МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР
МИНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А.М.ГОРЬКОГО

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ И ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ"

Минск - 1990

Печатается по решению редакционно-издательского совета МГПИ им. А.М.Горького.

Составители : М.Б.Аксень, П.И.Кибалко, Е.К.Рожко,
Р.Н.Сачко, И.Н.Лопатюк

Рекомендовано кафедрой математического анализа МГПИ им. А.М.Горького

Указания к выполнению лабораторных работ по "Дифференциальному и интегральному исчислению " предназначены для студентов I - го курса стационара и заочного отделения.

ВВЕДЕНИЕ

Студенты первого курса должны выполнить 8 лабораторных работ по разделу "Дифференциальное и интегральное исчисление". Каждая лабораторная работа содержит 3 основных варианта. Кроме того, в некоторых лабораторных работах дается 0-вариант с образцами решений задач.

Перед выполнением каждой лабораторной работы студент должен изучить теоретический материал по соответствующим темам. Для этой цели рекомендуется следующая литература:

I. Бохан К.А. Курс математического анализа, т.I, М.: Просвещение, 1972.

2. Уваренков И.М., Маллер М.З. Курс математического анализа, т.I, М.: Просвещение, 1966.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.I, М.:Наука, 1971.

4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, т.I, М.: Физматгиз, 1968.

5. Зорич В.А. Математический анализ, ч.I, М.: Наука, 1981.

Кроме того, перед выполнением каждой лабораторной работы рекомендуется разобрать решение задач 0-варианта, если он в ней приложен, а также ознакомиться с методами решения аналогичных задач следующих задачниках:

I. Задачник по курсу математического анализа. Под редакцией Н.Я.Виленкина. М.: Просвещение, 1971, ч.I.

2. Задачи и упражнения по математическому анализу. Под редакцией Н.П.Демидовича. М.: Наука, 1972.

3. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (функции одной переменной). М.: Наука, 1973.

Каждая лабораторная работа рассчитана на 2 часа аудиторных занятий и после выполнения должна быть зачтена.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № I

Теоремы о среднем. Условия постоянства и монотонности функции. Правило Лопиталя.

Для выполнения лабораторной работы надо знать:

I. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши.
2. Достаточные условия постоянства и монотонности функции.
3. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

Задание I

В-0. Проверить, применима ли теорема Ролля к функции $f(x)=4x^3+x^2-4x+1$ на отрезке $[-1,1]$. В случае применимости теоремы найти те точки внутри рассматриваемого отрезка, в которых производная данной функции равна нулю.

В-I. Проверить, применима ли теорема Ролля к функции $f(x)=\ln\sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. В случае применимости теоремы найти те точки внутри рассматриваемого отрезка, в которых производная данной функции равна нулю.

В-2. Проверить, применима ли теорема Лагранжа к функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\le 1\\ 4x-x^2-2, & \text{если } x>1.\end{cases}\qquad [0;2]$$

В случае ее применимости найти значение ξ, фигурирующее в формуле Лагранжа.

В-3. Пусть $P_n(x)$ – многочлен с действительными коэффициентами степени $n>1$. Доказать, следующее утверждение: если многочлен $P_n(x)$ имеет только действительные корни, то многочлен $P_n'(x)$ также имеет только действительные корни.

Задание 2

Доказать равенства:

В-0. $\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \ \forall x\in R$

! В-I. $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}x, \quad x<1$

В-2. $\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=2\operatorname{arctg}x, \quad -1<x<1$

В-3. $\pi+\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=2\operatorname{arctg}x$, если $x>1$.

Задание 3

Доказать неравенства:

В-0. $\operatorname{tg}x > x+\frac{x^3}{3}$, если $0<x<\frac{\pi}{2}$.

! В-I. $\operatorname{arctg}x > x-\frac{x^3}{3}$, если $x>0$.

В-2. $\operatorname{arctg}x < x-\frac{x^3}{6}$, если $0<x\le 1$.

В-3. $\ln(1+x)>\frac{x}{x+1}$, если $x>0$.

Задание 4

Найти пределы функций:

В-0. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}}$.

В-I. а) $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)$, б) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}2x}$.

В-2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to 0-}(1-2^x)^{\sin x}$.

В-3. а) $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2-x)}$, б) $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin 3x)^{\frac{2}{\ln x}}$.

Решение задач В-0.

I. Данная функция непрерывна на отрезке $[-1,1]$ и дифференцируема внутри этого отрезка. Кроме того, $f(-1)=f(1)=2$. Условия теоремы Ролля выполнены. По этой теореме на интервале $(-1,1)$ существует такая точка, в которой производная данной функции равна нулю. Найдем эту точку.

Вычислим $f'(x)=12x^2+2x-4$.

Решим уравнение $f'(x)=0$, т.е. $12x^2+2x-4=0$. Следовательно $x=-\frac{2}{3}$ или $x=\frac{1}{2}$.

