Рассматривая проблему изучения понятия функции как такового, суммируя всё вышесказанное, предлагаем следующее определение функции на заключительном этапе знакомства с этим понятием в школьном курсе математики.

Числовой функцией будем называть два множества *Д*(*f*), *E*(*f*) действительных чисел и закон соответствия, по которому каждому числу из *Д*(*f*) ставится в соответствие единственное число из *E*(*f*). Таким образом, определить функцию – это значит задать множество определения функции *Д*(*f*), множество значений функции *E*(*f*) и закон соответствия, который может быть задан различными способами.

Хотя данное определение функции с точки зрения современной математики не является строгим (термин «закон соответствия» не определяется, а в лучшем случае при его объяснении приводятся различные синонимы «правило», «отношение»), тем не менее это определение ближе всего к современному строгому определению функции, согласно которому функция – это тройка множеств (*Д*(*f*), U_f, *E*(*f*)), где U_f – бинарное отношение, однозначное по второй координате. Предложенная корректировка общепринятого определения функции в школьном курсе математики существенно изменяет акценты в этом определении в сторону сближения его с современной научной трактовкой.

М. Т. Стэльмашук, У. А. Шылінец

РАШЭННЕ ЗАДАЧЫ КАШЫ ДЛЯ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНАГА РАЎНАННЯ ДРУГОГА ПАРАДКУ

Няхай $\frac{\partial f}{\partial p}$ і $\frac{\partial f}{\partial q}$ – фармальныя вытворныя, якія вызначаюцца роўнасцямі

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial q}=\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\right), \tag{1}$$

дзе $p=p(x,y)$, $q=q(x,y)$ – двойчы непарыўна-дыферэнцавальныя камплексныя ці гіперкамплексныя функцыі ў абсягу *D* і такія, што ў абсягу *D* існуе δ^{-1}, дзе

$$\delta=\begin{vmatrix} p_x' & p_y' \\ q_x' & q_y' \end{vmatrix}.$$

Мяркуем таксама, што *p* і *q* – функцыі аналітычныя ад *x* пры $y=y_0=\text{const}$. Напрыклад, $q=xt(y)$, дзе t – функцыя непарыўна-дыферэнцавальная па *y*.

Па азначэнні [1], $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)$.

У дадзенай працы ставіцца і рашаецца наступная задача.

Задача. Знайсці рашэнне раўнання

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}=0, \tag{2}$$

якое задавальняе наступным умовам:

$$f(x,y_0)=\psi(x), \tag{3}$$

$$\frac{\partial f(x,y_0)}{\partial p}=F(x), \tag{4}$$

дзе $\psi(x)$ і $F(x)$ – зададзеныя камплексныя ці гіперкамплексныя аналітычныя ад х функцыі, $x \in (a,b), (a,b)$ – праекцыя абсягу D на вось Ox.

Рашэнне задачы. У працы [1] паказана, што агульнае рашэнне раўнання (2) мае выгляд

$$f(x,y) = \varphi(q)p + h[q], \tag{5}$$

дзе φ і h – адвольныя F – манагенныя функцыі па q у абсягу D, напрыклад, аналітычныя ад q у гэтым абсягу [2,3].

Умовы (3) і (4) на падставе (5) прымуць выгляд

$$f(x,y_0) \equiv \varphi\left[q(x,y_0)\right]p(x,y_0) + h\left[q(x,y_0)\right] = \psi(x), \tag{3'}$$

$$\frac{\partial f(x,y_0)}{\partial p} \equiv \varphi\left[q(x,y_0)\right] = F(x). \tag{4'}$$

Мяркуем, што

$$\varphi\left[q(x,y)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k q^k(x,y), \tag{6}$$

$$h\left[q(x,y)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k q^k(x,y). \tag{7}$$

Пры гэтым лічым, што $q = xt(y)$, а $p = p(x,y)$ – аналітычная функцыя ад x пры $y = y_0 = \text{const}$.

У формуле (5) функцыя φ – адвольная F-манагенная функцыя па функцыі q у абсягу D. Як паказана ў працы [2], функцыя, аналітычная ад q, з'яўляецца F-манагеннай па q у абсягу D. Таму натуральна шукаць функцыю φ, якая задавальняе умове (4') у класе функцый аналітычных ад q, г. зн. у класе функцый выгляду (6).

