Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь

Беларускі дзяржаўны педагагічны універсітэт
імя Максіма Танка

ІНТЭГРАЛЬНАЕ ЗЛІЧЭННЕ
ФУНКЦЫІ НЕКАЛЬКІХ ЗМЕННЫХ

Вучэбны дапаможнік

Мінск 2000

Прадмова

У аснову дадзенага вучэбнага дапаможніка пакладзены лекцыі па матэматычнаму аналізу, у прыватнасці па раздзелу гэтага курса "Інтэгральнае злічэнне функцыі некалькіх зменных", якія чыталіся на фізічным факультэце БДПУ імя М. Танка на працягу шэрагу гадоў.

Змест вучэбнага дапаможніка адпавядае праграме курса матэматычнага аналізу для спецыяльнасцяў "Фізіка і матэматыка", "Фізіка і інфарматыка". Дастаткова строгае і поўнае выкладанне тэарэтычнага матэрыялу суправаджаецца вялікай колькасцю ілюстрацыйных прыкладаў.

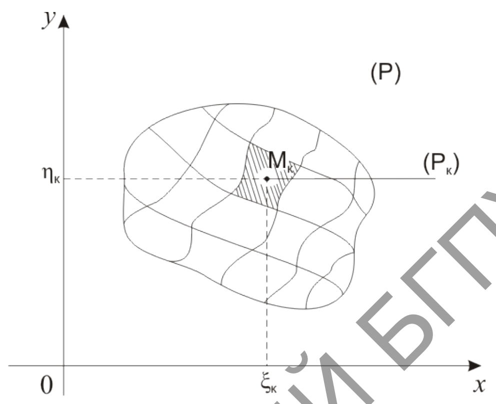
Сістэматычная праца з выкарыстаннем дадзенага вучэбнага дапаможніка забяспечыць студэнту неабходны мінімум ведаў па раздзелу "Інтэгральнае злічэнне функцыі некалькіх зменных" курса матэматычнага аналізу, будзе стымуляваць яго для далейшай, больш паглыбленай, працы над прадметам.

§ 1. Двайны інтэграл

1. Азначэнне двайнога інтэграла

Няхай у замкнутым квадратычным абсягу (P) зададзена функцыя $z = f(x, y)$. Абсяг (P) разаб'ём на n частковых квадравальных абсягаў (P_1), (P_2), …, (P_n), якія могуць мець агульнымі толькі гранічныя пункты (рыс. 1).

Сукупнасць усіх гэтых частковых абсягаў будзем называць разбіўкай T



Рыс. 1

абсягу (P). Плошчы частковых абсягаў абазначым адпаведна праз P_1, P_2, … P_n.

Азначэнне 1. Дыяметрам замкнутага абсягу (P_k) называецца верхняя мяжа адлегласцяў паміж разнастайнымі парамі пунктаў гэтага абсягу.

Найбольшы з дыяметраў частковых абсягаў абазначым праз λ.

У кожным замкнутым частковым абсягу (P_k) возьмем адвольны пункт $M_k(\xi_k, \eta_k)$ і памножым значэнне функцыі $f(x, y)$ у гэтым пункце на плошчу P_k.

Калі скласці ўсе такія здабыткі, атрымаем суму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) P_k. \quad (1)$$

Сума (1) называецца інтэгральнай сумай для функцыі $z = f(x, y)$ у абсягу (P).

Увядзём паняцце ліміту інтэгральнай сумы σ пры $\lambda \to 0$. Гэта можна зрабіць на мове $\varepsilon - \delta$ або на мове паслядоўнасцяў.

Азначэнне 2. Лік I называецца лімітам інтэгральнай сумы σ пры $\lambda \to 0$, калі для любога дадатнага ліку ε знойдзецца такі дадатны лік δ, што для разбіўкі T абсягу (P), якая падпарадкоўваецца толькі адзінай ўмове $\lambda < \delta$, і пры любым выбары пунктаў (ξ_k, η_k) выконваецца няроўнасць $|\sigma - I| < \varepsilon$.

Азначэнне 3. Калі для любой асноўнай паслядоўнасці разбівак абсягу (P) адпаведная паслядоўнасць значэнняў інтэгральнай сумы σ заўсёды імкнецца да аднаго і таго ж ліку I, незалежна ад выбару пунктаў (ξ_k, η_k), то гэты лік I называецца лімітам інтэгральнай сумы пры $\lambda \to 0$.

