***І.Г. Пятроўская**, дацэнт кафедры матэматычнага аналізу БДПУ*

***У.А. Шылінец,** дэкан матэматычнага факультэта БДПУ*

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЭМАТЫЧНАГА АНАЛІЗУ НА ФАКУЛЬТАТЫЎНЫХ ЗАНЯТКАХ ПА МАТЭМАТЫЦЫ

Адной з асноўных мэтаў выкладання элементаў матэматычнага аналізу ў школе з'яўляецца навучанне вучняў некаторым прыкладанням вытворнай.

Неабходна адзначыць, што ў школьнам курсе матэматыкі практычна не разглядаюцца алгебраічныя прыкладанні вытворнай. Пад алгебраічнымі прыкладаннямі вытворнай мы разумеем прыкладанні яе да рашэння задач, якія адносяцца традыцыйна да алгебраічных. Вядома, што вытворная паспяхова можа выкарыстоўвацца пры пераўтварэнні алгебраічных выразаў, раскладанні на множнікі, доказе тоеснасцей, вылічэнні сум, рашэнні раўнанняў, няроўнасцей і сістэм, доказе няроўнасцей, рашэнні задач з параметрамі і г. д.

У дадзеным артыкуле разгледзім толькі пытанне выкарыстання вытворнай пры доказе тоеснасцей і няроўнасцей.

У аснове гэтых прыкладанняў ляжыць тэарэма Лагранжа і вынікі з яе.

У дадзеным артыкуле прыводзім фармулёўку тэарэмы Лагранжа ў той форме, у якой яна выкладаецца ў вучэбным дапаможніку $[1]$.

Тэарэма Лагранжа. Калі функцыя $y = f(x)$ непарыўная на адрэзку $[a;b]$ і дыферэнцавальная на інтэрвале $(a;b)$, то знойдзецца, прынамсі, адзін пункт $c \in (a;b)$, што справядлівая роўнасць:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \tag{1}$$

Нагляднае тлумачэнне справядлівасці формулы Лагранжа (1), г.зн. формулы $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, можна даць, скарыстаўшы геаметрычны сэнс вытворнай $[1, 2]$.

Вынік 1 (прымета сталасці функцыі). Няхай функцыя *f* непарыўная на прамежку X і дыферэнцавальная ўнутры гэтага прамежку. Тады для таго, каб функцыя *f* была сталай на прамежку *X*, неабходна і дастаткова, каб унутры прамежку *X*

$$f'(x) = 0.$$

Вынік 2. Калі функцыі φ і ψ непарыўныя на прамежку X і маюць аднолькавыя вытворныя ўнутры гэтага прамежку, то яны адрозніваюцца толькі пастаянным складнікам.

Прымета манатоннасці функцыі таксама з'яўляецца вынікам тэарэмы Лагранжа. У школьным падручніку $[3]$ яна прыводзіцца асобна ў выглядзе тэарэмы.

Вынік 3 (прымета манатоннасці функцыі). Калі функцыя *f* непарыўная на прамежку *X*, і яе вытворная дадатная (адмоўная) унутры гэтага прамежку, то функцыя *f* нарастае (спадае) на прамежку *X*.

Разгледзім некалькі прыкладаў на непасрэднае выкарыстанне тэарэмы Лагранжа пры доказе няроўнасцей. У працэсе рашэння такіх задач разглядаецца функцыя $f(x)$ на адрэзку $[a;b]$, якая задавальняе ўмовам тэарэмы Лагранжа, для яе запісваецца формула $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, дзе $c \in (a;b)$, і ацэньваецца $f'(c)$.

Прыклад 1. Даказаць, што $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ пры $x \geq 0$ $[4]$.

Рашэнне. Разгледзім функцыю $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$ на адрэзку $[0;b]$, дзе b – любы дадатны лік. Для дадзенай функцыі на адрэзку $[0;b]$ выконваюцца ўмовы тэарэмы Лагранжа і, значыць, існуе ўнутраны пункт *c* гэтага адрэзку, такі, што $\dfrac{f(b)-f(0)}{b-0} = f'(c)$, г.зн. $\dfrac{e^b - \frac{b^2}{2} - 1}{b} = e^c - c$. А паколькі пры любым c $e^c \geq c+1$, то $e^c - c \geq c + 1 - c$, г. зн. $e^c - c \geq 1$ і, такім чынам,

$\dfrac{e^b - \dfrac{b^2}{2} - 1}{b} \geq 1$. Адсюль атрымліваем, што $e^b - \dfrac{b^2}{2} - 1 \geq b$, а значыць, $e^b \geq 1 + b + \dfrac{b^2}{2}$ для любога $b > 0$.