Мяркуючы ў роўнасці (6) $q = xt(y)$, атрымаем

$$\varphi\left[q(x,y)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x^k t^k(y), \; \beta_k = \text{const}, \; k = 1, 2, 3, \dots. \tag{8}$$

Паводле ўмовы

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k, \; \alpha_k = \text{const}, \; k = 1, 2, 3, \dots. \tag{9}$$

На падставе (8) і (9) з (4') атрымаем :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (t(y_0))^k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k, \tag{10}$$

дзе α_k, $k = 1, 2, 3, \dots$ – вядомыя пастаянныя.

З роўнасці (10) вынікае:

$$\beta_k = \frac{1}{t^k(y_0)} \alpha_k, \; k = 1, 2, 3, \dots. \tag{11}$$

Такім чынам, функцыя φ, якая задавальняе ўмове (4'), мае наступны выгляд:

$$\varphi\left[q(x,y)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t^k(y_0)} \alpha_k x^k t^k(y). \tag{12}$$

Знойдзем цяпер з умовы (3') функцыю h, мяркуючы, што гэта функцыя мае выгляд

$$h[q] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k q^k, \tag{13}$$

дзе

$$q = xt(y). \tag{14}$$

Функцыі выгляду (13), як ужо адзначалася, з'яўляюцца F-манагеннымі па q.

З роўнасці (3') маем:

$$h\left[q(x,y_0)\right] = \psi(x) - \varphi\left[q(x,y_0)\right]p(x,y_0). \qquad (15)$$

Правая частка роўнасці (15) – вядомая аналітычная функцыя ад x пры $x \in (a,b)$, бо такімі з'яўляюцца ўсе вядомыя функцыі, якія ўваходзяць у правую частку .

Такім чынам ,

$$\psi(x) - \varphi\left[q(x,y_0)\right]p(x,y_0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \qquad (16)$$

дзе $a_1, a_2, \ldots$ – вядомыя канстанты.

З умовы (15) на падставе (13),(14) і (16) атрымаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k(y_0) x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k. \qquad (17)$$

Адсюль вынікае :

$$b_k = \frac{a_k}{t^k(y_0)},\ k = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (18)$$

Такім чынам, сфармуляваная задача развязана.

Функцыя

$$f(x,y) = \varphi[q]p + h[q], \qquad (19)$$

дзе

$$\varphi[q] = \sum_{k-1}^{\infty} \beta_k x^k t^k(y), \qquad (20)$$

$$h[q] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k t^k(y), \qquad (21)$$

а канстанты β_k, b_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ вызначаюцца па формулах (11) і (18) адпаведна, з'яўляецца рашэннем раўнання (2), якое задавальняе ўмовам (3) і (4).

Заўвага 1. Калі ў формулах (1) узяць $p = z = x + iy$, $q = z - iy = \overline{z}$, то раўнанне (2) прыме выгляд

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z}^2} = 0, \qquad (22)$$

Раўнанне (22) вызначае біаналітычную функцыю [4]

$$f(x,y) = \varphi[\overline{z}]z + h[\overline{z}],$$

дзе функцыі φ і h – адвольныя аналітычныя функцыі ад $\overline{z}$.

Атрыманыя вынікі могуць быць скарыстаны студэнтамі пры напісанні курсавых і дыпломных работ.

Літаратура

1. *Гусев В. А.* Об одном обобщении ареолярных производных // Bul. Stiint. al Instit. Politehnic Timisoara. T. 7. Fasc. 2. P. 223–238.
2. *Фёдоров В. С.* Основные свойства обобщённых моногенных функций // Известия вузов. Математика. 1958. № 6. С. 257–287.
3. *Стэльмашук М. Т., Шылінец У. А.* Рашэнне краявой задачы для адной сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў // Весці БДПУ. 2002. № 1. С. 151–154.
4. *Балк М. Б.* О полианалитических функциях. Успехи математических наук. 1970. Т. 25. № 5. С. 203–226.