Калі лік I з'яўляецца лімітам інтэгральнай сумы σ пры $\lambda \to 0$, то пішуць

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I .$$

Азначэнне 4. Калі існуе ліміт I інтэгральнай сумы σ пры $\lambda \to 0$, то функцыя $z = f(x, y)$ называецца інтэгравальнай у абсягу (P), а гэты ліміт I называецца двайным інтэгралам ад функцыі $f(x, y)$ па абсягу (P) і абазначаецца

$$I = \iint_{(P)} f(x, y) dxdy .$$

Такім чынам, па азначэнні маем:

$$I = \iint_{(P)} f(x, y) dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sigma .$$

2. Існаванне двайнога інтэграла

Калі разважаць анлагічным чынам, як ў аднамерным выпадку, могжна даказаць,што інтэгравальнымі ў абсягу (P) могуць быць толькі абмежаваныя ў гэтым абсягу функцыі. Таму ў далейшым мы будзем меркаваць, што функцыя $z = f(x, y)$ абмежаваная ў абсягу (P).

Заўважым, што не кожная абмежаваная ў абсягу (P) функцыя будзе інтэгравальнай ў гэтым абсягу. Прыкладам такіх функцый з'яўляецца функцыя, вызначаная на квадраце $\{x, y\}$ $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$ наступным чынам:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{калі } x \text{ і } y - \text{ рацыянальныя лікі}, \\ 0, & \text{калі } x \text{ і } y - \text{ ірацыянальныя лікі}. \end{cases}$$

Доказ неінтэгравальнасці такой функцыі непасрэдна вынікае з азначэння двайногаінтэграла.

У сувязі з гэтым узнікае наступнае пытанне:

якія абмежаваныя ў абсягу (P) функцыі будуць інтэгравальнымі ў гэтым абсягу?

Абазначым праз m_k, M_k адпаведна ніжнюю і верхнюю межы значэнняў функцыі $z = f(x, y)$ у частковым абсягу (P_k).

Разгледзім сумы

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k P_k \ , \ S = \sum_{k=1}^{m} M_k P_k \ ,$$

якія будзем называць адпаведна ніжняй і верхняй інтэгральнымі сумамі Дарбу.

Сумы s і S валодаюць наступнымі ўласцівасцямі:

1. Любая інтэгральная сума σ функцыі $f(x, y)$, складзеная па дадзенай разбіўцы абсягу (P), заключана паміж ніжняй і верхняй сумамі Дарбу, складзенымі для той жа разбіўкі.
2. Пры пераходзе ад некаторай разбіўкі T абсягу (P) да новай разбіўкі T', атрыманай шляхам дадавання новых ліній, ніжняя сума Дарбу s не спадае, а верхняя S – не нарастае.
3. Кожная ніжняя сума Дарбу не перавышае кожную верхнюю суму Дарбу, якая адпавядае нават іншай разбіўцы.
4. Любая інтэгральная сума σ разбіўкі T, а таксама ніжняя і верхняя сумы Дарбу гэтай жа разбіўкі задавальняюць няроўнасці

$$|\sigma - I| \le S - s,$$

дзе $I = \sup\{s\}$.

Доказы гэтых уласцівасцяў аналагічныя доказам адпаведных уласцівасцяў інтэгральных сум для функцыі адной зменнай.

Аналагічна доказу адпаведнай тэарэмы для вызначанага інтэграла даказваецца наступная тэарэма.

Тэарэма 1. Калі функцыя $z = f(x, y)$ непарыўная ў замкнутым абсягу (P), то яна інтэгравальная ў гэтым абсягу.

Мае месца больш агульная тэарэма.

Тэарэма 2. Функцыя $z = f(x, y)$, абмежаваная ў замкнутым абсягу (P) і непарыўная ў ім ўсюды, акрамя пунктаў, якія ляжаць на канечным ліку крывых, якія з'яўляюцца графікамі непарыўных функцый выгляду $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$, інтэгравальная ў гэтым абсягу.

3. Уласцівасці двайнога інтэграла

1°. Калі функцыі $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ інтэгравальныя ў абсягу (P), то ў гэтым абсягу інтэгравальнымі будуць і функцыі $f(x, y) \pm \varphi(x, y)$, прычым мае месца роўнасць

$$\iint\limits_{(P)} [f(x, y) \pm \varphi(x, y)] dxdy = \iint\limits_{(P)} f(x, y) dxdy \pm \iint\limits_{(P)} \varphi(x, y) dxdy.$$

Дакажам уласцівасць для сумы дзвюх функцый.

Маем:

$$\iint\limits_{(P)} [f(x, y) \pm \varphi(x, y)] dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(\xi_k, \eta_k) + \varphi(\xi_k, \eta_k)] P_k =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) P_k + \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k, \eta_k) P_k = \iint\limits_{(P)} f(x, y) dxdy + \iint\limits_{(P)} \varphi(x, y) dxdy.$$

2°. Калі функцыя $f(x, y)$ інтэгравальная ў абсягу (P), то інтэгравальнай ў гэтым абсягу будзе і функцыя $Cf(x, y)$ $(C - const)$, прычым мае месца роўнасць