2. Исследуемое равенство равносильно следующему:

$$\operatorname{arctg} x-\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=0 \quad \forall x\in R.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\operatorname{arctg} x-\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x\in R.$$

Вычислим $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0.$$

Отсюда, воспользовавшись достаточным условием постоянства функции, получим $f(x)=C \ \forall x\in R$, т.е.

$$\operatorname{arctg} x-\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=C \quad \forall x\in R. \quad (I)$$

Найдем C. Полагая в равенстве (I) $x=0$, получим $C=0$. Подставляя найденное значение C в равенство (I), будем иметь

$$\operatorname{arctg} x-\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=0 \quad \forall x\in R.$$

3. Исследуемое неравенство равносильно следующему:

$$\operatorname{tg} x-x-\frac{x^3}{3}>0, \quad \text{если } 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\operatorname{tg} x-x-\frac{x^3}{3} \quad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right). \quad (2)$$

Эта функция непрерывна на промежутке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.
Вычислим $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1-x^2=\operatorname{tg}^2 x-x^2>0 \quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Последнее неравенство следует из известного неравенства

$$\operatorname{tg} x>x>0 \quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, на промежутке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ рассматриваемая функция f непрерывна и $f'(x)>0$ внутри этого промежутка. Поэтому по достаточному условию строгой монотонности функции будем иметь, что функция f возрастает на промежутке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда вытекает, что

$$f(x)>f(0) \quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

т.е. (см. формулу (2))

$$\operatorname{tg} x-x-\frac{x^3}{3}>0 \quad \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

4. а) Мы имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Преобразуем несколько функцию, предел которой надо вычислить. Будем стараться получить неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, которые довольно часто можно раскрыть по правилу Лопиталя.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin x-\pi}{2\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x\sin x-\pi)'}{(2\cos x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+2x\cos x}{-2\sin x}=-1.$$

б) Мы имеем неопределенность вида 1^{∞}. Вначале найдем

$$\lim_{x\to 1}\ln x^{\frac{2}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{x-1}\cdot\ln x=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{x}=2.$$

Используя найденный предел, теперь уже легко найти исходный предел.

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{2}{1-x}}=\lim_{x\to 1}e^{\ln x^{\frac{2}{1-x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\ln x^{\frac{2}{1-x}}}=e^2.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Наименьшее и наибольшее значения функции

Для выполнения лабораторной работы надо знать вторую теорему Вейерштрасса и уметь применять ее для нахождения наибольшее и наименьшего значений функции на отрезке.

При решении многих задач весьма полезной является следующая теорема:

Теорема. Пусть функция f непрерывна на промежутке X и имеет на нем лишь один экстремум. Если этот экстремум является минимумом (максимумом), то он является вместе с тем и наименьшим (наибольшим) значением данной функции на промежутке X.

Задание I

Найти наименьшее и наибольшее значения функции на указанных отрезках:

В-0. $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$ на отрезке $[1,5]$.

В-I. $f(x)=x\ln x$ на отрезке $[e^{-2},1]$.

В-2. $f(x)=xe^{x}$ на отрезке $[-2,1]$.

В-3. $f(x)=xe^{x}$ на отрезке $[-2,0]$.

Задание 2

Выяснить, существует ли наименьшее и наибольшее значения функций на указанных промежутках:

В-0. $f(x)=x^2$ на полуинтервале $(0,1]$.

В-I. $f(x)=\cos x$ на полуинтервале $(0,\frac{\pi}{2}]$.

В-2. $f(x)=\frac{1}{x}$ на полуинтервале $(0,4]$.

В-3. $f(x)=E(x)$ на отрезке $[-2,1]$.

Задание 3

Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a,b]$. Чебышевским расстоянием между функциями f и g на отрезке $[a,b]$ называется число

$$\rho_{[a,b]}(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|.$$

Найти чебышевское расстояние между функциями на указанных отрезках:

В-0. $f(x)=x^3$ и $g(x)=3x+4$ на отрезке $[0,2]$.

В-I. $f(x)=-x^4$ и $g(x)=-2x^2+5$ на отрезке $[-2,2]$.

В-2. $f(x)=\sin 2x$ и $g(x)=x$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

В-3. $f(x)=\cos 2x$ и $g(x)=-x$ на отрезке $[0,\pi]$.

Задание 4

Доказать неравенства:

В-0. $e^{x}\geq 1+x,\ \forall x\in R$.

В-I. $x^{\alpha}\geq 1+\alpha\ln x$, если $x>0,\ \alpha>0$.

В-2. $1-2\ln x\leq\frac{1}{x^2}$, если $x>0$.

В-3. $e^{x}\geq 1+\ln(1+x)$, если $x>-1$.

Задание 5

В-0. Найти наибольший объем цилиндра, периметр осевого сечения которого равен a.

В-I. Судно В, находящееся на расстоянии 75 км к востоку от судна А, идет на запад со скоростью I2 км в час; судно же А идет к югу со скоростью 9 км в час. В какой момент суда будут наиболее близки друг к другу?

В-2. Лодка находится на расстоянии 3 км от ближайшей точки берега А. Пассажир лодки желает достигнуть села В, находящегося на берегу на расстоянии 5 км от А. Лодка проплывает по 4 км в час, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы пассажир достиг села В в кратчайшее время?

В-3. Лампа висит над центром круглого стола радиуса R. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на краю стола, будет наибольшая? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

Решение задач В-0.

1. Находим критические точки данной функции, лежащие внутри отрезка $[-1,5]$.

