И. Н. Гуло, Н. Т. Стельмашук, Г. Е. Хурсевич, Э. В. Шалик

ИНТЕГРАЛ В СОВРЕМЕННОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Роль интеграла в современном математическом образовании трудно переоценить. В программах педуниверситета изучение интеграла предусмотрено в курсах математического анализа, в теории функций действительного переменного (ТФДП) и комплексного переменного (ТФКП). Изучение определенного и неопределенного интегралов в курсе математического анализа носит традиционный характер [1,2]. Особо подчеркивается роль интеграла как источника неэлементарных функций, а также представление логарифмической функции через интеграл. Много внимания на лекциях и практических занятиях уделяется приложениям определенного интеграла.

Учитывая, что наши выпускники – будущие преподаватели математики, мы уделяем должное внимание профессиональной направленности при изучении определенного интеграла. В частности, это происходит при изложении приложения определенного интеграла к вычислению длин дуг, площадей и объёмов фигур.

При изучении интеграла Римана определенное внимание уделяется построению с помощью интеграла математических моделей физических процессов.

В курсе ТФДП рассматривается два аспекта, непосредственно связанные с понятием интеграла и его обобщениями:

1) доказывается теорема Лебега о необходимом и достаточном условии интегрирования по Риману, которая дает возможность строить примеры разрывных интегрируемых функций, расширить круг интегрируемых функций;

2) определяется интеграл Лебега и изучаются его свойства. На примере интеграла Лебега показывается, что интегрировать можно не только по отрезкам, спрямляемым кривым, квадрируемым и кубируемым фигурам, но и по измеримым множествам. Здесь же подчеркивается, что интегрируемыми по Лебегу могут быть функции, неинтегрируемые по Риману. В качестве примера приводится функция Дирихле, которая, будучи разрывной в каждой точке отрезка, является интегрируемой по Лебегу [3]. С помощью интеграла Лебега определяется множество функций, интегрируемых с квадратом – пространство L_2. В пространстве L_2 доказывается ряд теорем, выясняющих возможность разложения в ряд Фурье функций из пространства L_2.

Достаточно внимания уделяется интегралам и в теории функций комплексного переменного. Основными моментами, связанными с понятием интеграла от комплексной функции, являются следующие:

1) интегральная теорема Коши и формула Коши;
2) вычисление интегралов с помощью вычетов.

В этих теоремах раскрываются новые оригинальные методы вычисления не только интегралов от комплексных функций, но и некоторых видов определенных и несобственных интегралов от действительных функций [4, 5]. Последнее вызывает большой интерес у студентов, дает возможность сравнить методы интегрирования, значительно повышает математический кругозор студентов.

Дальнейшее углубление и обобщение понятия интеграла происходит при работе над курсовыми и дипломными работами по темам, связанным с континуальными (функциональными) интегралами.

Рассматривается некоторое фиксированное линейное пространство X с заданной на нем σ-алгеброй G подмножеств (для любого счетного числа множеств A_k из G объединение $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ принадлежит G). На σ-алгебре G определяется счетно-аддитивная мера μ как неотрицательная функция множеств, определенная на σ-алгебре множеств G, то есть

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k),$$

где для любых $k \neq j$ $A_k \cap A_j = \emptyset$.

Сначала определяется континуальный интеграл от простого функционала $F(x)$, где $F(x)$ принимает на множествах из G не более чем счетного числа значений как сумма абсолютно сходящегося ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(A_k),$$

здесь $A_k = \{x \in X : F(x) = a_k\} \in G$. Затем определяется интеграл от измеримого неотрицательного функционала $F(x)$, являющегося пределом произвольной монотонно неубывающей последовательности неотрицательных простых функционалов $\{F_n(x)\}$, с помощью формулы

$$\int_A F(x) d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int F_n(x) d\mu(x),$$

где A – множество из G. В качестве последовательности неотрицательных функционалов, сходящихся к $F(x)$, можно взять, например,

$$F_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{n} \chi_{A_{m,n}}(x),$$