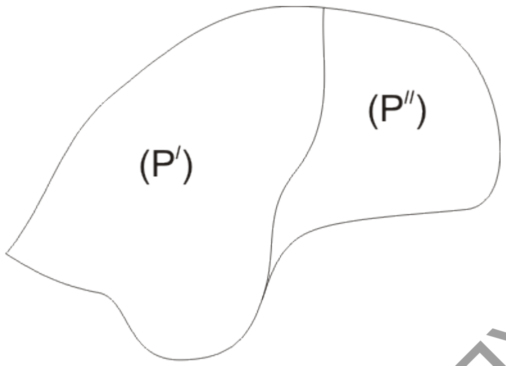
$$\iint\limits_{(P)} Cf(x, y) dxdy = C \iint\limits_{(P)} f(x, y) dxdy.$$

Доказ аналагічны доказу папярэдняй уласцівасці.

$3°$. Калі абсяг (P) з’яўляецца аб’яднаннем абсягаў (P'), (P'') (рыс. 2), якія не маюць агульных унутраных пунктаў, у кожным з якіх функцыя $f(x,y)$ інтэгравальная і

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(P')} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(P'')} f(x,y)dxdy.$$

Ажыццявім доказ уласцівасці.



Рыс. 2

Карыстаючыся тым, што ліміт інтэгральнай сумы не залежыць ад спосабу разбіўкі абсягу (P), будзем разбіваць гэты абсяг на n частак так, каб кожная частка (P_k) ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) змяшчалася цалкам ці ў (P'), ці ў (P'').

Інтэгральную суму можна тады запісаць так:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)P_k = \sum_{k=1}^{m-1} f(\xi_k,\eta_k)P_k + \sum_{k=m}^{n} f(\xi_k,\eta_k)P_k,$$

дзе $\sum\limits_{k=1}^{m-1} f(\xi_k,\eta_k)P_k$ змяшчае ўсе складнікі (і толькі іх), якія адпавядаюць часткам (P_k), якія належаць (P'), а $\sum\limits_{k=m}^{n} f(\xi_k,\eta_k)P_k$ – складнікі, якія адпавядаюць часткам (P_k), якія належаць (P'').

Калі перайсці да ліміту пры $\lambda \to 0$, мы і атрымаем роўнасць:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(P')} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(P'')} f(x,y)dxdy.$$

$4°$. Няхай функцыі $f(x,y)$ і $\varphi(x,y)$ інтэгравальныя ў абсягу (P) і ў гэтым абсягу мае месца няроўнасць

$$f(x,y) \le \varphi(x,y).$$

Тады

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy \le \iint\limits_{(P)} \varphi(x,y)dxdy.$$

Доказ уласцівасці прапануем ажыццявіць самастойна.

$5°$.
$$\iint\limits_{(P)} dxdy = P$$

Сапраўды, паколькі ў дадзеным выпадку $f(x,y)=1$ у абсягу (P), то для любой разбіўкі абсягу (P) на часткі (P_1), (P_2), …, (P_n), атрымаем:

$$\iint\limits_{(P)} dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P_k = \lim_{\lambda\to 0} P = P$$

Уласцівасць 5° дазваляе выкарыстоўваць двайны інтэграл для знаходжання плошчаў плоскіх фігур.

6°. (Тэарэма абсярэднім значэнні.) Калі функцыя $f(x,y)$ непарыўная ў замкнутым абсягу (P), то ў гэтым абсягу знойдзецца і такі пункт $M(\xi,\eta)$б што

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y) = dxdy = f(\xi,\eta)P .$$

Доказ. Няхай m і M – найменшае і найбольшае значэнні функцыі $f(x,y)$ у абсягу (P) (гэтыя значэнні існуюць, бо $f(x,y)$ – непарыўная ў дадзеным замкнутым абсягу).

Такім чынам, у абсягу D маем:

$$m \le f(x,y) \le M .$$

Згодна з уласцівасцямі 4° і 5° адсюль вынікае:

$$\iint\limits_{(P)} mdxdy \le \iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy \le \iint\limits_{(P)} Mdxdy$$

ці

$$m\iint\limits_{(P)} dxdy \le \iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy \le M\iint\limits_{(P)} dxdy ,$$

г. зн.

$$mP \le \iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy \le MP .$$

Адсюль

$$m \le \frac{\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy}{P} \le M .$$

Такім чынам, лік $\dfrac{\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy}{P}$ ляжыць паміж m і M. Але непарыўная ў замкнутым абсягу (P) функцыя $f(x,y)$ прымае ўсе значэнні, якія ляжаць паміж m і M. Таму ў абсягу існуе такі пункт (ξ,η), што

$$f(\xi,\eta) = \frac{\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy}{P} .$$

