В.А. Шилинец, *декан математического факультета БГПУ*

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Математика занимает одно из центральных мест в общей системе образования. Эта её роль определяется глубоким богатством математических идей и результатов, накопленных человечеством за тысячи лет развития, непрерывно расширяющимся спектром приложений математики к самым разнообразным сторонам жизни и деятельности человека, несомненным влиянием математики на воспитание важнейших личностных качеств. Огромен вклад математики в индивидуальное развитие личности, прежде всего в таких направлениях, как точность и ясность мысли, воля и целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность, интуиция, развитость пространственных представлений, способность ориентироваться в новых ситуациях, творческая активность и самостоятельность, способность воспринимать красоту и гармонию мира.

Можно с полной уверенностью сказать, что из всех математических дисциплин именно занятие геометрией в наибольшей степени способствует развитию интуиции и воображения, а следовательно, способствует творческому развитию личности, так как интуиция и воображение – основа любого творчества. Мы всегда должны помнить слова Галилео Галилея: «Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать». Обучение языку геометрии является одной из важнейших целей математического образования. Хорошее геометрическое образование, пространственное воображение и логическое мышление – необходимые атрибуты не только математика, но и инженера, и экономиста, и дизайнера, и юриста, и программиста, а также специалистов других специальностей.

К сожалению, геометрическое образование в сегодняшней белорусской средней и высшей педагогической школе вызывает определенную озабоченность. Педагогическому сообществу Беларуси предстоит решить ряд проблем качественного улучшения геометрического образования учащихся школ и студентов-математиков педагогических учреждений высшего образования, среди которых первостепенными являются проблемы развития пространственного воображения, графической культуры, логического мышления и умений аргументировано обосновывать возникающие утверждения.

Владение геометрией означает умение решать геометрические задачи. Как известно, мыслительные процессы у человека протекают в форме образов, поэтому в геометрической задаче первостепенную роль играет чертёж, являющийся средством создания геометрического образа по словесному описанию.

Таким образом, первым и важнейшим этапом решения геометрической задачи является построение верного, наглядного чертежа (рисунка) по условию этой задачи. Умение построить грамотный чертёж, помогающий решению задачи, является важнейшим элементом геометрической культуры.

Важнейшим требованием к чертежу является требование простоты, лаконичности. Ученик должен научиться изображать на рисунке лишь «функционирующие» при решении данной задачи части геометрической фигуры. Необходимо избегать чрезмерного усложнения чертежа.

С другой стороны, стоит непосредственно на чертеже указывать числовые или буквенные значения линейных или угловых величин, заданных в условии или полученных (введённых) в процессе решения задачи.

Многие планиметрические задачи традиционными методами (метод цепочек равных треугольников, метод геометрических преобразований, векторный метод и др.) либо вовсе не решаются, либо имеют сложные и громоздкие решения. Во многих случаях решать такого рода задачи помогают дополнительные построения (ДП), т.е. введение в чертёж дополнительных линий, после чего связи между данными и искомыми величинами становятся более ощутимыми или даже очевидными.

Выполнение дополнительных построений – другая, ещё большая проблема при решении задач планиметрии, так и стереометрии. Отметим, что умение находить самостоятельно удачное дополнительное построение приходит с опытом решения геометрических задач.

Данная статья и посвящена вопросу использования при решении планиметрических задач ДП. Рассмотрим ДП, использование которых целесообразно при решении планиметрических задач, связанных с треугольниками и четырёхугольниками [1].

1. Пусть в треугольнике ABC задана медиана AA_1. Тогда треугольник достраивается до параллелограмма с центром в основании этой медианы (рис.1).

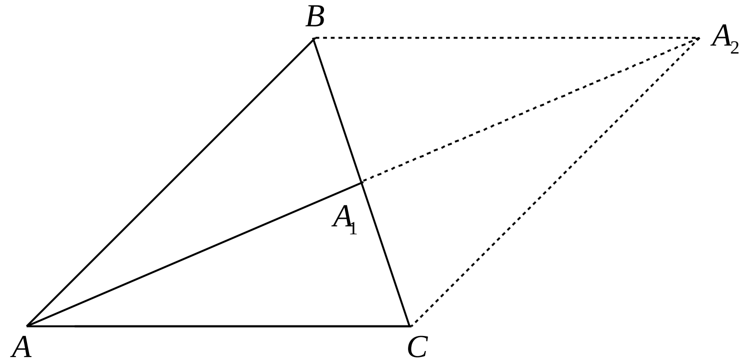


Рисунок 1

В зависимости от содержания задачи такое достраивание можно выполнять для одной, двух или даже трёх медиан.

2. Пусть в треугольнике ABC задана некоторая трансверсаль AA_1. Будем называть трансверсалью отрезок прямой, проведённый через его вершину, заключённый внутри треугольника. Тогда через её основание внутрь треугольника проводится луч, параллельный стороне, до его пересечения с другой стороной треугольника (рис.2).

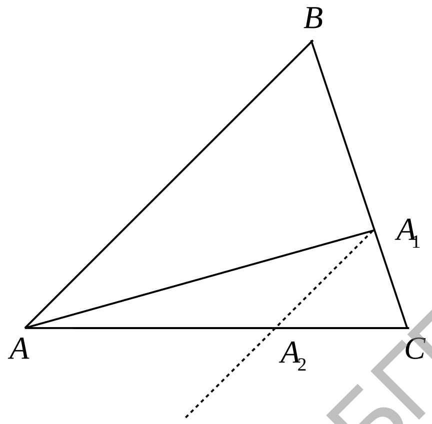


Рисунок 2

Заметим, что в результате ДП возникает ситуация Фалеса: $\angle ACB$, секущие $A_1A_2 \,//\, AB \Rightarrow \frac{CA_2}{CA_1} = \frac{A_2A}{A_1B}$. В частности, когда трансверсаль AA_1 является медианой, A_2 – середина стороны AC.