где

$$A_{m,n} = \left\{ x \in A : \frac{m}{n} \leq F(x) < \frac{m+1}{n} \right\}, \chi_{A_{m,n}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A_{m,n}, \\ 0, \text{ если } x \notin A_{m,n}, \end{cases}$$

n – фиксированное, $m = 0,1,2,\ldots$. Отметим, что эти множества не пересекаются и $\bigcup_{m=0}^{\infty} A_{m,n} = A$. И, наконец, определяется континуальный интеграл от любого измеримого функционала $F(x)$, который всегда можно представить в виде разности неотрицательных измеримых функционалов [6]:

$$F(x) = F^{+}(x) - F^{-}(x),$$

где $F^{+}(x) = \max\{F(x),0\}$, $F^{-}(x) = -\min x\{F(x),0\}$.

При написании курсовых работ студенты изучают свойства континуального интеграла. Обращается внимание студентов на то, что интеграл Лебега является частным случаем функционального интеграла.

Более подробно рассматривается континуальный интеграл по мере Винера, изучаются его свойства. В дипломных работах студенты применяют различные методы вычисления континуальных интегралов, в том числе и приближенные. Рассматривают следующие приложения функциональных интегралов: решение дифференциальных и интегральных уравнений, среднее значение функционалов от случайных процессов, вычисление энергетического уровня в квантовой физике.

На базе интеграла создана теория интегральных преобразований, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, без которой трудно представить современную математику [7,8]. Так, например, интегральное преобразование Лапласа позволило создать эффективные методы решений обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и интегральных уравнений. Интегральное преобразование Лапласа находит большое применение при решении различных прикладных задач, например в электротехнике.

В заключение отметим, что глубокое знание процесса интегрирования является одной из главных составляющих математического образования.

Литература

1. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа: В 2 т. М., 1967.
2. *Русак В. М. і інш.* Курс вышэйшай матэматыкі: В 2 т. Мн., 1994.
3. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., 1974.
4. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М., 1977.
5. *Стельмашук Н. Т., Шилинец В. А.* Элементы теории аналитических функций. Мн., 1998.
6. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовой мере. Мн., 1987.
7. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1974.
8. Математическая энциклопедия: В 5 т. М., 1979.

А. А. Киселев, Н. Г. Серебрякова

НЕСТАНДАРТНЫЕ ПОДХОДЫ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

В докладе обсуждается учебный курс математического анализа в условиях вуза технической ориентации. Будем называть курс математического анализа, принятый в настоящее время в технических вузах, традиционным или стандартным.

С позиции втузовского преподавателя математики учебный курс высшей математики – это дисциплина, которая отшлифовывалась в течение огромного времени в самых разных учебных заведениях у нас и за рубежом. Он уже пережил ряд сокращений и поэтому максимально уплотнен. Возникает необходимость крайне интенсивного изложения учебного материала. И вот в подобных обстоятельствах излагается базовое понятие анализа – понятие предела функции. Существуют различные формы определения этого понятия. В стандартном анализе самым простым является, по-видимому, $(\varepsilon-\delta)$-определение Коши. Именно о нем мы и будем далее говорить.

Как показывает преподавательская практика, это понятие имеет очень сложную конструкцию. Именно оно вызывает в учебном курсе анализа большинство сложных, так называемых «чисто математических» доказательств и рассуждений. Можно ли обойтись без него в учебном курсе стандартного анализа или, на худой конец, изложить его бегло или иллюстрировано? Для вдумчивого преподавателя это несерьезный вопрос. Дело в том, что для этого курса понятие предела является не только базовым, но и его, так сказать, «несущей конструкцией» и пронизывает весь этот курс прямо и косвенно. Каждый очередной шаг в развитии курса связан с каким-то применением этого определения или его обобщения. Пределы функций скалярных и векторных, одного аргумента и многих аргументов, интегралы и суммы рядов – весь этот материал насыщает учебный курс анализа в такой мере, что за его рамками остаются лишь расчет-