Такім чынам, $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ пры $x > 0$, а ўлічваючы, што пры $x = 0$ няроўнасць таксама праўдзівая, атрымліваем, што $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ пры $x \geq 0$.

Прыклад 2. Даказаць няроўнасць

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \quad \text{калі } 0 < b < a.$$

Доказ. Функцыя $f(x) = \ln x$ на адрэзку $[b; a]$ задавальняе ўсім ўмовам тэарэмы Лагранжа, таму скарыстаўшы формулу Лагранжа будзем мець

$$\ln a - \ln b = \frac{1}{c}(a - b), \text{ дзе } b < c < a.$$

Адсюль і вынікае, што

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

Далей разгледзім шэраг прыкладаў на выкарыстанне вынікаў 1 і 2. Іх можна выкарыстоўваць пры доказе тоеснасцей, у прыватнасці, пры вывадзе формул элементарнай матэматыкі.

Пры рашэнні такіх задач на некаторым прамежку разглядаецца ці адна функцыя $f(x)$, такая, што яе вытворная $f'(x) = 0$ і, значыць, функцыя сталая, г.зн. мае выгляд $f(x) = c$, або дзве функцыі $f(x)$ і $g(x)$, такія, што $f'(x) = g'(x)$, і робіцца вывад, што $f(x) = g(x) + c$, дзе c – канстанта. Гэтую канстанту знаходзяць, калі меркаваць x роўным некатораму значэнню x_1.

Прыклад 3. Даказаць тоеснасць

$$2\sin^4 x - \frac{1}{4}\cos 4x = \frac{3}{4} - \cos 2x.$$

Доказ. На прамежку $(-\infty; +\infty)$ разгледзім функцыю $f(x) = 2\sin^4 x - \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{3}{4} + \cos 2x$. Знойдзем вытворную гэтай функцыі. Маем:

$$f'(x) = 8\sin^3 x\cos x + \sin 4x - 2\sin 2x = 2\sin 2x\left(2\sin^2 x + \cos 2x\right) - 2\sin 2x =$$
$$= 2\sin 2x\left(2\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x\right) - 2\sin 2x = 0.$$

Такім чынам, на прамежку $(-\infty; +\infty)$ разглядаемая функцыя з'яўляецца сталай:

$$f(x) = 2\sin^4 x - \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{3}{4} + \cos 2x = c.$$

Знойдзем канстанту c. Маем $f(0) = 0 = c$.

Значыць, $2\sin^4 x - \frac{1}{4}\cos 4x = \frac{3}{4} - \cos 2x$.

Прыклад 4. Даказаць вядомыя з элементарнай матэматыкі формулы:

а) $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ (не карыстаючыся асноўнай трыганаметрычнай тоеснасцю);

б) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $x \in [-1; 1]$ [4]; **в)** $\arccos\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} = 2\operatorname{arctg} x$, $x \in [0; +\infty)$.

Доказ. а) Разгледзім на прамежку $(-\infty; +\infty)$ функцыю

$$f(x) = \sin^2 x + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}.$$

Вытворная гэтай функцыі для любога $x \in (-\infty; +\infty)$ роўная нулю:

$$f'(x) = 2\sin x\cos x - \sin 2x = \sin 2x - \sin 2x = 0.$$

На падставе прыметы сталасці функцыі атрымліваем, што для любога $x \in (-\infty; +\infty)$

$$f(x) = \sin^2 x + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2} = c.$$

Для знаходжання канстанты c знойдзем значэнне функцыі f, напрыклад, у пункце 0. Тады атрымаем c=0.