3. Пусть в треугольнике ABC заданы медиана AA_1 и некоторая произвольная трансверсаль BB_1 (в том числе – высота, биссектриса или вторая медиана), проведённые из разных вершин. Тогда через основание медианы внутрь треугольника проводится луч, параллельный данной трансверсали, до его пересечения со стороной треугольника (рис. 3).

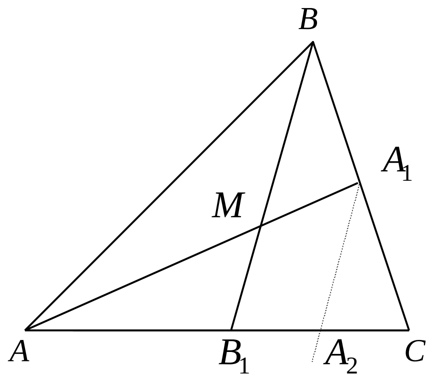
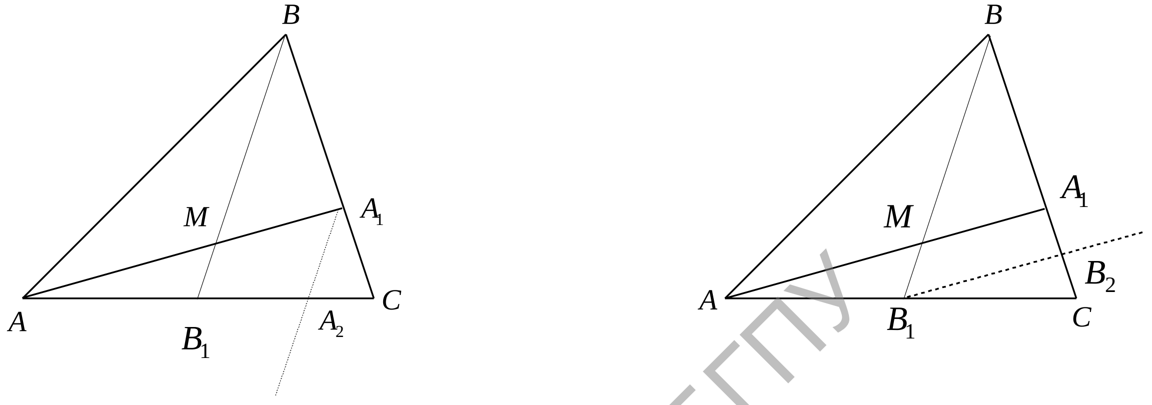


Рисунок 3

В результате ДП возникают две ситуации Фалеса: 1) $\angle ACB$, секущие $A_1A_2 \,//\, BB_1$; 2) $\angle A_1AC$, секущие $MB_1 \,//\, A_1A_2$.

Из первой ситуации получаем, что A_2 – середина B_1C, из второй, что $\dfrac{AM}{AB_1} = \dfrac{MA_1}{B_1A_2}$.

4. Если в треугольнике ABC заданы две произвольные трансверсали AA_1 и BB_1, проведённые из разных вершин, то через основание одной из них внутрь треугольника проводится луч, параллельный другой трансверсали, до пересечения со стороной треугольника (рис. 4).

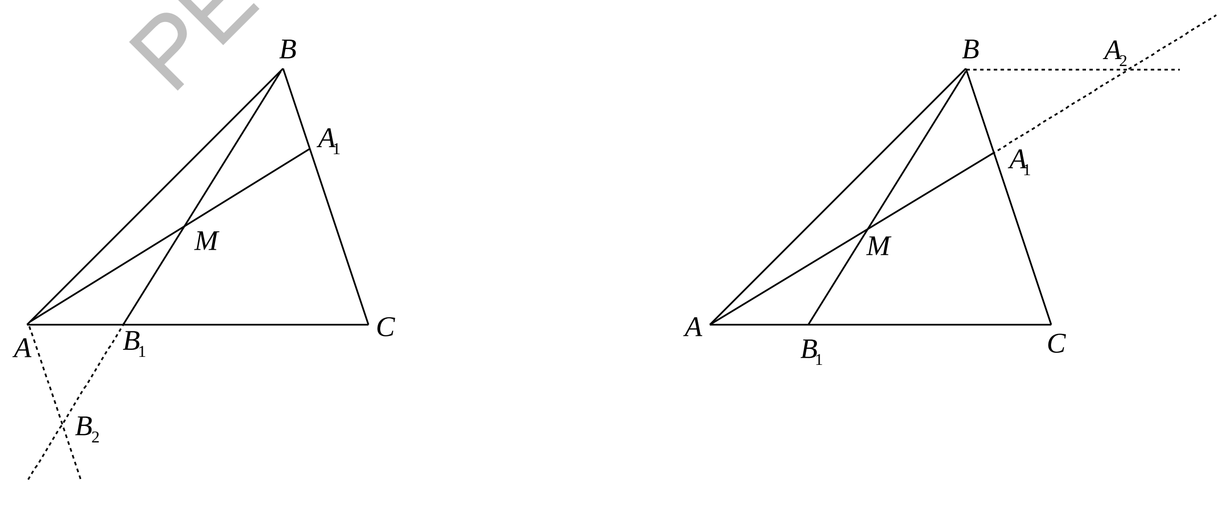


а)　　　　　　*б*)

Рисунок 4

ДП(4) отличается от ДП(3) только тем, что здесь первая ситуация Фалеса даёт не равные, а пропорциональные отрезки. В результате ДП(2) – ДП(4) попутно возникают подобные треугольники.