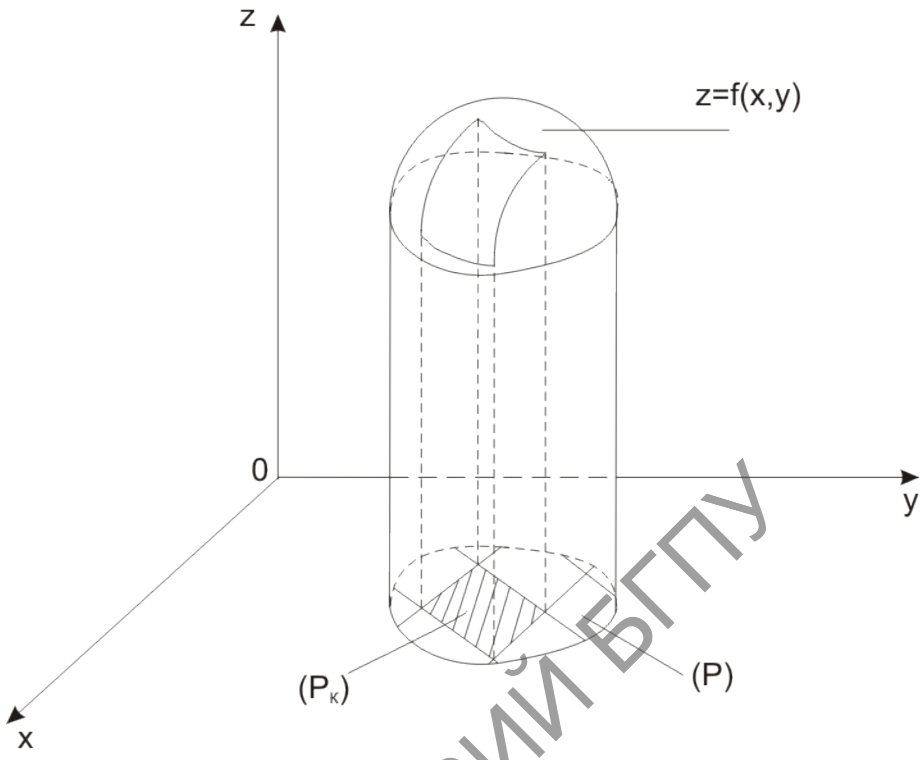
Адсюль

$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)P$, што і трэба было даказаць.

§ 2. Вылічэнне аб’ёму цыліндрычнага цела.

Няхай у замкнутым квадравальным абсягу (P) зададзена непарыўная неадмоўная функцыя $z = f(x,y)$.

Разгледзім цела (v), абмежаванае зверху графікам гэтай функцыі, знізу – абсягам (P), з боку – цыліндрычнай паверхняй, кіроўнай якой з’яўляецца граніца абсягу (P), а ўтваральныя паралельны восі Oz. Цела такога выгляду называецца цыліндрычным целам (рыс. 3).



Рыс. 3

Тэарэма 3. цыліндрычнае цела (v) з'яўляецца кубавальным і яго аб'ём v вылічваецца па формуле

$$v = \iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dxdy\,. \tag{2}$$

Доказ. Разгледзім адвольную разбіўку абсягу (P) на частковыя квадравальныя абсягі (P_1), (P_2), …, (P_n), якія могуць мець агульнымі толькі гранічныя пункты. Плошчы частковых абсягаў абазначым адпаведна праз P_1, P_2, …, P_n, найбольшым з дыяметраў частковых абсягаў праз λ.

Зафіксуем увагу на замкнутым частковым абсягу (P_k). Паколькі функцыя $z = f(x,y)$ непарыўная ў ім, то па другой тэарэме Вейерштраса яна мае ў ім найменшае і найбольшае значэнні.

Абазначым іх адпаведна праз m_k, M_k.

Разгледзім цяпер наступныя сумы:

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k P_k\,,\ S = \sum_{k=1}^{n} M_k P_k\,. \tag{3}$$

Сумы (3) валодаюць наступнымі ўласцівасцямі:

1) яны з'ўляюцца інтэгральнымі сумамі для функцыі $z = f(x,y)$ у абсягу (P);

2) $s=\sum_{k=1}^{n} m_k P_k$ – аб’ём цела, якое змяшчаецца ў цыліндрычным целе (v), бо $m_k P_k$ – гэта аб’ём прамога цыліндра з вышынёй m_k і плошчай асновы P_k, які змяшчаецца ў элементарным цыліндрычным целе, абмежаваным знізу абсягам (P_k), а зверху графікам функцыі $z=f(x,y)$.

3) $S=\sum_{k=1}^{n} M_k P_k$ – аб’ём цела, якое змяшчае ў сябе цыліндрычнае цела (v), бо $M_k P_k$ – гэта аб’ём прамога цыліндра з вышынёй M_k і плошчай асновы P_k, які змяшчае ў сабе элементарнае цыліндрычнае цела, абмежаванае знізу абсягам (P_k), а зверху графікам функцыі $z=f(x,y)$.