Адсюль
$$\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2} = 0,$$
г.зн.
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

б) Разгледзім функцыю $f(x) = \arcsin x + \arccos x - \frac{\pi}{2}$, вызначаную на адрэзку $[-1;1]$. Вытворная адзначанай функцыі ўнутры гэтага адрэзка роўная нулю:
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad x \in (-1;1).$$

На падставе прыметы сталасці функцыі робім высновы, што $f(x) = const$, г.зн.
$$f(x) = \arcsin x + \arccos x - \frac{\pi}{2} = c.$$

Калі ў атрыманую роўнасць падставіць x=0, то атрымаем, што c=0. Такім чынам, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, калі $-1 \le x \le 1$.

в) Разгледзім функцыю
$$f(x) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} - 2\operatorname{arctg} x,$$
якая вызначана на ўсёй лікавай прамой, бо $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \le 1$.

Вытворная функцыі $f(x)$ роўная нулю для ўсіх $x > 0$:
$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{4x}{2x(1+x^2)} - \frac{2}{1+x^2} = 0.$$

На падставе прыметы сталасці функцыі

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}-2\mathrm{arctg}x=c \text{ пры } x\geq 0.$$

Для знаходжання c лічым, напрыклад, x=1, атрымліваем $c=\arccos 0-2\mathrm{arctg}1=0$.

Заўважым, што прапануемы спосаб доказу формул б) і в) прыкладу 4 значна прасцейшы, чым традыцыйны. Гэта падкрэслівае мэтазгоднасць выкарыстання вытворнай пры рашэнні алгебраічных задач, у прыватнасці, пры доказе тоеснасцей. Безумоўна, неабходнай умовай прапанаванага доказу з’яўляецца веданне навучэнцамі адваротных трыганаметрычных функцый і іх вытворных.

Пазнаёміць вучняў з адваротнымі трыганаметрычнымі функцыямі, а затым пры дапамозе тэарэмы аб вытворнай адваротнай функцыі атрымаць формулы вытворных адваротных трыганаметрычных функцый можна аналагічным чынам, як і ў вучэбным дапаможніку [1].

Такім жа чынам можна даказаць і некаторыя іншыя важныя формулы, якія разглядаюцца ў школьным курсе матэматыкі.

Прыклад 5. Даказаць формулу $\log_a x^k = k\log_a x \quad (x>0, a>0, a\neq 1)$.

Доказ. Разгледзім функцыю $f(x)=\log_a x^k - k\log_a x, \quad x>0$. Знойдзем вытворную гэтай функцыі:

$$f'(x)=\frac{k\cdot x^{k-1}}{x^k \ln a}-\frac{k}{x\ln a}=\frac{k}{x\ln a}-\frac{k}{x\ln a}=0.$$

Такім чынам, на прамежку $(0;+\infty)$ разглядаемая функцыя з’яўляецца сталай:

$$f(x)=\log_a x^k - k\log_a x = c.$$

Для знаходжання канстанты c знойдзем значэнне функцыі f у пункце x=1. Атрымаем c=0. Значыць, $\log_a x^k = k\log_a x \; (x>0)$.

Прыклад 6. Даказаць, што

$$\operatorname{arctg}x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\pi}{2} \text{ пры } x<0.$$

Доказ. Разгледзім дзве непарыўныя на прамежку $(-\infty;0)$ функцыі

$$f(x)=\operatorname{arctg}x \text{ і } g(x)=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Знойдзем вытворныя гэтых функцый.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\ g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}\cdot\frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{-x}{|x|(1+x^2)}.$$

Паколькі пры $x<0$ $|x|=-x$, то $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, і тады $f'(x)=g'(x)$. На падставе выніку 2 маем $f(x)=g(x)+c$, дзе c − канстанта. Для знаходжання c лічым, напрыклад, x=−1, атрымаем $\operatorname{arctg}(-1)=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+c$, г.зн. $c=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$.

Такім чынам, атрымалі, што $\operatorname{arctg}x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\pi}{2}$ пры $x<0$.

Паняцце вытворнай можа паспяхова выкарыстоўвацца і пры доказе няроўнасцей.

Універсальнага метаду доказу няроўнасцей не існуе. Поспех пры доказе той ці іншай няроўнасці залежыць ад трапнага выбару метаду.

Пры доказе няроўнасцей карыстаюцца наступнымі метадамі: ацэнка знака рознасці, метад тоеснага пераўтварэння частак няроўнасці, метад апорных няроўнасцей, метад узмацнення няроўнасцей, падвышэнне частак няроўнасці ў ступень, доказ ад адваротнага, доказ метадам поўнай індукцыі, доказ метадам матэматычнай індукцыі.