5. Если в треугольнике ABC две трансверсали AA_1 и BB_1, проведённые из разных вершин, то через начало одной из них (вершину треугольника) проводится прямая, параллельная стороне треугольника, до пересечения с продолжением другой трансверсали (рис. 5).



а)　　　　　　*б*)

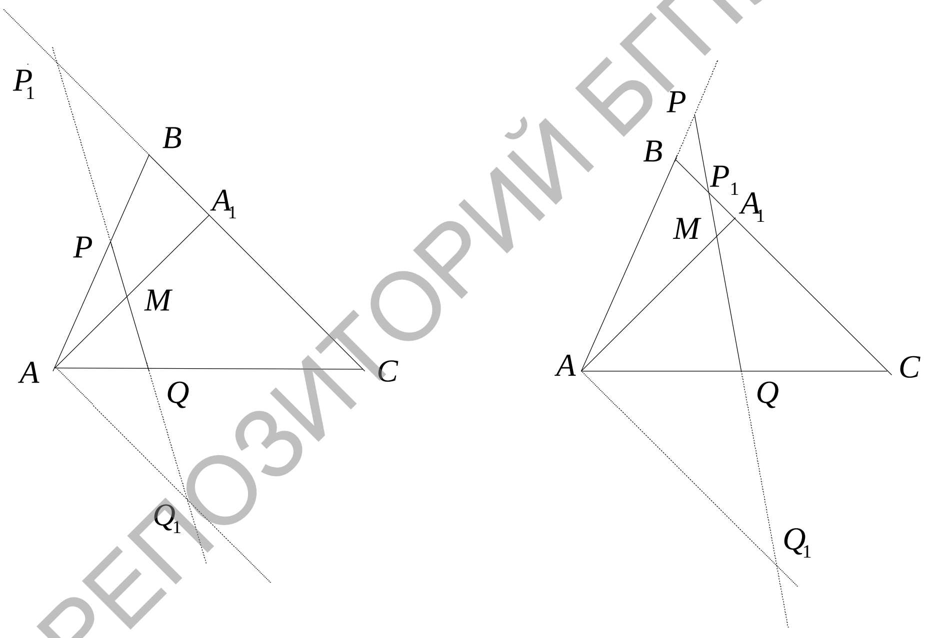
Рисунок 5

В результате описанного ДП возникают две пары подобных треугольников: $\Delta AMB_2 \sim \Delta A_1MB$, $\Delta AB_1B_2 \sim \Delta CB_1B$ (рис. 5 *а*)); $\Delta AMB_1 \sim \Delta A_2MB$, $\Delta AA_1C \sim \Delta A_2A_1B$ (рис. 5 *б*)).

6. Пусть в треугольнике ABC заданы некоторая трансверсаль AA_1 и отрезок PQ с концами на двух сторонах треугольника, пересекающий эту трансверсаль и не параллельный третьей стороне. Не исключается случай, когда один из концов заданного отрезка принадлежит продолжению стороны треугольника. Тогда:

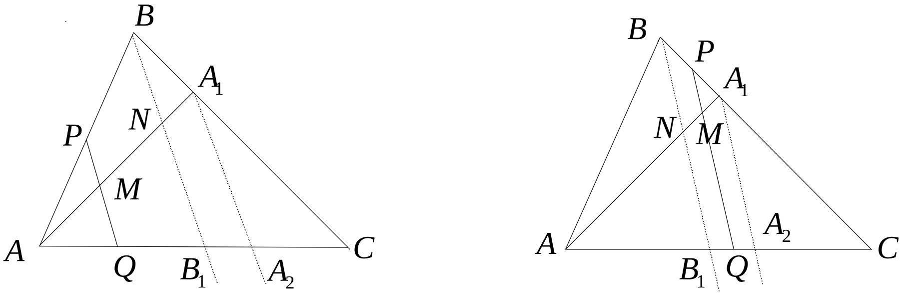
1) либо данный отрезок продолжается в обе стороны до пересечения с продолжением третьей стороны и с прямой, параллельной этой стороне и проходящей через вершину треугольника, из которой выходит трансверсаль (рис. 6);

2) либо через основание трансверсали и одну из вершин треугольника, не совпадающую с началом трансверсали, внутрь треугольника проводятся лучи, параллельные данному отрезку, до пересечения со стороной треугольника (рис. 7).



а) *б*)

Рисунок 6



а) *б*)

Рисунок 7

В первом случае возникают три пары подобных треугольников. На рисунке 6 имеем:

$$\Delta APQ_1 \sim \Delta BPP_1,\ \Delta AQQ_1 \sim \Delta CQP_1,\ \Delta AMQ_1 \sim \Delta A_1MP_1.$$

Во втором случае возникает несколько ситуаций Фалеса.

7. Пусть в треугольнике ABC задан отрезок PQ с концами на его стороне. Если продолжение этого отрезка пересекает прямую, содержащую третью сторону треугольника, то:

1) либо отрезок продолжается до пересечения с прямой, проведенной через вершину треугольника параллельно третьей стороне (рис. 8);

2) либо через другой конец данного отрезка внутрь треугольника проводится луч, параллельный одной из сторон, до пересечения с другой стороной (рис. 9).