Разгледзім цяпер якую-небудзь асноўную паслядоўнасць разбівак абсягу (P) на частковыя абсягі і разгледзім адпаведныя ёй паслядоўнасці значэнняў сум s і S:

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots . \tag{4}$$

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots . \tag{5}$$

Дадзеная функцыя $z=f(x,y)$ непарыўная ў абсягу (P), значыць яна інтэгравальная ў гэтым абсягу. Таму паслядоўнасці (4), (5) імкнуцца да $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$.

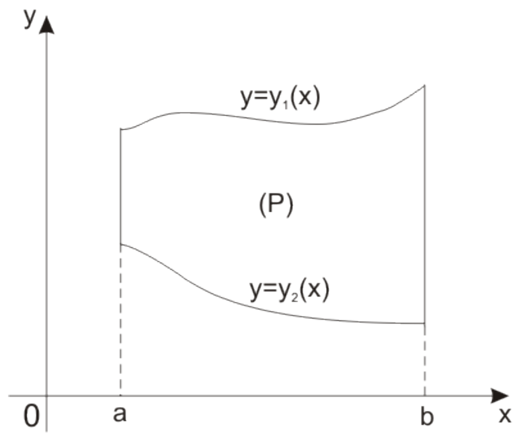
Такім чынам, мы пабудавалі дзве паслядоўнасці кубавальных цел, якія адпаведна змяшчаюцца ў целе (v) і змяшчаюць у сабе цела (v), аб’ёмы якіх маюць агульны ліміт роўны $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$. Як вядома, у гэтым выпадку цыліндрычнае цела (v) з’яўляецца кубавальным, і яго аб’ём v роўны $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$.

§ 3. Вылічэнне двайнога інтэграла паўторным інтэграваннем

Тэарэма 4. Няхай функцыя $z=f(x,y)$ непарыўная ш абсягу (P), які абмежаваны прамымі $x=a$, $x=b$ і графікамі функцый $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, што непарыўныя на адрэзку $[a;b]$ і задавальняюць на гэтым адрэзку няроўнасці $y_1(x)\le y_2(x)$ (рыс. 4).

Тады

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx . \tag{6}$$



Рыс. 4

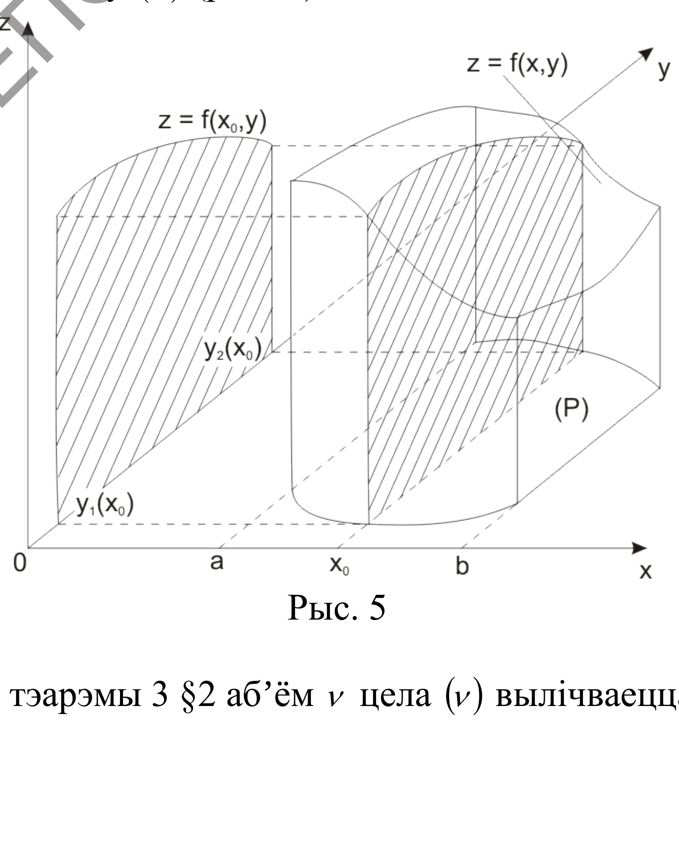
Заўвага 1. Пры вылічэнні інтэграла $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ x лічыцца фіксаваным (нязменным). Выраз у правай частцы роўнасці (6) называюць паўторным інтэгралам і абазначаюць таксама так:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Улічваючы гэта, формулу (6) можна запісаць ў выглядзе

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Доказ тэарэмы 4. Доказ тэарэмы будзем ажыццяўляць пры дадатковым меркаванні, што $f(x,y)\ge 0$ у абсягу (P). Разгледзім цыліндрычнае цела (v), абмежаванае зверху графікам дадзенай функцыі, знізу абсягам (P), і збоку цыліндрычнай паверхняй,утваральныя якой паралельныя восі Oz, а кіроўнай з'яўляецца граніца абсягу (P) (рыс. 5).



