Н. Т. Стельмашук, В. А. Шилинец

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ В СОВРЕМЕННОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Функциональные зависимости в природе и обществе существовали всегда. Однако для создания современной теории функций математикам пришлось пройти долгий, полный драматизма путь.

Первые шаги к определению понятия функции были сделаны в Древнем Египте и Древнем Вавилоне, где были составлены таблицы, указывающие зависимость между величинами. Так, чтобы облегчить вычисления, вавилоняне составили таблицы квадратов и кубов чисел, таблицы обратных значений чисел, таблицы для суммы квадратов чисел и их кубов, т. е., говоря современным языком, это было табличное задание функций $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2 + x^3$.

Многое из того, что делали древнегреческие математики, тоже могло привести к возникновению понятия о функции: они изучали зависимости между отрезками диаметров и хорд в круге, но создать общее понятие функции греки не смогли.

Ситуация изменилась, когда Декартом была введена в математику переменная величина. Термин «функция» впервые начали применять в XVII веке Лейбниц и его ученики, не давая при этом чёткого определения этого понятия. Лишь И.Бернулли дал определение функции, свободное от геометрического языка: «Функцией переменной величины называется количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных». Н. Я. Виленкин пишет [1]: «Оно привело в восхищение престарелого Лейбница, увидевшего, что отход от геометрических образов знаменует новую эпоху в изучении функций». (Слово функция происходит от латинского слова «функтус» – выполнять).

Много споров, как ни странным это нам кажется теперь, было о том, можно ли выразить одну и ту же функцию разными аналитическими выражениями. После работ Фурье в XIX веке стало ясно, что несущественно, каким аналитическим выражением задана функция, а существо дела в том, какие значения принимает функция при заданных значениях аргумента.

Н. Я. Виленкин замечает [1]: «После длительного уточнения этой идеи, в которой приняли участие Фурье, Н. И. Лобачевский, немецкий математик Дирихле и другие учёные, общепризнанным стало следующее определение: «Переменная величина у называется функцией переменной величины х, если каждому значению величины x соответствует единственное определённое значение величины y». Такое определение подразумевает числовую функцию, заданную аналитическим выражением.

В конце XIX и начале XX веков на базе теории множеств творцы этой теории Г. Кантор и Р. Дедекинд дали общее определение отображения – функции (термины «отображение» и «функция» здесь синонимы).

Определение. Пусть X и Y – два множества. Говорят, что задано отображение f множества X в множество Y, если для каждого элемента x из X указан соответствующий элемент y из Y. Этот элемент y называют образом элемента x и обозначают $f(x)$. (Легко заметить, что числовая функция – это отображение числового множества в числовое множество).

Приведём одну из возможных модификаций определения функции в духе Кантора-Дедекинда.

Определение. Пусть X и Y – два множества. Соответствие f, при котором каждому x из X отвечает единственный элемент $y \in Y$, называется функцией.

Указанное определение дало возможность построить теорию функционалов и операторов, нашедших широкое применение в современных научных теориях, особенно в математике и теоретической физике. Эти вопросы изучаются в функциональном анализе.

Развитие теории функций непрерывно связано с развитием дифференциального и интегрального исчислений, дифференциальных уравнений (ДУ). Эти ветви математики, выражаясь фигурально, вдохновляли друг друга. Потребности одной из них приводили к необходимости развития остальных и наоборот. Например, интегрирование привело к возникновению неэлементарных функций и необходимости их изучения. Успехи теории функций комплексного переменного (ТФКП) [2] привели к созданию метода ТФКП в исследовании ДУ в частных производных.

Остановимся теперь на роли теории функций в современном математическом образовании в педуниверситете.

В учебном плане специальности «Математика и информатика» теория функций представлена двумя дисциплинами: теория функций действительного переменного (ТФДП) (7 семестр) и ТФКП (8 семестр).