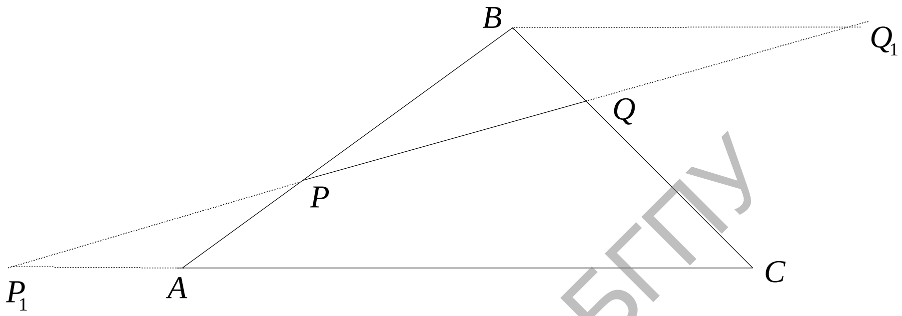
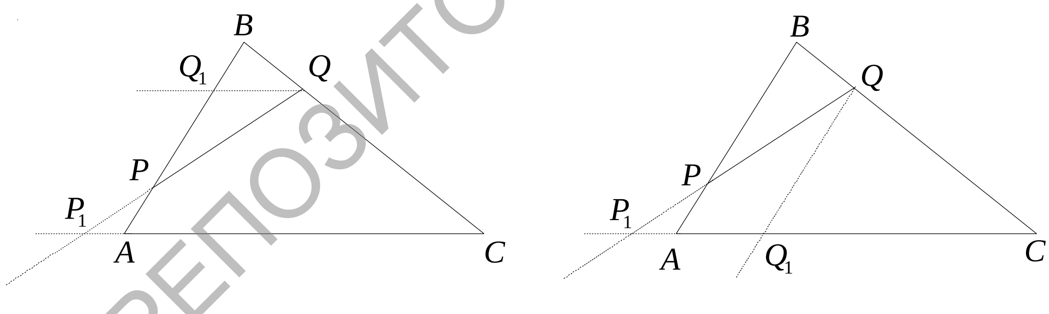


Рисунок 8



а) *б*)

Рисунок 9

В результате ДП возникают подобные треугольники. Так, например, на рисунке 9 *б*) $\Delta PP_1A \sim \Delta QP_1Q_1$, $\Delta ACB \sim \Delta Q_1CQ$.

8. Пусть дан прямоугольный треугольник. Он достраивается до равнобедренного треугольника, в котором один из катетов данного треугольника становиться высотой (медианой и биссектрисой), а другой – половиной основания (рис.10).

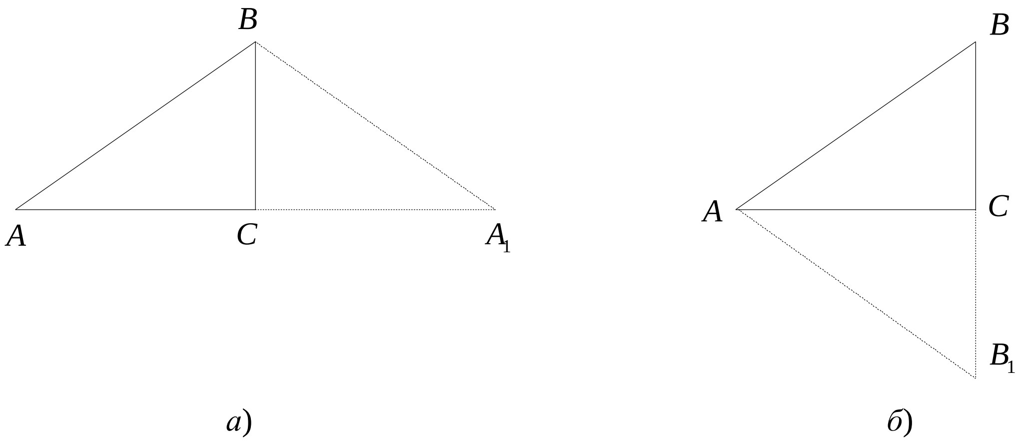


Рисунок 10

9. Пусть дана трапеция $ABCD$. Тогда её диагональ или боковая сторона переносятся на вектор, определяемый одним из оснований (рис.11).

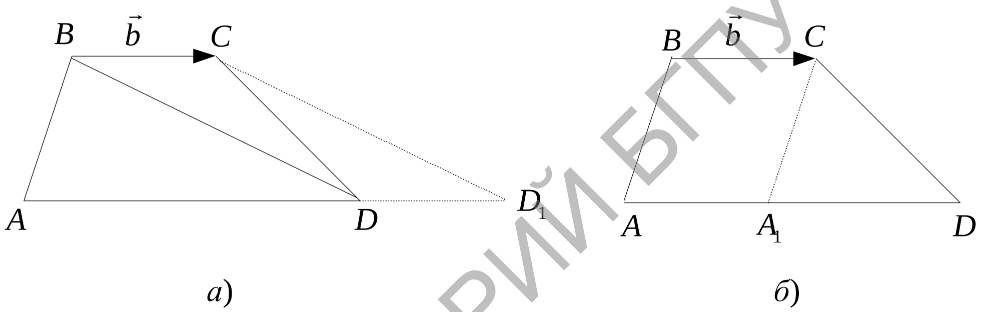


Рисунок 11

10. Если в треугольнике, параллелограмме или трапеции задана биссектриса одного из внутренних углов, то в рассмотрение вводится ромб, две стороны которого направлены по сторонам данной фигуры, а эта биссектриса является одной из диагоналей (рис. 12 – 14).