Рыс. 5

На падставе тэарэмы 3 §2 аб'ём v цела (v) вылічваецца па формуле

$$v = \iint_{(P)} f(x, y)dxdy\,. \qquad (7)$$

Вядома, што аб’ём v разглядаемага цыліндрычнага цела можна падлічыць і па формуле

$$v = \int_a^b S(x)dx\,, \qquad (8)$$

дзе $S(x)$ – плошча сечыва цела (v) плоскасцю, якая праходзіць праз пункт $x \in [a;b]$ перпендыкулярна восі Ox.

Знойдзем $S(x)$.

Няхай x_0 – адвольны пункт адрэзка $[a;b]$. Праз гэты пункт правожзім перпендыкулярна восі Ox плоскасць. Пры перасячэнні цела (v) гэтай плоскасцю атрымаем крывалінейную трапецыю, плошча якой роўная $S(x_0)$. Каб знайсці $S(x_0)$, спраектуем атрыманую крывалінейную трапецыю на плоскасць yOz. Атрымаем кангруэнтную трапецыю, абмежаваную графікам функцыі $z = f(x_0, y)$, $y_1(x_0) \le y \le y_2(x_0)$.

Плошча атрыманай крывалінейнай трапецыі роўная:

$$S(x_0) = \int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)} f(x_0, y)dy\,.$$

Калі адвольны пункт x_0 адрэзка $[a;b]$ абазначыць праз x, то атрымаем:

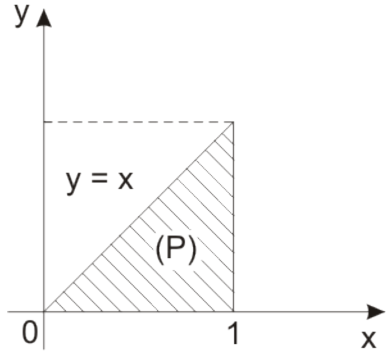
$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy\,.$$

Знойдзены выраз для $S(x)$ падставім у роўнасць (8):

$$v = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right] dx\,. \qquad (9)$$

Калі параўноўваць роўнасці (7), (9), то атрымаем формулу (6).

Прыклад 1. вылічыць двайны інтэграл $\iint_{(P)} e^{y/x}dxdy$, калі абсяг (P) абмежаваны лініямі $y = 0$, $y = x$, $x = 1$ (рыс. 6).



Рыс. 6

Рашэнне.

$$\iint_{(P)} e^{y/x}dxdy = \int_0^1 dx\int_0^x e^{y/x}dy = \int_0^1 xdx\int_0^x e^{y/x}d\left(\frac{y}{x}\right) = \int_0^1 xe^{y/x}\Big|_0^x dx =$$

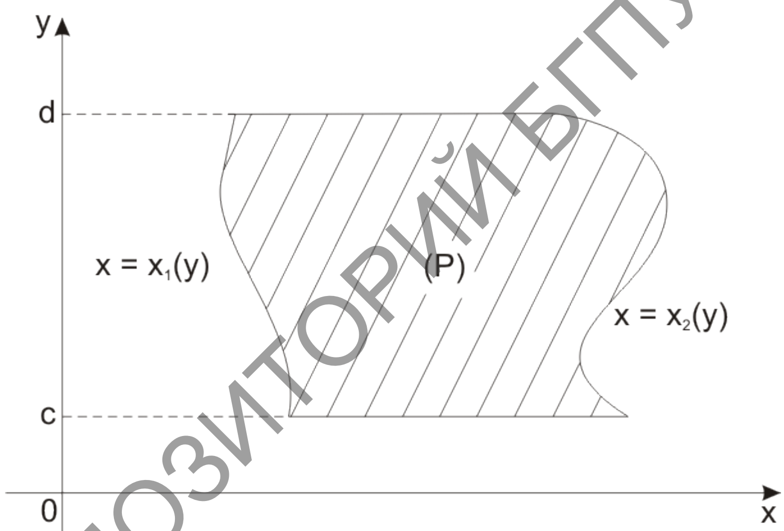
$$= \int_0^1 x(e-1)dx = (e-1)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

Калі ў папярэдніх разважаннях памяняць ролямі x і y, то атрымаем наступную тэарэму.

Тэарэма 5. Няхай функцыя $z = f(x,y)$ непарыўная на абсягу (P), які абмежаваны прамымі $y=c$, $y=d$ і графікамі функцый $x=x_1(y)$, $x=x_2(y)$, што непарыўныя на адрэзку $[c;d]$ і задавальняюць на гэтым адрэзку няроўнасці $x_1(y)\le x_2(y)$ (рыс. 7).

