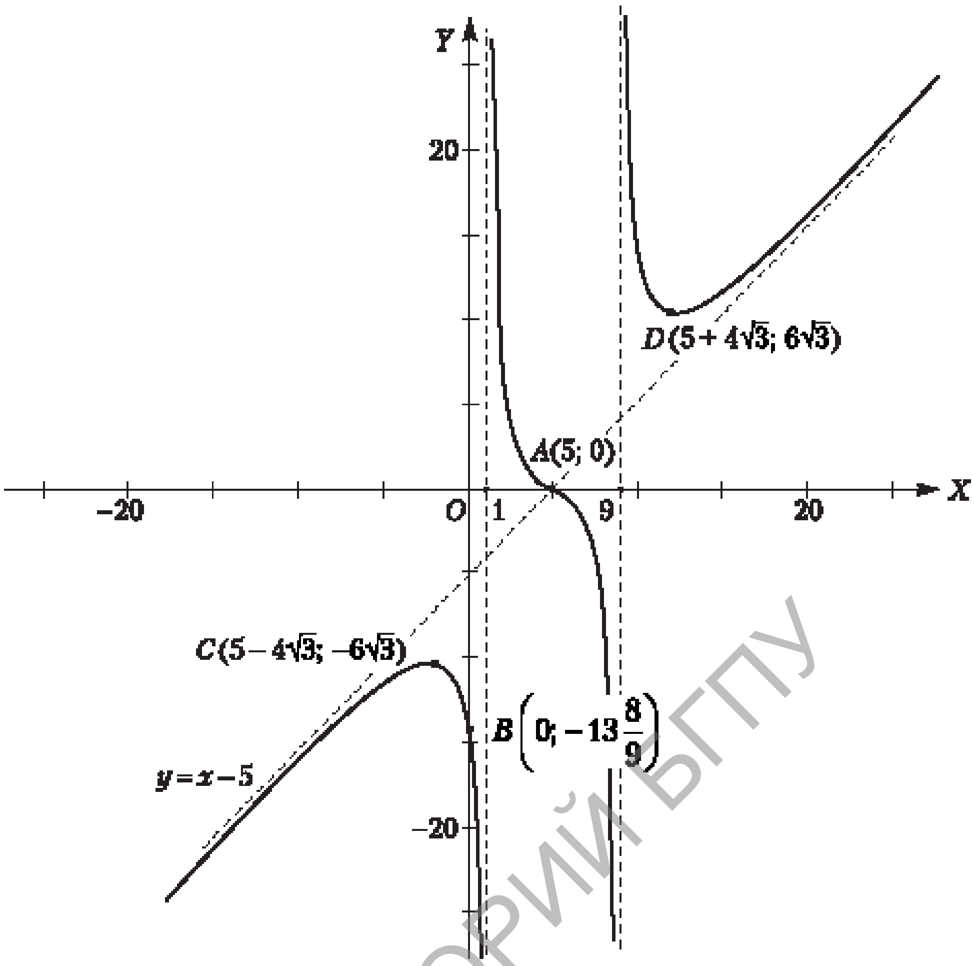

Рис.2.1

Тесты для самопроверки с указаниями и подсказками

Задание 1. Найдите приращение $\Delta f(x_0, \Delta x)$ функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 1$, если $\Delta x = 0{,}1$, используя формулу $\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Варианты ответов: 1) 0,1; 2) 0,21; 3) 0,01; 4) 1,21; 5) 1.

Правильный ответ: 2.

Задание 2. Дайте определение производной функции в точке x_0. Какой из следующих пределов является производной функции y_i (i = 1, 2) в точке x_0, если $y_1 = 4x^3 - 1$, $y_2 = \cos 3x$?

Варианты ответов представлены в табл. 16, 17:

Таблица 16.

№ ответа Функция y_i	1	2

y_1	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(4x_0+\Delta x)^3-4x_0^3}{\Delta x}$	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(4x_0+\Delta x)^3-4x_0-2}{x_0}$
y_2	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos 3(x_0+\Delta x)-\cos 3x_0}{\Delta x}$	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(3x_0+\Delta x)-\cos 3x_0}{\Delta x}$

Таблица 17.