У дадзеным артыкуле мы абмяжуемся толькі разглядам пытання пра выкарыстанне вытворнай пры доказе няроўнасцей. Прымяненне вытворнай для доказу няроўнасцей часцей за ўсё звязана з даследаваннем функцыі на манатоннасць і экстрэмум.

Прыклад 7. Пры якіх неадмоўных значэннях *x* мае месца няроўнасць $e^{2x} \ge 1+2x$?

Рашэнне. Разгледзім функцыю $f(x)=e^{2x}-1-2x$, вызначаную для $x \ge 0$. Знойдзем яе вытворную $f'(x)$:

$$f'(x)=2e^{2x}-2.$$

$f'(x)=2e^{2x}-2>0$ пры ўсіх $x>0$. Такім чынам, дадзеная функцыя на разглядаемым прамежку нарастае. Паколькі $f(0)=0$ і $f(x)$ – нарастальная функцыя, то $f(x)\ge 0$ пры ўсіх неадмоўных значэннях *x*, што раўназначна даказваемай няроўнасці.

Прыклад 8. Даказаць, што пры $x \ge 0$ мае месца няроўнасць

$$\ln(1+x) \ge \frac{x}{x+2}\,[4].$$

Доказ. Разгледзім на прамежку $[0;+\infty)$ функцыю $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{x+2}$. Знаходзім вытворную гэтай функцыі:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{x+2-x}{(x+2)^2}=\frac{(x+1)^2+1}{(x+1)(x+2)^2}.$$

У кожным пункце прамежку $(0;+\infty)$ $f'(x)>0$, таму на прамежку $[0;+\infty)$ функцыя $f(x)$ нарастае. Сваё найменшае значэнне функцыя $f(x)$ прымае ў пункце $x=0$, г.зн. $f(0)=0$. Для любога $x \ge 0$ выконваецца няроўнасць $f(x)\ge f(0)=0$, г.зн. $\ln(1+x)\ge \frac{x}{x+2}$ пры $x \ge 0$.

Прыклад 9. Даказаць няроўнасць

$$x^{\alpha}-1>\alpha(x-1) \text{ пры } \alpha \ge 2,\ x>1.$$

Доказ. Разгледзім непарыўную на прамежку $[1;+\infty)$ функцыю

$$f(x)=x^{\alpha}-1-\alpha(x-1).$$

Яе вытворная

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha\left(x^{\alpha-1} - 1\right)$$

пры $1 < x < +\infty$ і $\alpha \geq 2$ прымае дадатныя значэнні.

Значыць, функцыя $f(x)$ нарастае на прамежку $[1;+\infty)$ і на ім $f(x) > f(1)$.

Улічваючы, што $f(1) = 0$, будзем мець $x^{\alpha} - 1 - \alpha(x-1) > 0$. Такім чынам, $x^{\alpha} - 1 > \alpha(x-1)$, калі $\alpha \geq 2$, $x > 1$.

Прыклад 10. Даказаць няроўнасць

$$x^{\alpha} \geq 1 + \alpha \ln x, \text{ калі } x > 0,\ \alpha > 0.$$

Доказ. Разгледзім функцыю

$$f(x) = x^{\alpha} - 1 - \alpha \ln x.$$

Вытворная

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{x}\left(x^{\alpha} - 1\right)$$

роўная нулю пры x=1. Паколькі $\alpha > 0$, то $f'(x) < 0$, калі $x \in (0;1)$ і $f'(x) > 0$ пры $x \in (1;+\infty)$.

Такім чынам, у пункце x=1 функцыя $f(x) = x^{\alpha} - 1 - \alpha \ln x$ мае мінімум, які адначасова з'яўляецца найменьшым значэннем функцыі на $(0,+\infty)$.

Значыць, для ўсіх $x > 0$ $f(x) \geq f(1)$, але $f(1) = 0$, таму $x^{\alpha} - 1 - \alpha \ln x \geq 0$, г. зн.

$$x^{\alpha} \geq 1 + \alpha \ln x.$$

Прыклад 11. Даказаць, што пры $x < 0$ мае месца няроўнасць

$$2\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) < e^{-x} - e^{x}.$$

Доказ. Функцыя

$$f(x) = 2\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + e^{x} - e^{-x}$$

вызначана і непарыўная на ўсёй лікавай прамой. Яе вытворная

$$f'(x)=\frac{2}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)+e^x+e^{-x}=\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+e^x+e^{-x}$$

большая за нуль пры любых рэчаісных значэннях $x\in(-\infty;0)$, значыць, функцыя нарастае на прамежку $(-\infty;0]$.