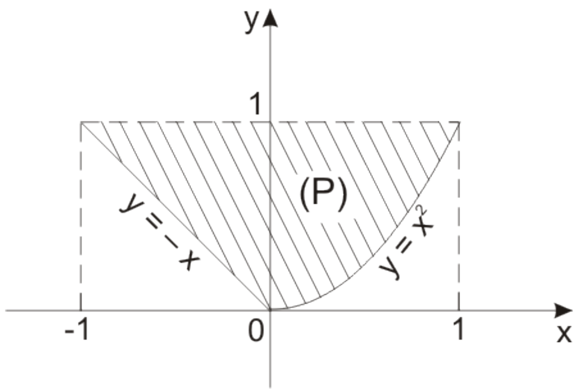
Тады

$$\iint_{(P)} f(x;y)dxdy = \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (10)$$



Рыс. 7

Прыклад 2. вылічыць двайны інтэграл $\iint_{(P)} xdxdy$, калі абсяг (P) абмежаваны лініямі $y=-x$, $y=1$, $y=x^2$ (рыс. 8).



Рыс. 8

Рашэнне. Умовы тэарэмы выконваюцца, таму, скарыстаўшы формулу (10), атрымаем:

$$\iint\limits_{(P)} xdxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{y}} xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(y - y^2\right)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Заўвага 2. У выпадку абсягу інтэгравання больш складанага выгляду неабходна разбіць яго на часткі, на якіх зможам вылічыць двайны інтэграл, а потым скарыстаць уласцівасць $3°$ двайнога інтэграла.

§ 4. Замена зменных у двайным інтэграле

Тэарэма 6. Разгледзім двайны інтэграл

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy,$$

дзе функцыя $z = f(x,y)$ непарыўная ў замкнутым квадравальным абсягу (P) плоскасці xOy.

Няхай функцыі

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v) \tag{11}$$

Непарыўныя разам са сваімі частковымі вытворнымі першага парадку ў некаторым замкнутым квадравальным абсягу (P') плоскасці uO_1v і ўзаемна адназначн адлюстроўваюць гэты абсяг на абсяг (P).

Тады мае месца наступная формула замены зменных у двайным інтэграле:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(P')} f(x(u,v), y(u,v))|I(u,v)|dudv, \tag{12}$$

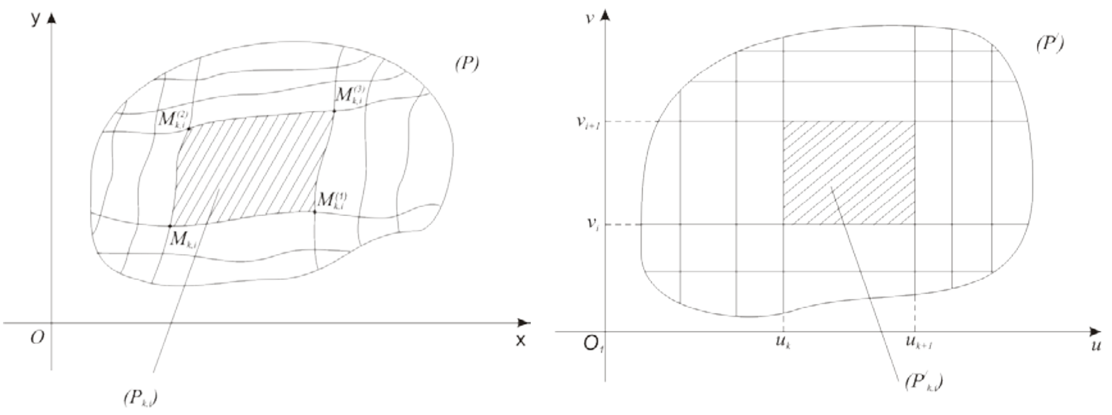
дзе

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Функцыйны дэтэрмінант (13) называюць дэтэрмінантам Якобі або якабіянам адлюстравання (11).

Доказ. Па-першае, заўважым, што абодваінтэгралы, якія стаяць у формуле (12), існуюць, бо падынтэгральныя функцыі непарыўныя ў адпаведных абсягах (гэта вынікае з умоў тэарэмы). Застаецца даказаць роўнасць разглядаемых інтэгралаў. Пяройдзем да доказу гэтага факту.

З гэтай мэтай разбіваем абсяг (P') на частковыя абсягі паралельнымі восямі O_1u і O_1v прамымі (рыс. 9).



Рыс. 9

Разгледзім якую-небудзь пару прамых $u = u_k$, $u = u_{k+1}$, а таксама другую пару суседніх прамых $v = v_i$, $v = v_{i+1}$. Гэтыя прамыя на плоскасці uO_1v вызначаюць некаторы частковы абсяг $(P'_{k,i})$, які з'яўляецца прамавугольнікам.

Разгледжанай сістэме прамых у абсягу (P) будуць адпавядаць дзве сукупнасці крывых, якія таксама разбіваюць абсяг (P) на частковыя абсягі. Абазначым праз $(P_{k,i})$ частковы абсяг, які адпавядае частковаму абсягу $(P'_{k,i})$.