№ ответа **Функция** y_i	**3**	**4**
y_1	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{4(x_0+\Delta x)^3-4x_0^3}{\Delta x}$	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(4x_0+\Delta x)^3-4x_0^3-2}{\Delta x}$
y_2	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos 3x_0-\cos 3\Delta x}{\Delta x}$	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos 3(x_0+\Delta x)-\cos 3x_0}{x_0}$

Правильные ответы представлены в табл. 18:

Таблица 18.

Функция	y_1	y_2
№ ответа	3	1

Вспомните, в чем состоит геометрический смысл производной, какой вид имеет уравнение касательной к графику дифференцируемой функции (см. **подсказки 1 и 2** к **заданиям 3–5**), и ответьте на вопросы, сформулированные в **заданиях 3–5.**

ПОДСКАЗКА 1 К ЗАДАНИЯМ 3–5

Геометрический смысл производной

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 численно равна тангенсу угла α наклона касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$, т. е. $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$.

ПОДСКАЗКА 2 К ЗАДАНИЯМ 3–5

Уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$, имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Задание 3. Чему равен тангенс угла наклона параболы $y = \frac{x^2}{2}$ к оси Ox в точке с абсциссой $x_0 = -1$?

Варианты ответов: 1) $\frac{1}{2}$; 2) –1; 3) 1; 4) 0; 5) $-\frac{1}{2}$.

Правильный ответ: 2.

Задание 4. В какой точке $M_0(x_0; y_0)$ касательная к кривой $y = e^x$ образует угол 45° с осью Ox?

Варианты ответов: 1) $\left(-1; \frac{1}{e}\right)$; 2) $(1; e)$; 3) $(1; 0)$; 4) $(0; 1)$; 5) $(0; 0)$.

Правильный ответ: 4.

Задание 5. Составьте уравнения касательных к графикам функций y_i (i = 1, 2, 3) в точках с заданными абсциссами:

5.1) $y_1 = x^2 - x$, $x_0 = 0$; 5.2) $y_2 = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$;

5.3) $y_3 = \sqrt{x} + 2$, $x_0 = 4$.

Варианты ответов представлены в табл. 19:

Таблица 19.

№ ответа № задачи	1	2	3	4
5.1	$y = 2x - 1$	$y = x$	$y = x + 1$	$y = -x$
5.2	$y = x - 2$	$y = -x - 2$	$y = x$	$y = -x + 2$
5.3	$y = \frac{x}{4} + 3$	$y = \frac{x}{4} + 5$	$y = 4x + 3$	$y = x$

Правильные ответы представлены в табл. 20:

Таблица 20.

№ задачи	**5.1**	**5.2**	**5.3**
№ ответа	4	2	1

Задание 6. Повторите понятие сложной функции и формулу, по которой

вычисляется производная сложной функции (см. подсказка).

Чему равна производная функции y_i ($i = 1, 2, 3, 4$), если

$y_1 = \sin x^3$; $y_2 = \sin^3 x$; $y_3 = \operatorname{tg}\sqrt{x}$; $y_4 = \sqrt{\operatorname{tg} x}$?

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 6

Производная сложной функции

Если задана сложная функция $F(x) = f(u(x))$, причем в точке x существует производная $u'(x)$ внутренней функции $u(x)$, а в соответствующей точке $u(x)$ существует производная $f'(u)$ внешней функции $f(u)$ то производная сложной функции $F(x)$ в точке x вычисляется по формуле $F'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$.

Варианты ответов представлены в табл. 21:

Таблица 21.

№ ответа Функция y_i	1	2	3	4	5
y_1	$\cos x^3$	$\cos x^3 \cdot 3x^2$	$-\cos x^3 \cdot 3x^2$	$3\sin x^2$	$-\cos x^3$
y_2	$3\sin^2 x \cdot \cos x$	$3\sin^2 x$	$3\cos^2 x$	$-3\sin^2 x \cdot \cos x$	$-3\cos^2 x$
y_3	$\dfrac{\sqrt{x}}{\cos^2\sqrt{x}}$	$-\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$	$-\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2 x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$	$\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}$
y_4	$\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cdot\cos^2 x}$	$-\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cdot\cos^2 x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cdot\sqrt{x}}$

Правильные ответы представлены в табл. 22:

Таблица 22.