Паколькі $f(0)=0$, то для любых $x<0$ выконваецца няроўнасць $f(x)<f(0)$, а значыць

$$2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)<e^{-x}-e^x.$$

Прыклад 12. Даказаць, што пры $0\le p\le 1$ і любых дадатных a і b мае месца няроўнасць

$$(a+b)^p\le a^p+b^p.$$

Доказ. Калі $p=0$ або $p=1$, то мае $1=1$, $a+b=a+b$ адпаведна. Няхай $0<p<1$. Няроўнасць можна запісаць у выглядзе

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^p\le\left(\frac{a}{b}\right)^p+1$$

або

$$(1+x)^p\le 1+x^p,$$

дзе $x=\frac{a}{b}$.

Разгледзім функцыю $f(x)=1+x^p-(1+x)^p$, $x\ge 0$.

Вытворная гэтай функцыі

$$f'(x)=px^{p-1}-p(1+x)^{p-1}=p\left(\frac{1}{x^{1-p}}-\frac{1}{(1+x)^{1-p}}\right)$$

будзе дадатнай, бо, згодна з умовай, $1-p>0$ і $x>0$. Такім чынам, на прамежку $[0;+\infty)$ функцыя нарастае, г.зн.

$$f(x)=1+x^p-(1+x)^p>f(0)=0\text{, адкуль } 1+x^p>(1+x)^p.$$

Прыклад 13. Даказаць наступную тэарэму Гюйгенса: калі p_n і P_n – перыметры правільных *n*-вугольнікаў, упісанага ў акружнасць радыуса *R* і апісанага вакол яе, то

$$\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}P_n > 2\pi R.$$

Доказ. Спачатку адзначым, што

$$p_n = 2Rn\sin\frac{\pi}{n}, \quad P_n = 2Rn\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n},$$

таму

$$\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}P_n = \frac{2Rn}{3}\left(2\sin\frac{\pi}{n} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{n}\right)$$

і няроўнасць прыме выгляд

$$2\sin\frac{\pi}{n} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{n} > 3\frac{\pi}{n}.$$

Дакажам больш агульную няроўнасць

$$2\sin x + \mathrm{tg}x > 3x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

з якой і будзе вынікаць тэарэма Гюйгенса.

Разгледзім функцыю

$$f(x) = 2\sin x + \mathrm{tg}x - 3x.$$

Вытворная гэтай функцыі мае выгляд

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{(2\cos^3 x - 2\cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{(1-\cos x)(1 + \cos x - 2\cos^2 x)}{\cos^2 x}.$$

Пры $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $1 - \cos x > 0$, $\cos^2 x > 0$ і $1 + \cos x - 2\cos^2 x = 1 - \cos^2 x + \cos x(1 - \cos x) > 0$, таму

$f'(x) > 0$. Гэта сведчыць аб тым, што функцыя $f(x)$ нарастае, калі $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Улічваючы, што $f(0)=0$, будзем мець $2\sin x+\mathrm{tg}x-3x>0$. Такім чынам, даказалі, што

$$2\sin x+\mathrm{tg}x>3x, \text{ калі } 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Прыклад 14. Даказаць, што няроўнасць $[4, 5]$

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc$$

мае месца для любых дадатных значэнняў *a*, *b* і *c*.

Доказ. Без абмежавання агульнасці можна лічыць, напрыклад, што $0<a\leq b\leq c$. Разгледзім функцыю $f(x)=x^3+b^3+c^3-3xbc$, $0<x<b$.