В ТФДП по программе изучаются мощность и мера множеств, измеримые функции и интеграл Лебега, ряды Фурье и уравнение колебаний струны.

Мощность множества даёт возможность сравнить бесконечные множества по количеству элементов. Мера линейных множеств есть обобщение понятия длины. Она даёт возможность построить интеграл Лебега, с помощью которого решают многие вопросы в математике, физике, теории вероятностей. В частности, доказывается (сравнительно легко) следующая теорема Лебега: «Для того, чтобы ограниченная на отрезке функция была интегрируемой по Риману, необходимо и достаточно, чтобы мера множества точек разрыва этой функции равнялась нулю» [3]. Эта теорема, на наш взгляд, является одной из главных составляющих современного математического образования студентов-математиков.

Хотелось бы отметить большую роль элементов функционального анализа и рядов Фурье, входящих в курс ТФДП. Построение теории рядов Фурье в пространстве L_2 даёт возможность глубоко осветить вопросы разложения функций в ряды. Ряды же Фурье составляют основу одного из главных методов решения ДУ в частных производных – метода разделения переменных.

Мощность и мера множества, интеграл Лебега и условия сходимости рядов Фурье – вот тот необходимый минимум по ТФДП, который студенты – математики педуниверситета должны усвоить.

Из сказанного видно, что ТФДП – одна из важных составляющих математического образования.

Основной массив ТФКП был создан к концу XIX века трудами великих математиков: Вейерштрасса, Коши, Римана, Гаусса, Абеля. Первый курс ТФКП читался Вейерштрассом в 1863 году (1 час в неделю) в Берлинском университете. Все последующие годы шло распространение этой дисциплины и совершенствование методов её изложения в других университетах мира. Одним из первых этот курс начал читать в Петербургском университете в XIX веке Ю. В. Сохоцкий.

Мощные методы ТФКП нашли широкое применение в математике, физике, аэродинамике, теории упругости, гидродинамике. В качестве примера эффективности методов ТФКП можно привести доказательство основной теоремы алгебры. Освоив курс

ТФКП, каждый студент может без труда доказать эту важнейшую для математического образования теорему.

Весьма интересные факты вскрываются ТФКП о поведении функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ при их продолжении на комплексную плоскость. Оказывается, что $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $e^{z+2\pi i} = e^z$, а функции $\sin z$ и $\cos z$ не являются ограниченными во всей комплексной плоскости.

Формула Коши даёт возможность решать одну из основных задач математики – краевую задачу на плоскости. Для желающих глубоко изучить решение краевых задач на плоскости можно рекомендовать монографию Ф. Д. Гахова [4].

Курс ТФКП завершает образовательный цикл по математическому анализу, ДУ, ТФДП. Для изучения ТФКП студентам необходимы прочные знания по математическому анализу. Но поскольку многие студенты не всегда хорошо знают основные положения математического анализа, то при малом количестве лекционных часов изучение ТФКП сопряжено с определёнными трудностями. Лектору в этих условиях необходимо выделить на самостоятельное изучение те теоремы, техника доказательства которых совпадает с аналогичными теоремами из курса математического анализа. Основное внимание на лекциях должно быть уделено моногенности и аналитичности функций, теории Коши, рядам Тейлора и Лорана, особым точкам и вычетам, что и составляет тот минимум, который должны усвоить студенты педуниверситета при изучении ТФКП.

Математическое образование предполагает знание исторических аспектов в развитии теории функций. Выше были названы учёные Западной Европы, участвовавшие в создании теории функций.

В СССР успешно работали в развитии этой теории Н. Н. Лузин, И. И. Привалов, А. Н. Колмогоров, М. В. Келдыш, И. Н. Векуа и другие. Считаем необходимым отметить вклад белорусских математиков в развитие теории функций. Фундаментальные результаты получены в конструктивной теории функций А. Е. Турецким, В. Н. Русаком и его учениками Е. А. Ровбой, А. А. Пекарским. По теории приближения функций многие годы успешно работают А. А. Янович и его ученики. В частности, за последнее время ими созданы приближённые методы вычисления континуальных интегралов. Большой вклад в развитие теории краевых задач внесли академик Гахов Ф. Д., профессор Зверович Э. И. и их ученики.