Функция	y_1	y_2	y_3	y_4
№ ответа	2	1	4	3

Задание 7. Вспомните, как определяются функции, заданные неявно, и функции, заданные параметрическими уравнениями, а также формулы, по которым вычисляются производные этих функций. С их помощью вычислите

производные $\dfrac{dy}{dx}$ для функций, заданных следующими условиями:

7.1) $y^3 + xy - x^3 = 1$; 7.2) $\begin{cases} x = 2sh3t, \\ y = ch3t. \end{cases}$

Варианты ответов представлены в табл. 23:

Таблица 23.

№ ответа № задачи	1	2	3	4
7.1	$\dfrac{3x^2 - y}{x + 3y^2}$	$\dfrac{3x^2 - 3y^2 - y}{x}$	$\dfrac{3x^2 - 3y^2}{x}$	$\dfrac{3x^2 - y + 1}{x + 3y^2}$
7.2	$2 \text{ th } 3t$	$-2 \text{ cth } 3t$	$\dfrac{1}{2} \text{ cth } 3t$	$\dfrac{1}{2} \text{ th } 3t$

Правильные ответы представлены в табл. 24:

Таблица 24.

№ задачи	7.1	7.2
№ ответа	1	4

Задание 8. Повторите определение дифференциала и формулу для его вычисления (см. подсказку). Ответьте на вопрос: чему равен дифференциал функции y_i $(i = 1, 2)$ в заданной точке x_0, если в обоих случаях приращение $\Delta x = 0{,}1$:

8.1) $y_1 = \ln x,\ x_0 = 2$; 8.2) $y_2 = \sqrt{x+1},\ x_0 = 3$?

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 8

Дифференциал функции $f\ \ x$ в точке x_0 вычисляется по формуле

$$df\ \ x_0, \Delta x\ \ = f'\ \ x_0\ \ \Delta x, \text{ где } \Delta x = x - x_0.$$

Правильные ответы представлены в табл. 25:

Таблица 25.

№ задачи	8.1	8.2
Ответ	0,05	0,025

Задание 9. Используя определение второй производной как производной от первой производной: $y''(x) = (y'(x))'$, найдите вторую производную функций 9.1, 9.2 в указанных точках.

9.1) $y_1 = e^{x^2}$, $x_0 = 0$; 9.2) $y_2 = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \pi$.

Правильные ответы представлены в табл. 26:

Таблица 26.

№ задачи	9.1	9.2
Ответ	2	0

Задание 10. Изучите правила Лопиталя вычисления пределов функций и, используя подсказку, вычислите следующие пределы:

10.1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-2x+1}{2x^4-x-1}$; 10.2) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$; 10.3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 10

Правила Лопиталя

Пусть требуется вычислить $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Про функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ известно, что в некоторой окрестности точки x_0

1) $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы, причем $\varphi'(x_0) \neq 0$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$ (или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \infty$).

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует и искомый предел, при этом $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Правильные ответы представлены в табл. 27:

Таблица 27.

№ задачи	10.1	10.2	10.3
Ответ	$3/7$	$-3/2$	0

Задание 11. Постройте графики следующих элементарных функций:

$$y_1 = x^2;\ \ y_2 = x^3;\ \ y_3 = \sqrt{x};\ \ y_4 = \frac{1}{x};\ \ y_5 = \frac{1}{x^2};$$

$$y_6 = 2^x;\ \ y_7 = \log_2 x;\ \ y_8 = \log_{3/5} x;\ \ y_9 = \mathrm{tg}\, x;\ \ y_{10} = \mathrm{ctg}\, x;$$

$$y_{11} = \sin x;\ \ y_{12} = \arcsin x;\ y_{13} = \mathrm{arctg}\, x;\ \ y_{14} = \mathrm{arcctg}\, x.$$

Основываясь на наглядном (геометрическом) представлении о монотонности функции, выберите из функций $y_1 - y_{14}$ те, которые удовлетворяют условиям:

11.1) функция монотонно возрастает на всей области определения;

11.2) функция монотонно убывает на всей области определения;

11.3) функция меняет характер монотонности.

Правильные ответы представлены в табл. 28:

Таблица 28.