Паколькі $f'(x)=3(x^2-bc)$, то $f'(x)<0$ пры $0<x<b\leq c$. Адсюль вынікае, што функцыя $f(x)$ спадае на адрэзку $[0;b]$. Такім чынам, $f(a)\geq f(b)$, г.зн.

$$a^3+b^3+c^3-3abc\geq 2b^3+c^3-3b^2c.$$

Разгледзім цяпер другую дапаможную функцыю $g(x)=2x^3+c^3-3x^2c$, $0<x<c$. Маем, што $g'(x)=6x(x-c)$. Адсюль вынікае, што $g'(x)<0$ пры $0<x<c$, і, значыць, функцыя $g(x)$ спадае на адрэзку $[0;c]$. Такім чынам, $g(b)\geq g(c)$, г.зн.

$$2b^3+c^3-3b^2c\geq 2c^3+c^3-3c^2c=0.$$

Тады і

$$a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0.$$

Прыклад 15. Даказаць, што

1) $x_1^{\frac{1}{x_1}}<x_2^{\frac{1}{x_2}}$ і $x_1^{x_2}<x_2^{x_1}$, калі $0<x_1<x_2\leq e$;

2) $x_1^{\frac{1}{x_1}}>x_2^{\frac{1}{x_2}}$ і $x_1^{x_2}>x_2^{x_1}$, калі $e\leq x_1<x_2$.

Доказ. Разгледзім непарыўную на прамежку $(0;+\infty)$ функцыю $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Паколькі яе вытворная $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ роўная нулю пры $x=e$, а пры $0<x<e$ $f'(x)>0$ і $f'(x)<0$ пры $x>e$, то на прамежку $(0;e]$ функцыя $f(x)$ нарастае, на прамежку $[e;+\infty)$ − спадае. Тады для любых значэнняў x_1 і x_2 такіх, што $0<x_1<x_2\le e$, будзе выконвацца няроўнасць $f(x_1)<f(x_2)$, г.зн. $\dfrac{\ln x_1}{x_1}<\dfrac{\ln x_2}{x_2}$. Апошнюю няроўнасць запішам у выглядзе $\dfrac{1}{x_1}\ln x_1<\dfrac{1}{x_2}\ln x_2$, $\ln x_1^{\frac{1}{x_1}}<\ln x_2^{\frac{1}{x_2}}$.

Улічваючы, што функцыя $\ln t$ нарастальная, атрымаем $x_1^{\frac{1}{x_1}}<x_2^{\frac{1}{x_2}}$. Калі ж абедзве часткі няроўнасці $\dfrac{\ln x_1}{x_1}<\dfrac{\ln x_2}{x_2}$ памножыць на здабытак $x_1x_2>0$, то атрымаем $x_2\ln x_1<x_1\ln x_2$, $\ln x_1^{x_2}<\ln x_2^{x_1}$, адкуль і будзем мець $x_1^{x_2}<x_2^{x_1}$.

Калі ж $e\le x_1<x_2$, то $f(x_1)>f(x_2)$, г.зн. далей $\dfrac{\ln x_1}{x_1}>\dfrac{\ln x_2}{x_2}$, адкуль атрымаем $x_1^{\frac{1}{x_1}}>x_2^{\frac{1}{x_2}}$ і $x_1^{x_2}>x_2^{x_1}$.

Даказаныя ў прыкладзе 15 няроўнасці можна выкарыстоўваць пры параўнанні лікаў і пры доказе лікавых няроўнасцей.

Прыклад 16. Параўнаць $\left(\mathrm{tg}48^0\right)^{\mathrm{ctg}48^0}$ і $\left(\mathrm{tg}50^0\right)^{\mathrm{ctg}50^0}$.

Рашэнне. Адзначым, што $\mathrm{tg}48^0=\mathrm{tg}\dfrac{4\pi}{15}$, $\mathrm{ctg}48^0=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\frac{4\pi}{15}}$, $\mathrm{tg}50^0=\mathrm{tg}\dfrac{5\pi}{18}$, $\mathrm{ctg}50^0=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\frac{5\pi}{18}}$, а таксама $0<\mathrm{tg}\dfrac{4\pi}{15}<\mathrm{tg}\dfrac{5\pi}{18}<\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{3}<e$. Калі ўзяць $x_1=\mathrm{tg}\dfrac{4\pi}{15}$, $x_2=\mathrm{tg}\dfrac{5\pi}{18}$ і ўлічыць, што $x_1^{\frac{1}{x_1}}<x_2^{\frac{1}{x_2}}$, калі $0<x_1<x_2\le e$, то атрымаем $\left(\mathrm{tg}\dfrac{4\pi}{15}\right)^{\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{4\pi}{15}}}<\left(\mathrm{tg}\dfrac{5\pi}{18}\right)^{\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{5\pi}{18}}}$, г.зн. $\left(\mathrm{tg}48^0\right)^{\mathrm{ctg}48^0}<\left(\mathrm{tg}50^0\right)^{\mathrm{ctg}50^0}$.