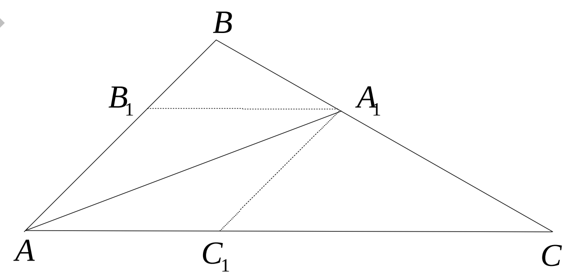


Рисунок 12

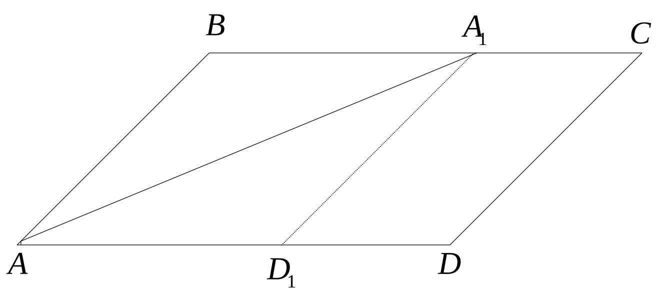
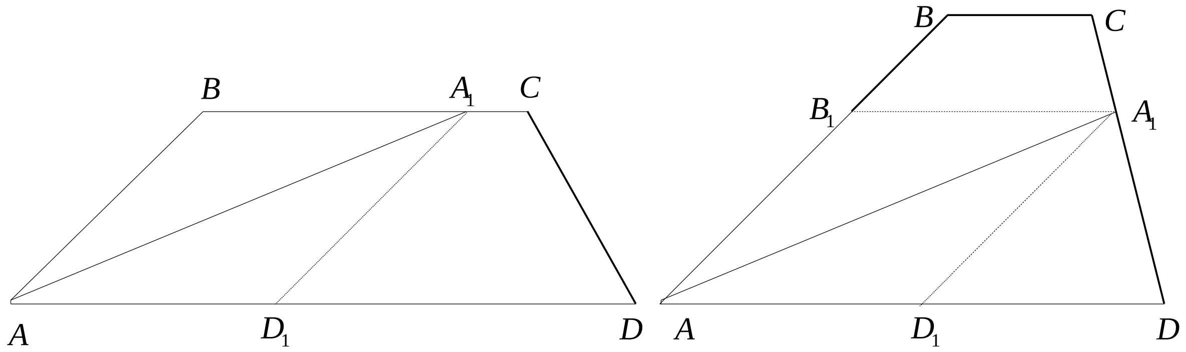


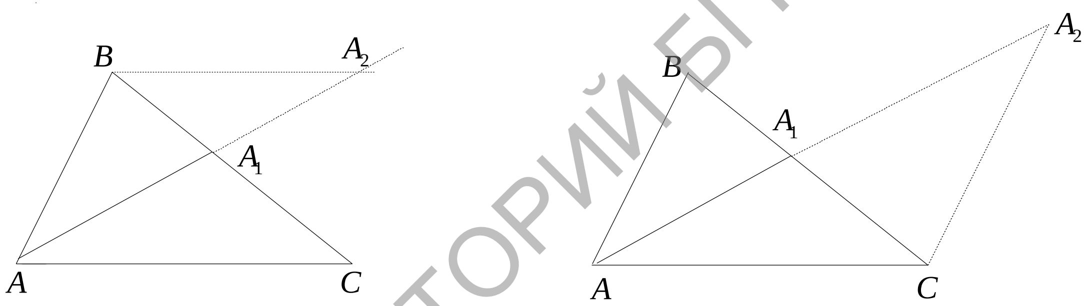
Рисунок 13



а)   *б*)

Рисунок 14

11. Если в треугольнике, параллелограмме или трапеции задана биссектриса одного из внутренних углов, то в рассмотрение вводится треугольник, одна из сторон которого содержит эту биссектрису, вторая совпадает со стороной исходной фигуры, а третья либо параллельна другой стороне этой фигуры, либо получается при её продолжении (рис. 15 – 17).



а)   *б*)

Рисунок 15

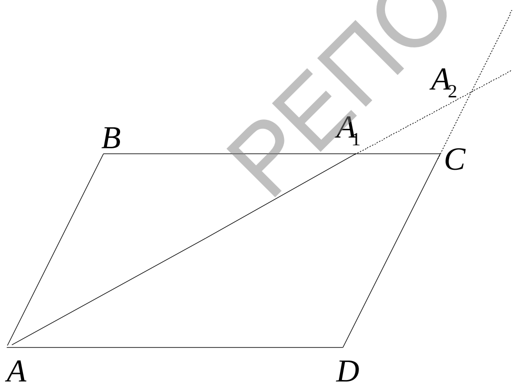


Рисунок 16

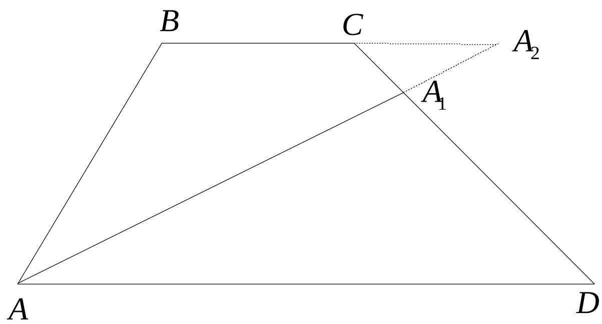


Рисунок 17

Для выполнения ДП достаточно продолжить биссектрису до пресечения с прямой, параллельной стороне данного треугольника или проходящей через сторону данного параллелограмма и трапеции. Заметим, что построенный треугольник – равнобедренный. Его основанием является сторона, содержащая данную биссектрису.