№ условия	11.1	11.2	11.3
Функция	y_2, y_3, y_6, y_7, y_9, y_{12}, y_{13}	y_4, y_8, y_{10}, y_{14}	y_1, y_5, y_{11}

Задание 12. Используя графики функций $y_1 - y_{14}$, построенные в задании 11, укажите среди них такие, которые удовлетворяют условиям:

12.1) функция выпукла вверх на всей области определения;

12.2) функция выпукла вниз на всей области определения;

12.3) функция меняет направление выпуклости.

Правильные ответы представлены в табл. 29:

Таблица 29.

№ условия	12.1	12.2	12.3
Функция	y_3, y_7	y_1, y_5, y_6, y_8	$y_2, y_4, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}$

Задание 13. Постройте графики функций $y_1 - y_4$

$$y_1 = \begin{cases} (x-1)^2, & x \le 1, \\ \ln x, & x > 1, \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} -2^x, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

$$y_3 = \begin{cases} x + \dfrac{\pi}{2}, & x < -\pi/2, \\ \cos x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi, \\ 2(x-\pi) - 1, & x > \pi, \end{cases} \quad y_4 = \begin{cases} \left(x + \pi/2\right)^2, & x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x, & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ -\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2, & x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Не проводя вычислений, на основании построенных графиков для каждой функции $y_1 - y_4$ найдите:

13.1) точки (если они есть), в которых производная не существует;

13.2) интервалы монотонного возрастания функции;

13.3) интервалы монотонного убывания функции;

13.4) точки минимума и максимума функции (если они есть);

13.5) интервалы выпуклости вверх;

13.6) интервалы выпуклости вниз;

13.7) точки перегиба (если они есть).

Варианты ответов представлены в табл. 30:

Таблица 30.

№ ответа № задачи	1	2	3	4	5	6
13.1	всюду диф-ферен-цируема	$x=-1$	$x=1$	$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$	$x=0$	$x_1=-\pi/2$ $x_2=\pi$
13.2	$\left(-\infty,\dfrac{\pi}{2}\right)$	$-\infty,0\ \cup$ $\cup\ \pi,+\infty$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	нет интерва-лов возрас-тания	$1,+\infty$	$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$
13.3	$\left(-\infty,-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)$	$-\infty,0\ \cup$ $\cup\ 0,+\infty$	$-\infty,-1$	$0,\pi$	$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right)$	$-\infty,1$
13.4	$x=0$ - точка max $x=\pi$ - точка min	$x=1$ - точка min	$x=-\dfrac{\pi}{2}$ – точка min, $x=\dfrac{\pi}{2}$ – точка max	нет точек экстре-мума	$x=0$ - точка min	$x=-\dfrac{\pi}{2}$ – точка max
13.5	$1,+\infty$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup$ $\cup\left(\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)$	$-\infty,0$	$\left(-\infty,\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	нет интерва-лов выпуклос-ти вверх
13.6	$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$	$-\infty,1$	$-\infty,-\pi/2\ \cup$ $\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	$0,+\infty$
13.7	$x_1=-\pi/2$ $x_2=\pi$	нет точек перегиба	$x=0$	$x=\dfrac{\pi}{2}$	$x=1$	$x=-1$

Таблица правильных ответов:

Таблица 31.

№ задачи Функция	13.1	13.2	13.3	13.4	13.5	13.6	13.7
y_1	3	5	6	2	1	4	2
y_2	5	4	2	5	3	6	2
y_3	6	2	4	1	5	3	4
y_4	4	3	1	4	2	5	3

Задание 14. Для функции y_i (i = 1, 2, 3, 4) найдите интервалы возрастания (см. подсказку).

14.1) $y_1 = \dfrac{1}{x^2}$; 14.2) $y_2 = \left|x^2 - 3x\right|$; 14.3) $y_3 = \sqrt[3]{|x|}$; 14.4) $y_4 = x^3$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 14

Достаточные условия монотонности

Если на интервале $a;b$ выполняется неравенство $f'\ x > 0$ $\ f'\ x < 0$, то функция $y = f\ \ x$ возрастает (убывает) на этом интервале.

Варианты ответов представлены в табл. 32:

Таблица 32.

№ ответа № функции	1	2	3	4
14.1	$-\infty, 0$	$0, +\infty$	$\varnothing$	R
14.2	$-\infty; 3/2$	$3/2; +\infty$	$0; 3/2 \cup 3; +\infty$	$-\infty; 0 \cup 3/2; 3$
14.3	$\varnothing$	$-\infty, 0$	$0, +\infty$	R
14.4	$-\infty, 0$	$\varnothing$	$0, +\infty$	R

Правильные ответы представлены в табл. 33:

Таблица 33.