Прыклад 17. Параўнаць лікі 600^{1000} і 1000^{600}.

Рашэнне. Будзем карыстацца няроўнасцю $x_1^{x_2} > x_2^{x_1}$, калі $e \le x_1 < x_2$. Мяркуючы, што $x_1 = 600$ і $x_2 = 1000$, маем $e < 600 < 1000$, значыць, $600^{1000} > 1000^{600}$.

Прыклад 18. У арыфметычнай і геаметрычнай прагрэсій лік элементаў і крайнія элементы адпаведна аднолькавыя, і ўсе элементы прагрэсій дадатныя. Даказаць, што ў арыфметычнай прагрэсіі сума членаў большая, чым у геаметрычнай [6].

Доказ. Абазначым першы элемент прагрэсій праз *a*, суму *n* элементаў арыфметычнай прагрэсіі праз S_n, а суму *n* элементаў геаметрычнай прагрэсіі – S'_n. Тады

$$S_n = \frac{n\left(2a + d(n-1)\right)}{2}, \quad S'_n = \frac{a\left(q^n - 1\right)}{q-1},$$

дзе *d* – рознасць арыфметычнай прагрэсіі, а *q* – назоўнік геаметрычнай прагрэсіі. З умовы задачы вынікае, што $q > 0$, $q \ne 1$.

Калі параўноўваць *n*-я члены прагрэсій, знойдзем

$$d = \frac{a\left(q^{n-1} - 1\right)}{n-1}.$$

Падставім знойдзенае *d* у выраз для S_n:

$$S_n = \frac{na\left(1 + q^{n-1}\right)}{2}.$$

Патрэбна даказаць няроўнасць

$$\frac{n\left(1 + q^{n-1}\right)}{2} > 1 + q + \ldots + q^{n-1}$$

пры $0 < q < 1$ і пры $q > 1$.

Будзем карыстацца метадам матэматычнай індукцыі.

Пры $n = 3$ маем $3\left(1 + q^2\right) > 2\left(1 + q + q^2\right)$, што раўназначна няроўнасці $(q-1)^2 > 0$.

Дапусцім, што праўдзівым з’яўляецца няроўнасць

$$n\left(1+q^{n-1}\right)>2\left(1+q+\ldots+q^{n-1}\right),$$

і дакажам, што пры гэтым меркаванні мае месца няроўнасць

$$(n+1)\left(1+q^{n}\right)>2\left(1+q+\ldots+q^{n}\right).$$

Згодна з нашым дапушчэнем

$$\begin{aligned}(n+1)\left(1+q^{n}\right)&=n\left(1+q^{n-1}\right)+(n+1)q^{n}-nq^{n-1}+1>\\&>2\left(1+q+\ldots+q^{n-1}\right)+(n+1)q^{n}-nq^{n-1}+1=\\&=2\left(1+q+\ldots+q^{n}\right)+(n-1)q^{n}-nq^{n-1}+1.\end{aligned}$$

Разгледзім функцыю $f(q)=(n-1)q^{n}-nq^{n-1}+1$. Яе вытворная $f'(q)=n(n-1)q^{n-1}-n(n-1)q^{n-2}=n(n-1)q^{n-2}(q-1)$. Калі $0<q<1$, $f'(q)<0$. Пры $q>1$ $f'(q)>0$. Такім чынам, функцыя $f(q)$ спадае на інтэрвале $(0;1)$ і нарастае на прамежку $(1;+\infty)$. Улічваючы, што $f(1)=0$, атрымліваем $f(q)>0$ для ўсіх $q>0$ $(q\neq 0)$. Значыць, праўдзівай будзе няроўнасць

$$(n+1)\left(1+q^{n}\right)>2\left(1+q+\ldots+q^{n}\right).$$

Пры дапамозе метаду матэматычнай індукцыі мы даказалі, што $S_n>S'_n$.