12. Пусть в параллелограмме или трапеции через две смежные вершины проведены внутренние лучи этих фигур (в том числе диагональный луч). Тогда строятся точки пересечения

этих лучей с параллельными сторонами данных фигур или их продолжением (рис. 18).

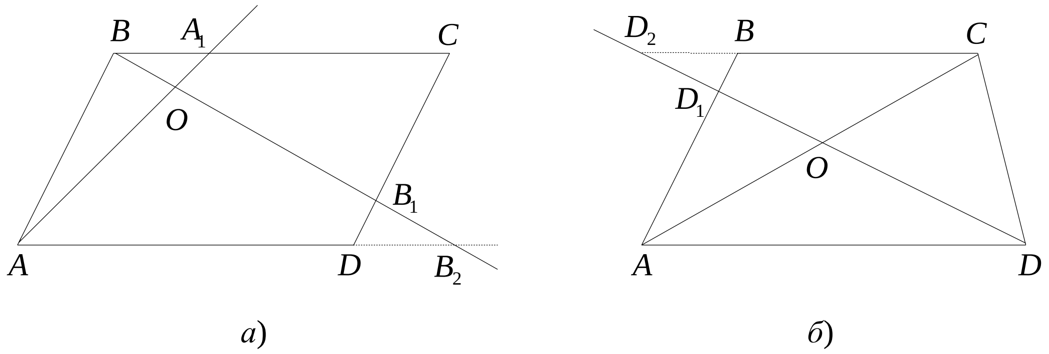


Рисунок 18

В результате выполнения ДП на чертеже возникают подобные треугольники.

13. Если дана трапеция, то, продолжая боковые стороны, она достраивается до треугольника (рис. 19).

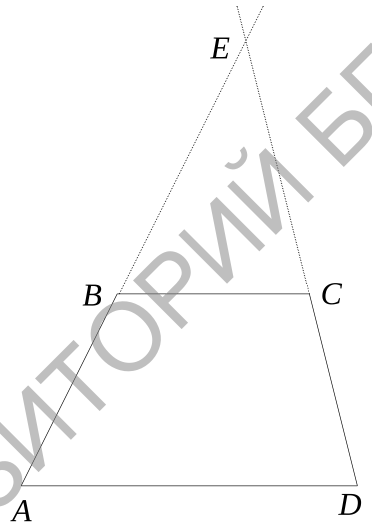


Рисунок 19

14. Пусть дан прямоугольный треугольник, тогда вокруг него описывается окружность, центром которой является середина гипотенузы (рис. 20).

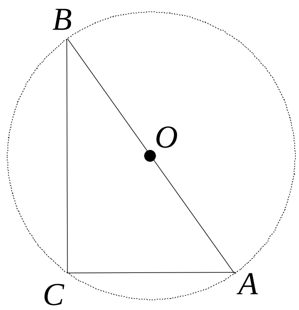


Рисунок 20

15. Пусть дан четырёхугольник, у которого суммы противоположных углов равны. Тогда вокруг четырёхугольника описывается окружность (рис. 21). Если же дан четырёхугольник, у которого суммы противоположных сторон равны, то в него вписывается окружность (рис. 22).

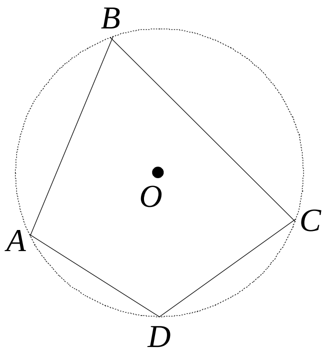


Рисунок 21

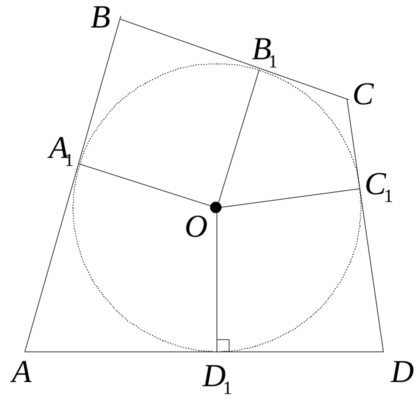


Рисунок 22

17. Пусть в треугольнике задана биссектриса и медиана или биссектриса и серединный перпендикуляр, проведённые к одной и той же стороне. Тогда около треугольника описывается окружность, а биссектриса продолжается до пересечения с нею (рис.23).

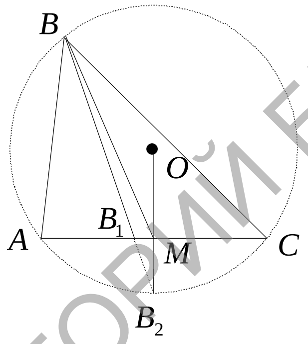


Рисунок 23

Проиллюстрируем на некоторых планиметрических задачах применение на практике описанных выше дополнительных построений.

Задача 1. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной 8 см, проведена медиана боковой стороны. Найти основание треугольника, если медиана равна 6 см [2].

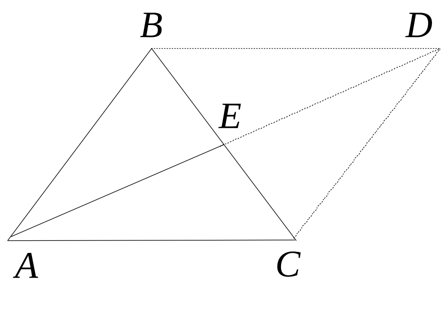


Рисунок 24

Дано: ΔABC, $AB = BC = 8$ см, $BE = EC$, $AE = 6$см.

Найти: AC.