№ функции	14.1	14.2	14.3	14.4

№ ответа	1	3	3	4

Задание 15. Повторите определение выпуклых (вверх и вниз) на интервале функций и достаточные условия выпуклости (см. подсказку). Для функций из **задания 14** найдите интервалы, на которых графики этих функций являются выпуклыми вверх.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 15

Достаточные условия выпуклости

Если на интервале $a; b$ выполняется неравенство $f''\ x > 0 \quad f''\ x < 0$, то график функции $y = f\ x$ является выпуклым вниз (вверх) на этом интервале.

Варианты ответов представлены в табл. 34:

Таблица 34.

№ ответа № функции	1	2	3	4
15.1	$-\infty, 0$	$0, +\infty$	$\varnothing$	R
15.2	$-\infty; \,^{3}\!/_{2}$	$0; 3$	$0; \,^{3}\!/_{2} \ \cup\ 3; +\infty$	$-\infty; 0 \ \cup\ 3; +\infty$
15.3	$-\infty; 0 \ \cup\ 0; +\infty$	$\varnothing$	$-\infty, 0$	$0, +\infty$
15.4	$\varnothing$	R	$0, +\infty$	$-\infty, 0$

Правильные ответы представлены в табл. 35:

Таблица 35.

№ функции	15.1	15.2	15.3	15.4
№ ответа	3	2	1	4

Задание 16. Вспомните определение и способ нахождения точек экстремума функции.

Найдите точки максимума функции y_i (i = 1, 2):

16.1) $y_1 = 2x^3 + 3x^2 - 1$; 16.2) $y_2 = x^2 e^{-x}$.

Варианты ответов представлены в табл. 36:

Таблица 36.

№ ответа № функции	**1**	**2**	**3**	**4**
16.1	$x = 0$	$x = -1$	$x_1 = 0$ $x_2 = -1$	$\varnothing$
16.2	$x_1 = 0$ $x_2 = -2$	$x = 0$	$x = 2$	$x = -2$

Правильные ответы представлены в табл. 37:

Таблица 37.

№ функции	**16.1**	**16.2**
№ ответа	2	3

Задание 17. Найдите наименьшее значение функции y_i (i = 1, 2) на заданном отрезке, используя для этого алгоритм из подсказки.

17.1) $y_1 = x^3 - 3x - 7,\ x \in [0; 2]$;

17.2) $y_2 = x^2 + \dfrac{16}{x},\ x \in [1; 4]$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 17

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

1.Найдите $f'(x)$.

2.Решите систему $\begin{cases} f'(x) = 0, \\ x \in [a; b]. \end{cases}$

Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — решения этой системы.

3.Вычислите значения функции в указанных точках:

$f(x_1), \ldots, f(x_k), f(a), f(b)$.

4.Среди множества найденных значений выберите максимальное и минимальное. Это и будут искомые наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Правильные ответы представлены в табл. 38:

Таблица 38.

№ функции	**17.1**	**17.2**
Ответ	–9	12

Задание 18. Вспомните определение точки перегиба и достаточные условия перегиба (см. подсказку). Найдите точки перегиба функции y_i ($i = 1, 2$):

18.1) $y_1 = \frac{x^6}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x$; 18.2) $y_2 = xe^x$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 18

Достаточные условия перегиба

Если в точке x_0 функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) существует $f'(x_0)$;

2) $f''(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует;

3) слева и справа от точки x_0 функция имеет различные направления выпуклости,

то x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.

Варианты ответов представлены в табл. 39:

Таблица 39.

№ ответа **№ функции**	**1**	**2**	**3**	**4**
18.1	$x = 0$	$x_1 = 0$ $x_2 = 1$	$x_1 = -1$ $x_2 = 1$	$\varnothing$
18.2	$x = -1$	$x = -2$	$\varnothing$	$x = 0$

Правильные ответы представлены в табл. 40:

Таблица 40.

№ функции	18.1	18.2
№ ответа	3	2

Задание 19. Повторите, при каких условиях и каким образом можно разложить функцию по формуле Тейлора. В каком виде можно записать остаточный член формулы Тейлора?