Падводзячы вынікі, можна адзначыць, што выкарыстанне вытворнай пры рашэнні алгебраічных задач, на наш погляд, узмацняе прыкладную накіраванасць школьнага курса матэматыкі, а таксама унутрыпрадметныя сувязі, развівае функцыянальныя ўяўленні вучняў, актывізуе іх пазнавальную дзейнасць. Усё гэта спрыяе павышэнню матэматычнай падрыхтоўкі вучняў, іх агульнаадукацыйнага ўзроўню.

Практыкаванні для самастойнага рашэння

Пры дапамозе формулы Лагранжа даказаць наступныя няроўнасці:

1. $\left|\sin x_1 - \sin x_2\right| \le \left|x_1 - x_2\right|$ пры любых рэчаісных x_1 і x_2.

2. $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ пры $x > 0$.

3. $\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 < x_2 - x_1$ калі $x_2 > x_1$.

4. $\frac{1}{4} < \arcsin 0{,}8 - \arcsin 0{,}6 < \frac{1}{3}$.

5. $py^{p-1}(x-y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x-y)$, калі $0 < y < x$ і $p > 1$.

Указанне: прымяніць формулу Лагранжа да функцыі z^p на адрэзку $[y; x]$.

Даказаць наступныя тоеснасці:

6. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)^2$.

7. $1 - \left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) = 3\sin^2 x \cos^2 x$.

8. $\left(\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x\right)^2 + \left(\sin^3 x - 3\sin x \cos^2 x\right)^2 = 1$.

9. $\cos^4 x - \frac{1}{8}\cos 4x = 2\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{5}{8}$.

10. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 3x = \arccos\frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}} + \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

11. $a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x$.

12. $\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2\operatorname{arctg} x, x \ge 1, \\ 2\operatorname{arctg} x, -1 \le x \le 1, \\ -\pi - 2\operatorname{arctg} x, x \le -1. \end{cases}$

13. $$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\begin{cases}\pi-2\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, x\in(-\infty;-1),\\ \pi+2\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, x\in[-1;0),\\ -\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, x\in[0;1),\\ \arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, x\in[1;+\infty).\end{cases}$$

Даказаць наступныя няроўнасці:

14. $\operatorname{tg}x > 3x+2\sin x$, калі $0<x<\frac{\pi}{2}$.

15. $x^2-x^3<\frac{1}{6}$, калі $x\ge 0$.

16. $\operatorname{tg}x > x+\frac{x^3}{3}$, калі $0<x<\frac{\pi}{2}$.

17. $x-\frac{x^3}{3}<\operatorname{arctg}x<x-\frac{x^3}{6}$, $x\in(0;1]$.

18. $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$, $x>0$.

19. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\le\frac{x^n+y^n}{2}$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $n\in N$.

20. $\left(x^\alpha+y^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}>\left(x^\beta+y^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$, $x>0$, $y>0$, $0<\alpha<\beta$.

21. $a^4+b^4\ge a^3b+ab^3$.

22. $(a+b+c)^2\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

23. Які з лікаў $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\sin\frac{\pi}{3}}$ або $\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\sin\frac{\pi}{6}}$ большы?

24. Які з лікаў e^π або π^e большы?

Спіс скарыстаных крыніц

1. Алгебра і пачаткі аналізу: Вучэб. дапам. для 10-га кл. сярэд. агульнаадукацыйн. шк. з паглыб. вывуч. матэматыкі / К.А. Ананчанка, В.С. Каваленка, М.Ц. Вараб'ёў і інш.− Мн.: Нар. асвета, 1996.– 375 с.

2. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10–11кл. сред. шк. / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; Под ред. А.Н. Колмогорова.− М.: Просвещение, 1993.– 320 с.

3. Башмакоў, М.І. Алгера і пачаткі аналізу: Падруч. для 10–11-х кл. сярэд. шк. / М.І. Башмакоў.− Мн.: Нар. асвета, 1996.– 399 с.

4. Савіч, Л.К. Вытворная, інтэграл і іх прымяненні / Л.К. Савіч.– Мн.: Нар. асвета, 1990.– 135 с.

5. Задачи по математике. Начала анализа: Справ. пособие / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 608 с.

6. Математический анализ в примерах и задачах, ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач.– Киев: Вища школа, 1974.– 680 с.

Матэматыка. 2014. № 6. С. 28–36.