Решение. 1) ΔABC достраиваем до параллелограмма $ABCD$ (рис. 24), центром которого является точка E.

2) $AE = 6$, $AD = 2AE = 12$, $AC = x$.

3) $AD^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2) \Rightarrow 12^2 + 8^2 = 2(8^2 + x^2) \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$.

Ответ: $2\sqrt{10}$ см.

Задача 2. Определить площадь треугольника, если две стороны соответственно равны 27 см и 29 см, медиана третьей стороны равна 26 см [3].

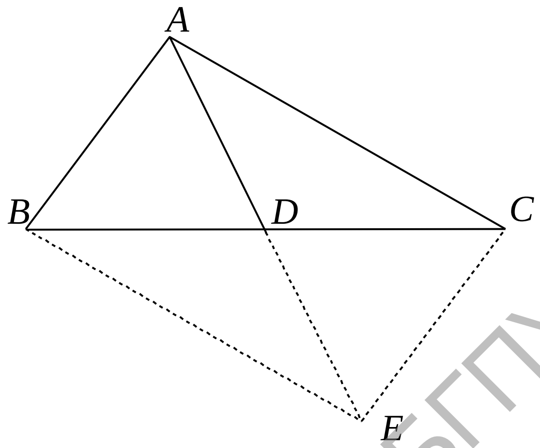


Рисунок 25

Дано: ΔABC, $AB = 27$ см, $AC = 29$ см, $BD = DC$, $AD = 26$ см.

Найти: $S_{\Delta ABC}$.

Решение. 1) Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABEC$ (рис. 25).

2) Площадь ΔABC составляет половину площади полученного параллелограмма, но и площадь ΔABE также составляет половину площади параллелограмма $ABEC$. Следовательно, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABE}$.

3) $AB = 27$ см, $BE = 29$ см, $AE = 52$ см. Площадь треугольника, длины сторон которого равны a, b, c, находится по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $2p = a + b + c$.

4) Подставляя в эту формулу числовые значения длин сторон, находим, что площадь ΔABE, как и площадь ΔABC, равна 270 см^2.

Ответ: 270 см^2.

Задача 3. Доказать, что в прямоугольном треугольнике с катетами a и b биссектриса прямого угла равна $l = \dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$ [4].

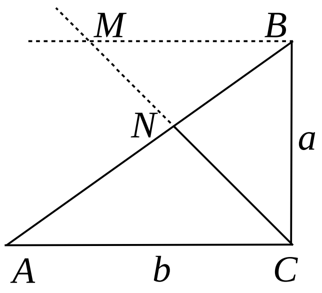


Рисунок 26

Дано: ΔABC, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = b$, $BC = a$, $\angle BCN = \angle ACN$, $NC = l$.

Доказать: $l = \dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Доказательство. 1) Продолжим биссектрису CN до пересечения с прямой MB, параллельной стороне AC данного треугольника (рис.26).

2) $MB = BC = a$, $MC = a\sqrt{2}$.

3) $\Delta MNB \sim \Delta ANC$, откуда следует пропорция $\dfrac{MB}{AC} = \dfrac{MN}{NC}$, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a\sqrt{2}-l}{l}$, $l = \dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Заметим, что данная задача предполагает и другие доказательства.

Задача 4. Найти площадь трапеции, диагонали которой равны 7 и 8 см, а основания – 3 и 6 см [5].

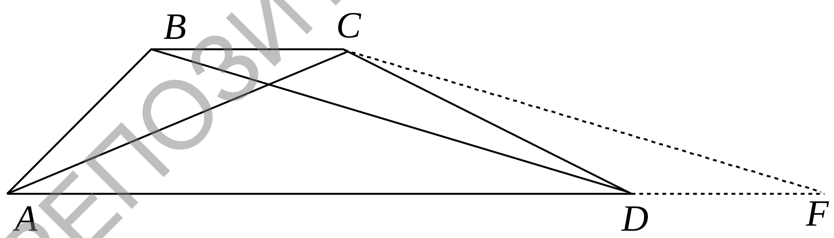


Рисунок 27

Дано: $ABCD$ – трапеция, $AC = 7$ см, $BD = 8$ см, $BC = 3$ см, $AD = 6$ см.

Найти: S_{ABCD}.

Решение. 1) Применив дополнительное построение ($CF \,//\, BD$) (рис. 27), получим ΔACF, площадь которого равна площади трапеции $ABCD$.

2) Площадь ΔACF находим по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c – длины сторон треугольника, $2p = a+b+c$.

3) Подставляя в эту формулу числовые значения длин сторон, находим $S_{ABCD} = S_{\Delta ACF} = 12\sqrt{5}$ см^2.

Ответ: $12\sqrt{5}$ см^2.

Задача 5. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, такая, что $AM = \frac{2}{5}AC$, а на стороне BC – точка K, такая, что $BK = \frac{1}{3}BC$. В каком отношении отрезок BM делит отрезок AK [6]?

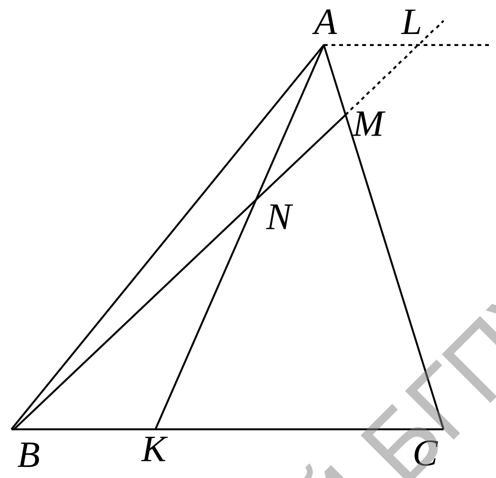


Рисунок 28

Дано: ΔABC, $AM = \frac{2}{5}AC$, $BK = \frac{1}{3}BC$.