Пусть функция $f(x)$ разложена по формуле Тейлора:

$$f(x)=1-2(x+1)+3(x+1)^2-7(x+1)^5+R_5(x).$$

Ответьте на следующие вопросы:

19.1) Чему равен порядок этой формулы Тейлора?

19.2) В окрестности какой точки x_0 записано это разложение?

19.3) Чему равно $f(x_0)$?

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 19

Формула Тейлора для функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+R_n(x),$$

где x_0 — центр разложения,

n — порядок формулы,

$R_n(x)$ — остаточный член,

$c_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ — k-й коэффициент Тейлора, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Если $x_0 = 0$, формула Тейлора, называемая формулой Маклорена, имеет вид: $f(x)=f(0)+f'(0)+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$.

Правильные ответы представлены в табл. 41:

Таблица 41.

№ задачи	16.1	16.2	16.3
Ответ	5	–1	1

Задание 20. Используя вид коэффициентов Тейлора (см. подсказку к заданию 19), для функции

$$f(x)=1-2(x+1)+3(x+1)^2-7(x+1)^5+R_5(x)$$

найдите

20.1) $f'(-1)$; 20.2) $f''(-1)$; 20.3) $f'''(-1)$.

Правильные ответы представлены в табл. 42:

Таблица 42.

№ задачи	20.1	20.2	20.3
Ответ	–2	6	0

Задание 21. Используя представление остаточного члена $R_n(x)$ формулы Тейлора в формах Пеано или Лагранжа (см. подсказку), ответьте на следующий вопрос: какое из приведенных ниже выражений

1) $o\left((x+1)^2\right)$; 2) $o\left((x-1)^2\right)$; 3) $o\left((x-1)^3\right)$;

4) $c(x-1)^3$; 5) $\dfrac{3c^2}{2}(x-1)^3$; 6) $6c(x-1)^3$

является остаточным членом $R_2(x)$ разложения функции $f(x)=\dfrac{x^4}{4}$ по формуле Тейлора с центром в точке $x_0 = 1$ в форме

21.1) Лагранжа; 21.2) Пеано?

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 21

Формы остаточного члена $R_n(x)$ формулы Тейлора:

Форма Пеано: $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$.

Форма Лагранжа: $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где $c\in(x_0;x)$.

Правильные ответы представлены в табл. 43:

Таблица 43.

№ задачи	**21.1**	**21.2**
№ ответа	4	2

Задание 22. Найдите разложение функции $y = \operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена 3-го порядка.

Варианты ответов представлены в табл. 44:

Таблица 44.

№ ответа	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Разложение	$x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$	$x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$	$x+2x^3+o(x^3)$	$1+x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$	$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

Правильный ответ: 2.

Задание 23. Повторите разложения по формуле Маклорена основных элементарных функций (**см. подсказку**) и выполните следующие задания: для приведенных ниже функций 23.1–23.3 напишите разложения по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано:

23.1) $y_1 = e^{-x}$; 23.2) $y_2 = \sin 2x$; 23.3) $y_3 = \frac{x}{3}\ln(1+x)$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 23

Разложения некоторых элементарных функций по формуле Маклорена

$$1.\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n);$$

$$2.\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1});$$

$$3.\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n});$$

$$4.\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + o(x^n);$$

5.
$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} + o(x^n).$$

Варианты ответов представлены в табл. 45:

Таблица 45.

№ ответа № функции	**1**	**2**	**3**
23.1	$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}x^k + o(x^n)$	$-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	$-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!} + o(x^{n+1})$
23.2	$\sum_{k=0}^{n}\frac{2(-1)^k}{(k+1)!}x^{2k+1} +$ $+o(x^{2n+1})$	$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot 2^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1} +$ $+o(x^{2n+1})$	$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot 2^{2k}}{(2k)!}x^{2k} +$ $+o(x^{2n+1})$
23.3	$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{3k}x^k + o(x^n)$	$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{3^k\cdot k}x^{k+1} + o(x^{n+1})$	$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{3k}x^{k+1} + o(x^{n+1})$

Правильные ответы представлены в табл. 46:

Таблица 46.