Вычисляем $f'(x)$: $f'(x)=6x^2+6x-12$ и решаем уравнение

$$f'(x)=0 \quad 6x^2+6x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 . \end{array}\right.$$

Внутри отрезка $[-1,5]$ содержится лишь одна критическая точка $x=1$. Находим значение данной функции в этой точке и на концах отрезка:

$$f(1)=-6,\ f(5)=266,\ f(-1)=14.$$

Из этих значений выбираем наименьшее и наибольшее. Это и будет наименьшее и наибольшее значения данной функции на отрезке $[-1,5]$

Ответ:

$$\min_{x\in[-1,5]} f(x)=f(1)=-6, \quad \max_{x\in[-1,5]} f(x)=f(5)=266.$$

2. Данная функция f непрерывна на промежутке $(0,1]$ и $f'(x)=2x>0$ внутри этого промежутка. Поэтому по достаточному условию строгой монотонности она возрастает на данном промежутке. Отсюда следует, что

$$f(x)\le f(1)=1 \quad \forall x\in(0,1]$$

Это означает, что $\max\limits_{x\in(0,1]} f(x)=1$.

Докажем, что на промежутке $(0,1]$ данная функция не имеем наименьшего значения. Предположим противное, что данная функция достигает наименьшего значения в некоторой точке $x_0\in(0,1]$. Тогда

$$f(x)\ge f(x_0) \quad \forall x\in(0,1] \qquad \text{(1)}$$

Рассмотрим какую-нибудь точку $x_1\in(0,1]$ и удовлетворяющую неравенству $x_1<x_0$. В силу возрастания функции f будем иметь $f(x_1)<f(x_0)$, что противоречит (1).

3. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=f(x)-g(x)=x^3-3x-4.$$

Требуется найти наибольшее значение функции $|\varphi(x)|$ на отрезке $[0,2]$

Вначале найдем критические точки функции $\varphi(x)$, лежащие внутри данного отрезка.

Вычисляем $\varphi'(x)=3x^2-3$ и решаем уравнение $\varphi'(x)=0$, т.е.

$$3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 . \end{array}\right.$$

Внутри отрезка $[0,2]$ содержится лишь одна критическая точка $x=1$. Вычисляем значения функции φ в этой точке и на концах данного отрезка:

$$\varphi(1)=-6,\ \varphi(0)=-4,\ \varphi(2)=-2.$$

Теперь находим наибольшее значение функции $|\varphi(x)|$ на отрезке $[0,2]$. Оно равно

$$\max\{|\varphi(1)|, |\varphi(0)|, |\varphi(2)|\}=\max\{6,4,2\}=6.$$

Это и есть чебышевское расстояние между функциями f и g на отрезке $[0,2]$.

Ответ. $\rho_{[0,2]}(f,g)=6.$

4. В лабораторной работе № 1 для доказательства неравенств использовались достаточные условия монотонности функции. Изучим еще один метод доказательства.

Исследуемое неравенство равносильно следующему

$$e^x-x-1\ge 0 \quad \forall x\in R.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=e^x-x-1$. Выясним, имеет ли эта функция наименьшее значение на промежутке R.

Найдем критические точки рассматриваемой функции.

Вычислим $f'(x)=e^x-1$ и решим уравнение $f'(x)=0$, т.е.

$$e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0.$$

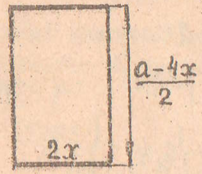
Таким образом, на промежутке R рассматриваемая функция имеет лишь одну критическую точку $x=0$. Выясним, будет ли в этой точке экстремум.

Вычисляем $f''(x)=e^x$. Так как $f''(0)=1>0$, то в точке $x=0$ рассматриваемая функция имеет минимум.

Так как рассматриваемая функция непрерывна на промежутке R и имеет на нем лишь один экстремум, который является минимумом, то этот минимум является вместе с тем и наименьшим значением рассматриваемой функции на промежутке R. Отсюда следует, что

$$f(x) \geq f(0) \ \forall x \in R \quad \text{т.е.} \quad e^x - x - 1 \geq 0 \ \forall x \in R.$$

5. Рассмотрим произвольный цилиндр, периметр осевого сечения которого равен a. Пусть x – радиус основания этого цилиндра. Тогда его высота равна $\frac{a-4x}{2}$. Объем рассматриваемого цилиндра обозначим через y.



Будем иметь

$$y = \pi x^2 \cdot \frac{a-4x}{2} = \frac{\pi}{2} x^2 (a-4x).$$

Из условий задачи следует, что

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{a-4x}{2} > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad 0 < x < \frac{a}{4}.$$

Требуется найти наибольшее значение функции $y = \frac{\pi}{2} x^2 (a-4x)$ на интервале $\left(0, \frac{a}{4}\right)$.

Найдем стационарные точки данной функции, содержащиеся в рассматриваемом интервале.

Вычислим $y' = \frac{\pi}{2}(2ax - 12x^2) = \pi x(a-6x)$ и решим уравнение $y' = 0$, т.е. $\pi x(a-6x) = 0$. Следовательно $x = 0$ или $x = \frac{a}{6}$. На интервале $\left(0, \frac{a}{4}\right)$ рассматриваемая функция имеет лишь одну стационарную точку $x = \frac{a}{6}$.

Замечаем, что при переходе слева направо через эту точку y' меняет знак с "+" на "–". Поэтому в точке $x = \frac{a}{6}$ рассматриваемая функция имеет максимум. Он равен $\frac{\pi a^3}{216}$.