Найти: $\frac{AN}{NK}$.

Решение. 1) Проведем через точку A прямую, параллельную BC, и обозначим через L точку её пересечения с прямой BM (рис. 28). Пусть $BK = a$, тогда $BC = 3a$.

2) $\Delta AML \sim \Delta CMB$, поэтому $\frac{AL}{BC} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow AL = 2a$.

3) Теперь из подобия треугольников LAN и BKN найдем $\frac{AN}{NK} = 2$.

Ответ: $\frac{AN}{NK} = 2$.

Заметим, что предложенный метод решения задачи 5 далеко не единственный.

Задача 6. В треугольнике ABC проведена медиана BM и высота AH. Известно, что $BM = AH$. Найдите угол MBC [6].

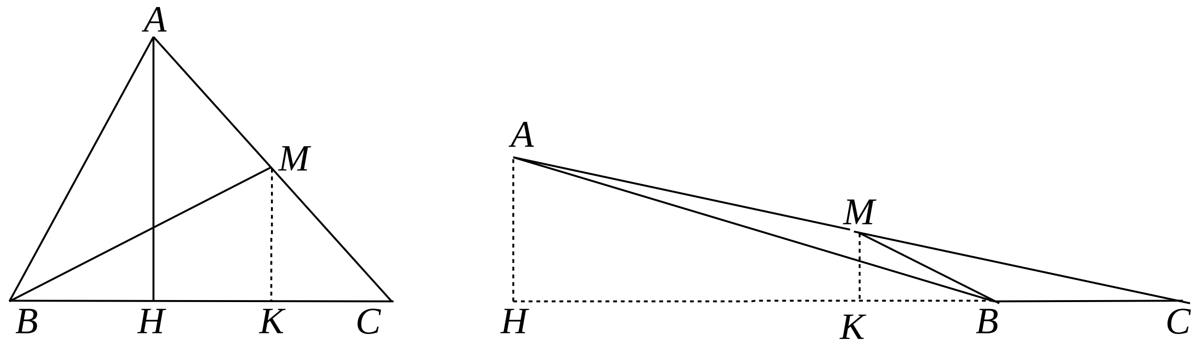


Рисунок 29

Дано: ΔABC, $AM = MC$, $AH \perp BC$, $BM = AH$.

Найти: $\angle MBC$.

Решение. 1) Проведем перпендикуляр MK на BC (рис. 29).

2) Поскольку $MK = \frac{1}{2}AH$, то из равенства $BM = AH$ следует, что $\sin\angle MBC = \frac{MK}{BM} = \frac{1}{2}$.

3) Таким образом, $\angle MBC$ может принимать два значения: 30° или 150°.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что сумма медиан в любом треугольнике меньше его периметра.

2. Две стороны треугольника равны 10 см и 15 см. Докажите, что биссектриса угла между ними меньше 12 см.

3. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на части длиной 9 см и 16 см. Из вершины большего острого угла треугольника проведена прямая, проходящая через середину высоты. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри данного треугольника.

4. Точки P и Q лежат на боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC так, что $AP = \frac{2}{3}AB$ и $CQ = \frac{1}{4}BC$. Определите, в каком отношении отрезок PQ делит высоту BB_1 данного треугольника.

5. Точка B_1 взята на стороне AC треугольника ABC так, что $AB_1 : AC = n$. Определите, в каком отношении медиана AA_1 делит отрезок BB_1.

6. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 1:4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BN треугольника ABC, считая от вершины B?

7. Даны две стороны a и b треугольника и биссектриса l угла между ними. Определите величину этого угла.

8. В параллелограмме $ABCD$ точка D_1 является серединой стороны AB. Известно, что биссектриса CC_1 угла C параллелограмма делит площадь треугольника ADD_1 пополам. Определите длину стороны AD, если $CD = 4$ см.

9. Биссектриса острого угла равнобокой трапеции делит боковую сторону на отрезки длиной 20 и 30 см, считая от меньшего основания, которое равно 6 см. Определите площадь трапеции.

10. В прямоугольном треугольнике медиана и биссектриса, проведенные из вершины прямого угла, образуют угол в 10°. Определите острые углы данного треугольника.

Список использованной литературы

1. Дурова, Е.М. Метод дополнительных построений при решении планиметрических задач / Е.М. Дурова, Э.Ф. Капленко; Воронеж. ун-т.– Воронеж, 1995.– 16 с.– Деп. в ВИНИТИ 18.09.95, № 2580–В95.
2. Шлыков, В.В. Геометрия. Планиметрия: Шк. учеб. пособие / В.В. Шлыков.– Мн.: ООО «Асар», 2003.– 288 с.
3. Антонов, Н.П. Сборник задач по элементарной математике / Н.П. Антонов, М.Я. Выгодский, В.В. Никитин, А.И. Санкин.– М.: Наука, 1973.– 478 с.
4. Ляпин, Н.П. Сборник задач по элементарной математике (с решениями). Пособие для подготовительных отделений и курсов / Н.П. Ляпин.– Казань: Издательства Казанского университета, 1975.– 696 с.
5. Барвенов, С.А. Готовимся к экзамену по математике в техникуме, колледже, училище / С.А. Барвенов.– Мн.: ТетраСистемс, 2006.– 272 с.
6. Шарыгин, И.Ф. Математика для школьников старших классов / И.Ф. Шварыгин.– М.: Дрофа, 1995.– 496 с.