№ функции	**23.1**	**23.2**	**23.3**
№ ответа	1	2	3

Математический диктант «Техника дифференцирования»

Вариант 1

1. Найти $f'(x)$, если $f(x) = x\sqrt{64-x^2} + 64\arcsin\left(\frac{x}{8}\right).$

2. Вычислить дифференциал $df(x)$ функции $f(x)$, если

$f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{x+\sqrt{x}}.$

3. Под каким углом график функции $y = \cos x$ пересекает ось Ox?

4. Найти левую и правую производные функции $f(x) = \left|x^2 - 5x + 6\right|$ в точке $x_0 = 3.$

5. Вычислить $f'(x)$, если $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}.$

6. Найти $dy(M_0)$, если известна точка $M_0(2;1)$, а функция *y(x)* задана неявно уравнением $xy - \sqrt[3]{xy^2+6} = 0.$

7. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln\cos t. \end{cases}$$

8. Проверить, является ли функция $y = C_1 + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{5}{2}x,$ где $C_1, C_2 \in R,$ решением уравнения $y'' - 2y' = e^{2x} + 5.$

9. Найти пятый дифференциал $d^5f(x)$ функции $f(x)$, если $f(x) = x\ln x.$

10. Для функции $f(x) = \sin^2 x$ написать формулу n-ой производной.

Вариант 2

1. Найти $f'(x)$, если $f(x) = 2\sqrt{x^3}\cdot(\ln x^3 - 2).$

2. Вычислить дифференциал $df(x)$ функции $f(x)$, если

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

3. Под каким углом график функции $y = \sin x$ пересекает ось Ox?

4. Найти левую и правую производные функции $f(x) = \left|2^x - 2\right|$ в точке $x_0 = 1$.

5. Вычислить $f'(x)$, если $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$.

6. Найти $dy(M_0)$, если известна точка $M_0(4; 2)$, а функция *y(x)* задана неявно уравнением $xe^{\frac{x}{y^2}-1} - 2y = 0$.

7. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = 2\operatorname{cosec}^2 t. \end{cases}$

8. Проверить, является ли функция $y = \left(C_1 + C_2 x + \dfrac{x^2}{2}\right)e^{-x} + \dfrac{1}{4}e^x$, где $C_1, C_2 \in R$, решением уравнения $y'' + y' + y = e^x + e^{-x}$.

9. Найти четвертый дифференциал $d^4 f(x)$ функции $f(x)$, если $f(x) = e^x \cos x$.

10. Для функции $f(x) = \cos^2 x$ написать формулу n-ой производной.

Ответы к математическому диктанту «Техника дифференцирования»

Вариант 1

1. $2\sqrt{64 - x^2}$, $|x| < 8$;
2. $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x^2(x+\sqrt{x})}}dx$;
3. $45°$ и $135°$;
4. –1; 1;
5. $-(\cos x)^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{\ln\cos x + x \operatorname{tg} x}{x^2}$;

6. $-\frac{11}{20}dx$;

7. $-\frac{1+\sin^2 t}{\cos^4 t}$;

8. Является;

9. $-\frac{6}{x^4}dx^5$;

10. $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in N.$

Вариант 2

1. $9\sqrt{x}\ln x$;

2. $\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$;

3. $45°$ и $135°$;

4. $-\ln 4;\ \ln 4$;

5. $(x+1)^{\frac{1}{\sin x}-1}\cdot\frac{(x+1)\cos x\cdot\ln(x+1)-\sin x}{\sin^2 x}$;

6. $\frac{1}{3}dx$;

7. $-\frac{1}{\cos^3 2t}$;

8. Не является;

9. $-4e^x\cos x dx^4$;

10. $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in N.$

Содержание

Учебное издание

ЧЕРНЯК Аркадий Александрович

ЧЕРНЯК **Ж**анна Альбертовна

ВАСИЛЕЦ Сергей Иванович

БОГДАНОВИЧ Сергей Адамович

Практикум по математическому анализу, алгебре и геометрии ч. 1.

Редактор Л.М. Кореневская

Техническое редактирование и компьютерная верстка А.А. Покало

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная.

Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная.

Усл. печ. л. Уч.–изд. л.

Тираж 100 экз. Заказ

Издатель и полиграфическое исполнение:

Учреждение образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка».

ЛИ № 02330/0494368 от 16.03.09.

ЛИ № 02330/0494171 от 03.04.09.

220050, Минск, Советская, 18. http://izdat.bspu.unibel.by/