Так как рассматриваемая функция непрерывна на интервале $\left(0, \frac{a}{4}\right)$ и на этом интервале имеет лишь один экстремум, который является максимумом, то этот экстремум является и наибольшим значением рассматриваемой функции на интервале $\left(0, \frac{a}{4}\right)$.

Ответ: Искомый цилиндр имеет объем, равный $\frac{\pi a^3}{216}$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Полное исследование функции и построение графика.

Для выполнения лабораторной работы надо знать схему полного исследования функции и уметь строить график этой функции.

Провести полное исследование и построить графики функций:

В–0. $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

В–I. I) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$;

2) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$; $f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

В–2. I) $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$, $f(x) = \sqrt[5]{x^6}$, $f(x) = \sqrt[5]{x^7}$;

2) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$; $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$.

В–3. I) $f(x) = -\sqrt[7]{x}$, $f(x) = -\sqrt[7]{x^4}$, $f(x) = -\sqrt[7]{x^8}$, $f(x) = -\sqrt[7]{x^9}$;

2) $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$; $f(x) = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$.

Решение задачи В–0.

$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

I) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2) $f(-x) = -x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$, $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$. Следовательно функция ни четная и ни нечетная.

3) Точек пересечения с осями координат нет, так как $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

4) Функция непрерывна в каждой точке области определения как элементарная.

5) Для нахождения вертикальной асимптоты, исследуем поведение функции в окрестности точки $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ (использовали правило Лопиталя для разрешения неопределенности вида $0 \cdot \infty$); $\lim\limits_{x \to 0-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0$.

Прямая $x = 0$ – вертикальная правосторонняя асимптота.

Ищем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(xe^{\frac{1}{x}}-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=1.$$

Прямая $y=x+1$ - наклонная асимптота.

Строим эскиз графика (рис.I).

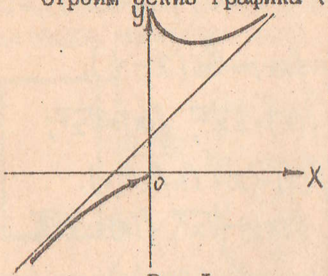


Рис.I

Из эскиза видно, что функция имеет экстремум. Могут быть и точки перегиба.

6) Исследуем функцию на экстремум:

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-1}{x},\quad f'(x)=0\Rightarrow$$

$x=1$ - критическая точка I рода.

Заполним таблицу:

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\searrow$	e min	$\nearrow$

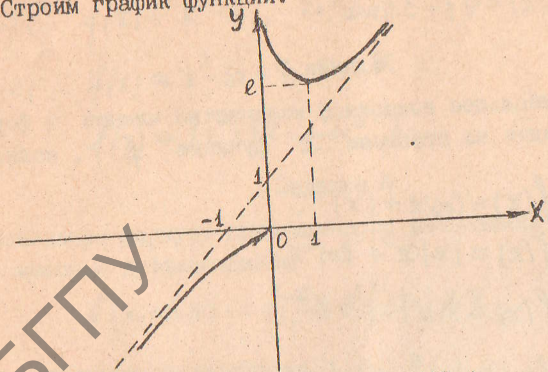
Замечание. Можно провести исследование на экстремум, используя второе достаточное условие экстремума.

$$f''(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3},\quad f''(1)=e>0\Rightarrow x=1$$ точка min функции, $y_{min}=e$.

7) Так как $y''=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\neq 0$, то функция не имеет перегибов, но вторая производная при переходе через точку $x=0$ слева направо меняет свой знак с "-" на "+". Следовательно функция

на интервале $(-\infty, 0)$ выпукла вверх, а на интервале $(0,+\infty)$ выпукла вниз.

8) Строим график функции:



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Формула Тейлора. Дифференциал.

Для выполнения лабораторной работы необходимо знать:

I. Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

2. Определение дифференцируемой функции и дифференциала.

3. Формулу приближенного вычисления значения функции с помощью дифференциала.

Задание I

Разложить функцию f по степеням $x-x_0$ и вычислить с точностью до 10^{-n} $f(a)$ *), если:

B-0. $f(x)=x^3+3x^2-2x+4$, $x_0=-1$, $a=-0{,}997$, $n=3$.

B-I. $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$, $x_0=1$, $a=0{,}98$, $n=2$.

B-2. $f(x)=x^5-5x^3+x$, $x_0=2$, $a=1{,}998$, $n=3$.

B-3. $f(x)=x^6$, $x_0=-2$, $a=-1{,}96$, $n=2$.

Задание 2

Записать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции f в окрестности точки $x_0=0$, найдя первые три члена разложения, если:

B-I. $f(x)=\mathrm{arctg}\sin x$.

В-2. $f(x)=\ln^3\left(1-\frac{x}{2}\right)$.

В-3. $f(x)=\sqrt[3]{1+3\sin x}$.

Задание 3

Выбрав наибольшее возможное количество членов в формуле Тейлора, разложить по степеням x функцию f, если:

В-0. $f(x)=\cos x+|x|^3$.

В-I. $f(x)=|x|x^3+\cos^2 x$.

В-2. $f(x)=\sin|x|^3+e^x$.

В-3. $f(x)=|x|^5+\operatorname{arctg} x$.

Задание 4

Оценить с помощью формулы Тейлора абсолютную погрешность приближенных равенств:

В-0. $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$, $-1\le x\le 1$.

В-I. $\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$, $-0,1\le x\le 0,1$.

В-2. $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, $0\le x\le 1$.

В-3. $\arcsin x\approx x+\frac{x^3}{6}$, $0\le x\le 0,5$.

Задание 5

Найти приращение и дифференциал функции f в точке x_0 при $\Delta x=$ I; 0,I; 0,0I. Выяснить геометрический смысл при $\Delta x=1$.

Найти для каждого значения Δx абсолютную погрешность $|\Delta y-dy|$ и относительную погрешность $\left|\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|$,

которые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

В-I. $f(x)=x^3-2$, $x_0=1$.

В-2. $f(x)=x^2-3x+4$, $x_0=2$.

В-3. $f(x)=2x^2+7x$, $x_0=-1$.

Задание 6

Используя формулу приближенного вычисления значения функции с помощью дифференциала

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x,$$

найти приближенное значение:

В-I. $\cos 32^\circ$.   В-2. $\sin 29^\circ 30'$.   В-3. $\operatorname{tg} 44^\circ 45'$.

Решение задач В-0.

I. Вычислим значения функции f и ее производных в точке $x_0=-1$:

$f(x)=x^3+3x^2-2x+4$, $\quad f(-1)=8$;

$f'(x)=3x^2+6x-2$, $\quad f'(-1)=-5$;

$f''(x)=6x+6$, $\quad f''(-1)=0$;

$f'''(x)=6$, $\quad f'''(-1)=6$;

$f^{IV}(x)=0$, $\quad f^{IV}(-1)=0$;

Подставляя полученные значения в формулу Тейлора, имеем

$$f(x)=8-5(x+1)+(x+1)^3.$$

Подставив в полученную формулу $x=-0,997$, получим

$$f(-0,997)=8-5(-0,997+1)+(-0,997+1)^3\approx 7,985.$$

3. Рассмотрим функцию $g(x)=|x|^3$. Если $x\ne 0$, то

$$g'(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{при } x>0\\ -3x^2 & \text{при } x<0.\end{cases}$$

При $x=0$ по определению производной находим

$$g'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^3}{\Delta x}=0.$$

Следовательно, $g'(x)=3x^2\,\mathrm{sgn}\,x$. Отсюда

$$g''(x)=\begin{cases}-6x & \text{при } x<0\\ 6x & \text{при } x>0\end{cases},$$

а $$g''(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g'(0+\Delta x)-g'(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x^2\,\mathrm{sgn}\,\Delta x}{\Delta x}=0$$

т.е. $g''(x)=6|x|$.

Функция $g''(x)=6|x|$ недифференцируема в точке $x=0$. Получили, что $g(0)=g'(0)=g''(0)=0$, а $g'''(0)$ не существует. Поэтому, учитывая, что

$$\varphi(x)=\cos x,\quad \varphi(0)=1;$$
$$\varphi'(x)=-\sin x,\quad \varphi'(0)=0;$$
$$\varphi''(x)=-\cos x,\quad \varphi''(0)=-1;$$

а значит $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$ а $f'''(0)$ не существует. Формула Тейлора для исследуемой функции имеет вид

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2}+R_3(x).$$

4. Нетрудно проверить, что в правой части приближенного равенства записаны первые четыре члена разложения функции $y=\cos x$ по степеням x.

Так как $|R_5(x)|=\left|\frac{x^5\sin c}{5!}\right|$, то, учитывая, $|\sin c|\le 1$ $|x^5|\le 1$, имеем $|R_5(x)|\le\frac{1}{5!}$. Т.е. абсолютная погрешность $\Delta\le\frac{1}{120}$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Интегрирование рациональных функций

Для выполнением лабораторной работы необходимо знать:

1. Свойства неопределенных интегралов.
2. Формулы интегрирования элементарных дробей.
3. Теорему о разложении правильной рациональной дроби на элементарные.

Задание I

Найти интегралы:

В-0. а) $\int\frac{dx}{(2x+3)^4}$; б) $\int\frac{2x+3}{(x^2+4)^3}\,dx$.

В-I. а) $\int\frac{dx}{(3-5x)^4}$; б) $\int\frac{3x+2}{(x^2+2)^5}\,dx$.

В-2. а) $\int\frac{dx}{(2-3x)^2}$; б) $\int\frac{3x-4}{(x^2+16)^4}\,dx$.

В-3. а) $\int\frac{dx}{(5-8x)^3}$; б) $\frac{5x+3}{(6+x^2)^5}\,dx$.

Задание 2

Представить рациональные дроби в виде суммы элементарных дробей, не находя неопределенных коэффициентов:

В-0. $\frac{x^3+3}{x(x^4+1)(x-2)^2(x^2+x+8)^3}$. В-I. $\frac{7x^2+3}{(x^4-1)^2(2x+3)x^3}$.

В-2. $\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x^2+6)^6(x^2-4)}$. В-3. $\frac{8x^3-4x}{(x^3-2x^2+x)(x^2+1)^2}$

Задание 3

Найти интегралы:

В-0. $\int\frac{x\,dx}{(x-1)(x+2)^2}$.

В-1. а) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

В-2. а) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$.

В-3. а) $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

Решение задач В-0.

1. а) $\int \frac{dx}{(2x+3)^4} = \frac{1}{2}\int (2x+3)^{-4}d(2x+3) = -\frac{1}{6(2x+3)^3} + C.$

б) $\int \frac{2x+3}{(x^2+4)^3}\,dx = \int \frac{2x\,dx}{(x^2+4)^3} + 3\int \frac{dx}{(x^2+4)^3}.$

Вычислим каждый из интегралов.

$$\int \frac{2x\,dx}{(x^2+4)^3} = \int (x^2+4)^{-3} d(x^2+4) = -\frac{1}{2(x^2+3)^2} + C_1.$$

Для вычисления второго интеграла используем рекуррентную формулу:

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}\right),$$ где $n=3, a^2=4$.

$$J_3 = \int \frac{dx}{(x^2+4)^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{4(x^2+4)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}\right) =$$

(вторично используем рекуррентную формулу при $n = 2$)

$$= \frac{x}{16(x^2+4)^2} + \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2(x^2+4)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4}\right) =$$

$$= \frac{x}{16(x^2+4)^2} + \frac{3x}{128(x^2+4)} + \frac{3}{256}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C_2.$$

$$\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+4)^3} = \frac{3x-8}{16(x^2+4)^2} + \frac{9x}{128(x^2+4)} + \frac{9}{256}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C.$$

2. Так как $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-2x^2 =$

$$= (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1),$$

то

$$\frac{x^3+3}{x(x^4+1)(x-2)^2(x^2+x+8)^3} = \frac{x^3+3}{x(x-2)^2(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+x+8)^3} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Ex+F}{x^2-\sqrt{2}x+1} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+x+8} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+8)^2} + \frac{M_3x+N_3}{(x^2+x+8)^3}.$$

3. Имеем $\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$

Отсюда

$$x = A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1). \qquad (1)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A + B_1 = 0 \\ x^1 & 2A + B_2 = 1 \\ x^0 & A - B_1 - B_2 = 0, \end{array}$$

которая имеет следующие решения $A = \frac{1}{4}$, $B_1 = -\frac{1}{4}$, $B_2 = \frac{1}{2}$.

Заметим, что коэффициенты можно найти и другим способом.

Положив в (1) $x = 1$, имеем $1 = A\cdot 4$, т.е. $A = \frac{1}{4}$.

Положив в (1) $x = -1$, имеем $-1 = -B_2\cdot 2$, т.е. $B_2 = \frac{1}{2}$.

Положив в (1) $x = 0$, имеем $0 = A - B_1 - B_2$, т.е. $B_1 = -\frac{1}{4}$.

Подставив полученные значения коэффициентов в элементарные дроби и пользуясь свойствами интеграла, получим, что

$$\int\frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}+C=-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Для выполнения лабораторной работы необходимо знать:

1. Способ вычисления интегралов вида: $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, где R – рациональная функция.

2. Способ вычисления интегралов вида $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, где m,n,p – рациональные числа. Условия Чебышева.

3. Интегрирование функций вида $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$. Подстановки Эйлера.

Задание 1

Применяя соответствующие подстановки, вычислить следующие интегралы:

В-1. а) $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{1-x}dx$; б) $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}dx$.

В-2. а) $\int\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt[3]{x-1}+1}dx$; б) $\int\frac{1}{x-1}\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}dx$.

В-3. а) $\int\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}dx$; б) $\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$.

Задание 2

Проверив условия Чебышева и выбрав соответствующую подстановку, найти следующие интегралы:

В-0. $\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$. В-1. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

В-2. $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$. В-3. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

Задание 3.

Применяя подстановки Эйлера, найти следующие интегралы:

В-0. $\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}$.

В-1. а) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}$; б) $\int\frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$.

В-2. а) $\int\frac{dx}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$; б) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

В-3. а) $\int\frac{dx}{(x^2+3x)\sqrt{x^2+3x}}$; б) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Задание 4

Решить различными способами:

В-1. а) $\int\sqrt[3]{x}\,(2+\sqrt{x})^2dx$; б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

В-2. а) $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$.

В-3. а) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; б) $\int\frac{(x-3)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

Выполнение заданий В-0.

2. Представим интеграл в виде $\int x^{-11}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx$. Здесь $m=-11, n=4, p=-\frac{1}{2}, \frac{m+1}{n}+p=-3$ – целое число. Имеем третий случай условий Чебышева. Поэтому делаем подстановку

$$1+x^4=x^4t^2 \quad (*).$$ Отсюда $x=\frac{1}{(t^2-1)^{1/4}}$, $dx=\frac{-t\,dt}{2(t^2-1)^{5/4}}$,

$1+x^4=\frac{t^2}{t^2-1}$. Подставим в интеграл и получим:

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{2}\int (t^2-1)^2 dx = -\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+C,$$

но $t=\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}$ (см.(ж)), поэтому

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{10x^{10}}\sqrt{(1+x^4)^5}+\frac{1}{3x^6}\sqrt{(1+x^4)^3}-\frac{1}{2x^2}\sqrt{1+x^4}+C.$$

3. Квадратный трехчлен x^2+2x имеет два различных действительных корня $\alpha=0$ и $\beta=-2$, поэтому применим подстановку Эйлера $\sqrt{x^2+2x}=(x-0)t$ (жж). Отсюда $x^2+2x=x^2t^2$,

$$x=\frac{2}{t^2-1},\ dx=-\frac{4t\,dt}{(t^2-1)^2},\ x-1=\frac{3-t^2}{t^2-1},\ x^2+2x=\frac{4t^2}{(t^2-1)^2}.$$

Подставим в интеграл и получим

$$\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}} = -\frac{1}{2}\int \frac{3-t^2}{t^2}dt = \frac{3}{2t}+\frac{1}{2}t+C,$$

но $t=\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$ (см.(жж)), поэтому

$$\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}} = \frac{1+2x}{\sqrt{x^2+2x}}+C.$$

Замечание. Так как у квадратного трехчлена x^2+2x коэффициент при старшем члене положителен (a=I), то можно применить также подстановку Эйлера $\sqrt{x^2+2x}=x\pm t$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

Интегрирование тригонометрических функций

Для выполнения лабораторной работы необходимо знать:

I. Способ вычисления интегралов вида: $R(\sin^m x,\cos^n x)dx$, где m и n рациональные числа.

2. Способ вычисления интегралов вида:

$$\int \sin ax\cdot\sin bx\,dx,\ \int \sin ax\cdot\cos bx\,dx,\ \int \cos ax\cdot\cos bx\,dx.$$

3. Способ вычисления интегралов вида:

$\int R(\sin x,\cos x)dx$, которые преобразуются в интегралы от рациональных функций подстановками $tg\frac{x}{2}=t$ и $tg\,x=t$.

Задание I

Применяя соответствующие подстановки, вычислить следующие интегралы:

В-0. а) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[4]{\cos x}}$; б) $\int \frac{\cos^4 x\,dx}{\sin^6 x}$; в) $\int \frac{\cos^4 x\,dx}{\sin^3 x}$.

В-I. а) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x}}$; б) $\int \sin^4 x\cdot\cos^6 x\,dx$;

в) $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^3 x}$; г) $\int \frac{\cos^5 x\,dx}{\sin^4 x}$ д) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

В-2. а) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$; б) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^5 x}$; в) $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos^6 x}$;

г) $\int \cos^3 x\cdot\sin^4 x\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

В-3. а) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+5}}$; б) $\int \frac{\cos^5 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ в) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$;

г) $\int \cos^4 x\,\sin^2 x\,dx$; д) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}dx$.

Задание 2

Применив соответствующие тригонометрические формулы или универсальные подстановки, вычислить следующие интегралы:

В-0. а) $\int \sin 2x\cos 4x\,dx$; б) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$; в) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

В-1. а) $\int \cos 4x \cdot \cos 2x\, dx$;

в) $\int \dfrac{dx}{\sin x\,(2+\cos x-2\sin x)}$; в) $\int \dfrac{\sin 2x\, dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$.

В-2. а) $\int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x\, dx$;

б) $\int \dfrac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$; в) $\int \dfrac{dx}{7\cos^2 x+2\sin^2 x}$.

В-3. а) $\int \sin \dfrac{x}{3} \cdot \cos \dfrac{2x}{3}\, dx$;

б) $\int \dfrac{(1+\sin x)\,dx}{\sin x\,(1+\cos x)}$ в) $\int \dfrac{\sin 2x\, dx}{1+\sin^2 x}$.

Выполнение задания В-0.

I. а) Так как $m=1$ – нечетное число, применим подстановку $\cos x=t;\ dt=-\sin x\,dx$. Подставим в интеграл и получим

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[4]{\cos x}} = -\int \frac{dt}{\sqrt[4]{t}} = -\int t^{-\frac{1}{4}}dt = -\frac{4}{3}t^{\frac{3}{4}}+C = -\frac{4\sqrt[4]{\cos^3 x}}{3}+C.$$

б) Так как обе степени четные, то можно применить подстановку $\operatorname{tg} x=t$. Но в данной ситуации проще применить подстановку $\operatorname{ctg} x=t,\ dt=-\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$. Подставим в интеграл и получим

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x \cdot \sin^2 x}dx = \int \operatorname{ctg}^4 x \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= -\int t^4 dt = -\frac{t^5}{5}+C = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+C.$$

в) Так как $\sin x$ находится в нечетной степени, то положим, что $\cos x=t,\ dt=-\sin x\,dx$, предварительно умножив числитель и знаменатель на $\sin x$ и представив $\sin^2 x=1-\cos^2 x$,

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{\cos^4 x \cdot \sin x}{\sin^4 x}dx = -\int \frac{t^4 dt}{(1-t^2)^2}.$$

Полученный интеграл – интеграл от рациональной функции, который можно вычислить методом неопределенных коэффициентов, но проще он вычисляется методом интегрирования по частям, когда $u=t^3,\ dv=\dfrac{t\,dt}{(1-t^2)^2}$.

2. а) Для вычисления интеграла надо применить формулу

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right).$$

Тогда $\int \sin 2x \cdot \cos 4x\, dx = \dfrac{1}{2}\int (\sin 6x+\sin(-2x))dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C = \frac{1}{12}(3\cos 2x-\cos 6x)+C.$$

б) Интеграл вычисляется с помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. Тогда $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

Подставим в интеграл и получим

$$\int \frac{\sin x\, dx}{1+\sin x} = \int \frac{2t \cdot 2dt}{(1+t^2)^2\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)} = 4\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)(t+1)^2}.$$

Этот интеграл вычисляется методом неопределенных коэффициентов.

Исходный интеграл можно вычислить проще, если произвести соответствующие преобразования подынтегральной функции:

$$\int \frac{\sin x\, dx}{1+\sin x} = \int \frac{\sin x\,(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx =$$

$$= \int \frac{\sin x - \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{1}{\cos x} - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = -\frac{1}{\cos x} - tg x + x + C.$$

в) Так как $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применяется подстановка

$$tg x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Подставим в интеграл и получим

$$\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1 + \frac{3}{1+t^2}\right)} =$$

$$\int \frac{dt}{4 + t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} tg \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} tg \frac{tg x}{2} + C.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

Параметрически заданные функции

Для выполнения лабораторной работы необходимо знать:

I. Определение параметрически заданной кривой и параметрически заданной функции.

2. Формулы для нахождения производных первого и высших порядков параметрически заданной функции.

Задание I

Для параметрически заданной функции f:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta].$$

I) Найти производные $y'(x)$ и $y''(x)$.

2) Написать уравнение касательной и нормали к графику функции в т.M_0, соответствующей параметру $t_0 = 1$.

3) Найти критические точки первого рода функции и исследовать их на экстремум.

4) Построить график функции f:

В-0. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t^2 \end{cases}, \quad t \in [0; +\infty).$

В-I. $\begin{cases} x = \operatorname{arc} tg\, t \\ y = \frac{1}{2} t^2 \end{cases}, \quad t \in (-\infty; +\infty).$

В-2. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}, \quad t \in [0; +\infty)$

В-3. $\begin{cases} x = t + t^3 \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}, \quad t \in (-\infty; +\infty).$

Задание 2

Построить параметрически заданную кривую, предварительно заполнив таблицу значений x и y с интервалом $\frac{\pi}{2}$ для значений t:

В-I. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}, t \in [0; 2\pi]$ (кардиоида).

В-2. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi]$ (астроида).

В-3. $\begin{cases} x = 2t - \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi]$ (трохоида).

Задание 3

Решить задачу:

В-I. Точка М движется по гиперболе $y = \frac{10}{x}$ так, что ее абсцисса в любой момент времени t $x = t^2 + 1$ $(t > 0)$. Найти величину скорости движения точки М, а также направление скорости, когда точка проходит положение $M_0(5;2)$. Сделать чертеж.

В-2. Точка М движется по параболе $y^2 = 18x$ так, что ее ордината в любой момент времени t $y = \sqrt{t}$ $(t > 0)$. Найти величину скорости движения точки, а также направление скорости, когда точка М проходит положение $M_0(\frac{1}{2};3)$. Сделать чертеж.

В-3. Точка М движется по параболе $y^2=2x+1$. В какой точке параболы ордината ее возрастает вдвое скорее, чем абсцисса. Каково направление скорости в этой точке. Сделать чертёж.

Указание к выполнению задания 3

Скорость движения точки М – вектор (ее составляющие $\vec{V_x}=\dfrac{\vec{dx}}{dt}$ и $\vec{V_y}=\dfrac{\vec{dy}}{dt}$), направленный по касательной к траектории движения.

Выполнение задания В-0.

I. $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t^2 \end{cases}, \quad t\in[0;+\infty).$

1) Отметим, $x\in[0,+\infty),\ y\in[0,+\infty) \Rightarrow D(f)=[0,+\infty),\ E(f)=[0,+\infty).$

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=1+t^2;\ y''(x)=\frac{(y'(x))'_t}{x'(t)}=\frac{2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=1+t^2.$$

2) Точку $M_0(x_0,y_0)$, соответствующую значению параметра $t_0=1$, получим, если найдем $\begin{cases} x_0=\ln(1+1) \\ y_0=1^2 \end{cases}$. Итак $M_0(\ln 2;1)$.

Напомним уравнения касательной и нормали к графику функции в т.M_0:

$$y=y_0+y'(x_0)(x-x_0),\quad y=y_0-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0).$$

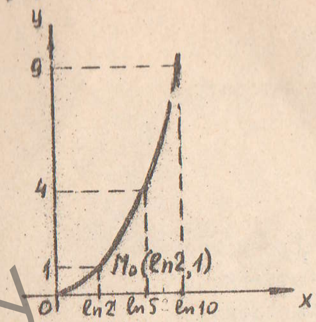
Так как $y'(x_0)=1+1^2=2$, то $y=2x+1-2\ln 2$ – уравнение касательной, а $y=-\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}\ln 2$ – уравнение нормали.

3) Так как $y'(x)=1+t^2>0$, то точек экстремума нет, функция f возрастающая, $y''>0$, то кривая вогнута.

4) Для построения графика функции заполним таблицу:

t	0	I	2	3
x	0	$\ln 2$	$\ln 5$	$\ln 10$
y	0	I	4	9

Построим график функции



Замечание. Исключив параметр t, мы получим функцию в явном виде:

$$x=\ln(1+t^2)\Rightarrow 1+t^2=e^x\Rightarrow t^2=e^x-1\Rightarrow y=e^x-1.$$

$D(y)=[0,+\infty).$