Следует отметить, что исследования по теории функций давно ведутся и в нашем университете. Интересные и важные результаты в этом направлении получены в работах Русака В. Н., Аксеня М. Б., Покало А. К., Шилинца В. А., Пенчанского С. Б., Гуло И. Н., а также в работах выпускников аспирантуры и университета Бруя И. Н., Кибалко П. И., Майсени Л. И., Луговского С. А., Рыбаченко И. В., Семенчука Н. П.

На кафедре математического анализа подготовлено около 10 кандидатских диссертаций по тематике теории функций. В настоящее время на кафедре математического анализа три аспиранта работают над диссертациями по теории функций. Результаты по теории функций, полученные на кафедре математического анализа, являются тем фундаментом, на базе которого успешно готовятся кандидатские и магистерские диссертации, дипломные и курсовые работы.

Выпускники университета, магистры и аспиранты, успешно прошедшие подготовку по теории функций, безусловно, будут удовлетворять требованиям, которые предъявляет к преподаванию математики новый век.

Литература

1. *Виленкин Н. Я.* Функции в природе и технике. М., 1985.

2. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М., 1969.
3. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., 1974.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., 1977.

Н. В. Цывис, О. В. Скоромник

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗЛОЖЕНИЮ ТЕМЫ «ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ»

1. *Формула прямоугольников*. Рассмотрим задачу: пусть требуется вычислить $\int_b^a f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывна на $[a, b]$ и имеет непрерывную производную на промежутке (a, b). (Считаем, что первообразная не выражается через элементарные функции или этот интеграл удобнее вычислить приближенно.) Разобьём отрезок интегрирования на n равных частей: $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, где $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, ..., n$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Рассмотрим $\int_{x_2}^{x_1} f(x)dx$. Подберём коэффициент A так, чтобы

$$\int_{x_2}^{x_1} f(x)dx = Af(x_o)\cdot h + r_1. \qquad (1)$$

Первое слагаемое в (1) дает приближенное значение определённого интеграла, а второе – погрешность. Для определённого интеграла а поступаем следующим образом: $f(x)$ представляем формулой Тейлора с остаточным членом в формуле Лагранжа, ограничившись первым порядком малости.

$$f(x) = f(x_o) + \frac{f'(x_o + \theta_1 \cdot h)}{1!}, 0 < \theta_1 < 1.$$

Тогда будем иметь:

$$\int_{x_o}^{x_1} [f(x_o) + \frac{f'(x_o + \theta \cdot h)}{1!}(x - x_o)]dx = f(x_o)(x - x_o)\Big|_{x_o}^{x_1} + f'(\xi_1)\frac{(x - x_o)^2}{2}\Big|_{x_o}^{x_1} =$$

$$= f(x_o)\cdot h + \frac{f'(\xi)\cdot h^2}{2}.$$

Здесь $x_o < \xi_1 < x_1$, $x_1 - x_o = h$ и мы воспользовались теоремой о среднем.

$$\int_{x_o}^{x_1} f'(x_o + \theta_1 h)\cdot(x - x_o)]dx = f'(\xi_1)\int_{x_o}^{x_1}(x - x_o)dx, \ x_o < \xi_1 < x_1.$$

Подставляя в (1), получим равенство

$$f(x_o)\cdot h + \frac{f'(\xi_1)}{2}\cdot h^2 = A\cdot f(x_o)\cdot h + r_1,$$

отсюда $A = 1$, $|r| \le \frac{f'(\xi_1)}{2}\cdot h^2$.

Аналогично имеем для произвольного интервала: