УДК 539.166.2

А. Н. ЛАВРЕНОВ

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В *E0*-КОНВЕРСИИ

Целью данной работы является исследование влияния калибровочных преобразований (КП) на абсолютную вероятность *E0*-конверсии (ЕОК) с учетом конечных размеров ядра и структурно-ядерных эффектов.

Согласно [1], матричный элемент (МЭ) конверсионного перехода лептона после разложения его по мультиполям можно представить в следующей форме:

$$M(EL) = -\sum_{LM} \alpha \int \psi_f^* \left[\Phi_{LM} + \vec{\alpha}\vec{A}_{LM}\right] \psi_i d^3r, \qquad (1)$$

где скалярный Φ_{LM} и векторный $\vec{A}_{LM}$ потенциалы, создаваемые ядерными плотностями заряда ρ и тока J, имеют вид:

$$\Phi_{LM} = 4\pi ik \int h_L(kr_<)\, j_L(kr_<)\, Y_{LM}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) Y\left(\frac{\vec{R}}{R}\right) \rho(\vec{R})\, d^3R, \qquad (2\,а)$$

$$\vec{A}_{LM} = 4\pi ik \sum_{N=L-1}^{N=L+1} \int h_N(kr_>)\, j_N(kr_<)\, \vec{Y}_{LM}^N\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \vec{Y}_{LM}^N\left(\frac{\vec{R}}{R}\right) \vec{J}(\vec{R})\, d^3R. \qquad (2\,б)$$

Здесь α — постоянная тонкой структуры; $\vec{\alpha}$ — оператор скорости; $r_{\gtrless}$ — большее или меньшее из r и R; Y_{LM} — сферические функции; $\vec{Y}_{LM}^N$ — шаровые векторы; j_L и h_L — сферические функции Бесселя и Ханкеля I рода L-порядка; $\psi_{i,f}$ — волновые функции (ВФ) лептона в начальном i и конечном f состояниях соответственно; k — энергия перехода. Разложим по мультиполям также токи и заряды ядра:

$$\vec{J}(\vec{R}) = \sum_{LNM} J_L^N(R)\, \vec{Y}_{LM}^N\left(\frac{\vec{R}}{R}\right); \quad \rho(\vec{R}) = \sum_{LM} \rho_L(R)\, Y_{LM}\left(\frac{\vec{R}}{R}\right). \qquad (3)$$

Так как *E0*-переход обусловлен сферически-симметричной частью этих токов и зарядов, в (1)—(3) необходимо оставить только члены с $L = M = 0$, $N = 1$ [2]. После интегрирования по угловым частям получим МЭ ЕОК в следующем виде:

$$M(E0) = -\sqrt{4\pi}\,\alpha ik \int_0^\infty \left[\Phi(r)\left(F_i F_f + G_i G_f\right) + iA(r)\left(G_i F_f - G_f F_i\right)\right] dr, \qquad (4)$$

где $\Phi(r)$ и $A(r)$ — радиальные части скалярного Φ_{00} и векторного $\vec{A}_{00}$ потенциалов, причем

$$\Phi(r) = \int_0^\infty R^2 h_0(kr_>)\, j_0(kr_<)\, \rho_0(R)\, dR, \qquad (5\,а)$$

$$A(r) = \int_0^\infty R^2 h_1(kr_>)\, j_1(kr_<) J_0^1(R)\, dR. \qquad (5\,б)$$

Здесь F и G — малая и большая компоненты радиальной ВФ лептона, являющиеся решением системы радиальных уравнений Дирака:

$$\frac{d}{dr} G = -\frac{\varkappa}{r} G + [E - V(r) + 1] F, \qquad (6)$$

$$\frac{d}{dr} F = \frac{\varkappa}{r} F - [E - V(r) - 1] G.$$

Обычно в теории ЕОК полагают, что можно выбрать функцию $\lambda(r)$, связанную с КП и равную [2, 3]:

$$A(r) = \frac{d}{dr}\lambda(r), \qquad (7)$$

и с помощью КП исключить векторный потенциал в (4). Это позволяет привести МЭ ЕОК (4) к виду, которым обычно пользуются для расчетов [2]:

$$M(EO) = \sqrt{4\pi}\alpha \int_0^\infty R^2 \rho_0(R)\, dR \int_0^R [G_i G_f + F_i F_f]\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right] dr. \qquad (8)$$

Рассмотрим переход от (4) к (8) подробнее. Из (5) и (7) определим $\lambda(x)$ как

$$\lambda(x) = \int_\infty^x A(r)\, dr = \int_\infty^x dr \int_0^\infty R^2 h_1(kr_>)\, j_1(kr_<)\, J_0^1(R)\, dR. \qquad (9)$$

Учитывая свойства цилиндрических функций, формулу (7) и уравнение непрерывности для ЕОК

$$\frac{d}{dR}[J_0^1(R) R^2] = -ik\rho_0(R) R^2, \qquad (10)$$

после интегрирования по частям выражения (9) и (4) можно преобразовать соответственно к виду:

$$\lambda(x) = \Phi(x)\frac{i}{k} - \frac{i}{k^3}\int_x^\infty J_0^1(R)\, dR + \mathrm{I} + \mathrm{II}, \qquad (11)$$

$$M(EO) = -\sqrt{4\pi}\alpha ik \int_0^\infty [\Phi(r)(G_i G_f + F_i F_f) - i\lambda(r)\frac{d}{dr}(G_i F_f - G_f F_i)]dr + \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}. \qquad (12)$$

Из (8) нетрудно доказать, что для ЕОК выполняется соотношение (см. приложение А):

$$\frac{d}{dr}[G_i F_f - G_f F_i] = -k[F_i F_f + G_i G_f]. \qquad (13)$$

Подставляя его в (12) и учитывая (11), имеем:

$$M(EO) = -\sqrt{4\pi}\frac{\alpha i}{k}\int_0^\infty J_0^1(R)\, dR \int_0^R [F_i F_f + G_i G_f]\, dr + \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}. \qquad (14)$$

Принимая

$$\frac{1}{R^2}\int_0^R [F_i F_f + G_i G_f]\, dr = \frac{d}{dR}\left[\int_0^R [F_i F_f + G_i G_f]\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right] dr\right],$$

после интегрирования по частям легко получаем формулу (8). Следовательно, при переходе от (4) к (8) с помощью КП появляются дополнительные члены I, II, III, IV, определяемые следующим образом:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{k}\left[h_0(kr)\int_0^r R^2 j_1(kR)\, J_0^1(R)dR + j_0(kr)\int_r^\infty R^2 h_1(kR)\, J_0^1(R)\,dR\right]\Bigg|_{r=\infty},$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{k^2}\,[j_0(kr)\, R^2 h_0(kR)\, J_0^1(R)|_{R=\infty} - h_0(kr)\, R^2 j_0(kR)\, J_0^1(R)|_{R=0}],$$

$$\mathrm{III} = \sqrt{4\pi}\alpha k[G_i F_f - G_f F_i[\,\lambda(r)|_{r=0}^{r=\infty},$$

$$\mathrm{IV} = -\sqrt{4\pi}\,\frac{\alpha i}{k}\left[J_0^1(R)\, R^2\int_0^R [F_i F_f + G_i G_f]\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right] dr\right]\Bigg|_{R=0}^{R=\infty},$$

Чтобы калибровочная инвариантность имела место, они должны обратиться в нуль. Легко показать, что это накладывает определенные ограничения на поведение тока $J_0^1(R)$ в нуле и на бесконечности:

$$\lim_{R\to 0} J_0^1(R)\, R^2 = 0; \quad \lim_{R\to\infty} J_0^1(R)\, R = 0. \tag{15}$$

Отметим, что в различных моделях ядра обычно пределы (15) выполнены. Используя (4), (8), (14), запишем вероятность электронной ЕОК в следующих эквивалентных формах:

$$W(EO) = 8(\alpha\pi)^2\,(2\,|\varkappa|)\,|M(EO)|^2, \tag{16}$$

где

$$M\,(EO) = -ik\int_0^\infty [\Phi(r)\,(G_i G_f + F_i F_f) + iA(r)\,(G_i F_f - G_f F_i)]\,dr, \tag{16 а}$$

$$M(EO) = \frac{i}{k^2}\int_0^\infty J_0^1(R)\,[G_i F_f - G_f F_i]\,dR, \tag{16 б}$$

$$M\,(EO) = -\frac{i}{k}\int_0^\infty J_0^1(R)\,dR\int_0^R [F_i F_f + G_i G_f]\,dr, \tag{16 в}$$

$$M(EO) = \int_0^\infty R^2\rho_0(R)\,dR\int_0^R [F_i F_f + G_i G_f]\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right] dr. \tag{16 г}$$

В мезонном случае необходимо опустить множитель $(2|\varkappa|)$ в (16), так как в мезоатоме на оболочке присутствует один мюон, а не $(2|\varkappa|)$ электронов.

Таким образом, нами показана калибровочная инвариантность абсолютной вероятности EO-конверсии. Полученные эквивалентные выражения для вероятности процесса (16 а)—(16в) более удобны для численных расчетов, чем обычно применяемая формула (см. (16 г)). Это становится очевидным, если задать определенный вид ядерного тока перехода J_0^1. Действительно, для ядерных моделей поверхностных (ПТ) и объемных (ОТ) токов перехода, в которых

$$J_0^1(R)_{\text{пт}} = \frac{ik}{R_0}\,\delta(R - R_0); \quad J_0^1(R)_{\text{от}} = \frac{2ik}{R_0^2}\,\Theta\,(R_0 - R),$$

где $\delta(x)$ и $\Theta(x)$ — дельта- и ступенчатая функции соответственно; R_0 — радиус ядра, будем иметь МЭ ЕОК в виде:

а) модель ПТ

$$M(EO) = \frac{1}{R_0}\int_0^{R_0} [F_i F_f + G_i G_f]\,dr = \frac{G_f F_i - G_i F_f}{kR_0}\Bigg|_{r=R_0},$$

б) модель ОТ

$$M(EO) = \frac{2}{R_0^2}\int\limits_0^{R_0} [F_iF_f + G_iG_f]\,[R_0 - r]\,dr = \frac{-2}{kR_0^2}\int\limits_0^{R_0} [G_iF_f - G_fF_i]dr.$$

Из уравнения непрерывности (10) и формулы, связывающей плотность ядерного перехода $\rho_0(R)$ с плотностью заряда ядра в основном состоянии в модели Тасси $\rho_{\text{осн.}}(R)$:

$$\rho_0(R)\,R^2 = -\frac{d}{dR}\,[R^3\rho_{\text{осн.}}(R)], \tag{17}$$

установим аналогию $J_0^1(R) \sim ik\rho_{\text{осн.}}(R)\,R$. Следовательно, для этой гидродинамической модели Тасси получим:

$$M(EO) = \frac{1}{k}\int\limits_0^{\infty} [G_fF_i - G_iF_f]\,R\rho_{\text{осн.}}(R)\,dR. \tag{18}$$

Непосредственная постановка (17) в (16 г) дает аналогичный результат.

Приложение А

Согласно (6), имеем:

$$F_f\frac{d}{dr}G_i = -\frac{\varkappa_i}{r}G_iF_f + [E_i - V(r) + 1]\,F_iF_f,$$

$$G_i\frac{d}{dr}F_f = \frac{\varkappa_f}{r}G_iF_f - [E_f - V(r) - 1]\,G_iG_f,$$

$$F_i\frac{d}{dr}G_f = -\frac{\varkappa_f}{r}G_fF_i + [E_f - V(r) + 1]\,F_iF_f,$$

$$G_f\frac{d}{dr}F_i = \frac{\varkappa_i}{r}G_fF_i - [E_i - V(r) - 1]\,G_iG_f.$$

Учитывая, что $k = E_f - E_i$, получаем:

$$\frac{d}{dR}\,[G_iF_f - F_iG_f] = \frac{\varkappa_f - \varkappa_i}{R}\,[F_iG_f + G_iF_f] - k[F_iF_f + G_iG_f].$$

Так как для ЕОК $\varkappa_i = \varkappa_f$, будем иметь:

$$\frac{d}{dR}[G_iF_f - F_iG_f] = -k[F_iF_f + G_iG_f].$$

Список литературы

1. Банд И. М. и др. Аномалии в КВК γ-лучей. Л., 1976.
2. Борисоглебский Л. А. // УФН. 1963. Т. 81. С. 271.
3. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1959.

Поступила в редакцию 14.05.85.