Частковы абсяг $(P_{k,i})$ з'яўляецца крывалінейным чатырохвугольнікам, вяршыні якога і іх прамавугольныя дэкартавыя каардынаты абазначым наступным чынам:

$$M_{k,i}(x_{k,i}; y_{k,i}),\ M_{k,i}^{(1)}(x_{k,i}^{(1)}, y_{k,i}^{(1)})$$
$$M_{k,i}^{(2)}(x_{k,i}^{(2)}; y_{k,i}^{(2)}),\ M_{k,i}^{(3)}(x_{k,i}^{(3)}, y_{k,i}^{(3)}),$$

дзе

$$\left.\begin{aligned} x_{k,i} &= x(u_k, v_i), y_{k,i} = y(u_k, v_i), \\ x_{k,i}^{(1)} &= x(u_{k+1}, v_i), y_{k,i}^{(1)} = y(u_{k+1}, v_i), \\ x_{k,i}^{(2)} &= x(u_k, v_{i+1}), y_{k,i}^{(2)} = y(u_k, v_{i+1}), \\ x_{k,i}^{(3)} &= x(u_{k+1}, v_{i+1}), y_{k,i}^{(3)} = y(u_{k+1}, v_{i+1}). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Складзем цяпер наступную суму:

$$\sum_{k,i} f(M_{k,i}) P_{k,i}\,. \tag{15}$$

Вылічым набліжана $P_{k,i}$, г. зн. Вылічым набліжана плошчу крывалінейнага чатырохвугольніка $(P_{k,i})$.

Абазначым

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k\,,$$
$$\Delta v_i = v_{i+1} - v_i\,.$$

У формулах (14) заменім прырасты разглядаемых функцый іх дыферэнцыяламі. Атрымаем

$$\left.\begin{aligned}
&x_{k,i} = x(u_k, v_i),\ y_{k,i} = y(u_k, v_i),\\
&x_{k,i}^{(1)} \approx x(u_k, v_i) + x'_u(u_k, v_i)\Delta u_k,\\
&y_{k,i}^{(1)} \approx y(u_k, v_i) + y'_u(u_k, v_i)\Delta u_k,\\
&x_{k,i}^{(2)} \approx x(u_k, v_i) + x'_v(u_k, v_i)\Delta v_i,\\
&y_{k,i}^{(2)} \approx y(u_k, v_i) + y'_v(u_k, v_i)\Delta v_i,\\
&x_{k,i}^{(3)} \approx x(u_k, v_i) + x'_u(u_k, v_i)\Delta u_k + x'_v(u_k, v_i)\Delta v_i,\\
&y_{k,i}^{(3)} \approx x(u_k, v_i) + y'_u(u_k, v_i)\Delta u_k + y'_v(u_k, v_i)\Delta v_i.
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Заменім крывалінейны чатырохвугольнік $(P_{k,i})$ прамалінейным чатырохвугольнікам $M_{k,i}M_{k,i}^{(1)}M_{k,i}^{(3)}M_{k,i}^{(2)}$, каардынаты вяршынь якога знаходзяцца па формулах (16). Лёгка пераканацца ў тым, што гэты прамалінейны чатырохвугольнік $M_{k,i}M_{k,i}^{(1)}M_{k,i}^{(3)}M_{k,i}^{(2)}$ з'яўляецца паралелаграмам,

$$M_{k,i}M_{k,i}^{(1)} = M_{k,i}^{(2)}M_{k,i}^{(3)},$$
$$M_{k,i}M_{k,i}^{(2)} = M_{k.i}^{(1)}M_{k,i}^{(3)}.$$

Плошча паралелаграма $M_{k,i}M_{k,i}^{(1)}M_{k,i}^{(3)}M_{k,i}^{(2)}$ роўная модулю дэтэрміната

$$\begin{vmatrix} x_{k,i}^{(1)} - x_{k,i} & x_{k,i}^{(2)} - x_{k,i} \\ y_{k,i}^{(1)} - y_{k,i} & y_{k,i}^{(2)} - y_{k,i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u(u_k, v_i) & x'_v(u_k, v_i) \\ y'_u(u_k, v_i) & y'_v(u_k, v_i) \end{vmatrix} \Delta u_k \Delta v_i = I(u_k, v_i)\Delta u_k \Delta v_i .$$

Такім чынам, плошча паралелаграма $M_{k,i}M_{k,i}^{(1)}M_{k,i}^{(3)}M_{k,i}^{(2)}$ роўная $|I(u_k, v_i)|\Delta u_k \Delta v_i = |I(u_k, v_i)|P'_{k,i}$, дзе $P'_{k,i} = \Delta u_k \Delta v_i$ – плошча прамавугольніка $(P'_{k,i})$.

Улічваючы усё адзначанае вышэй, атрымліваем, што плошча крывалінейнага чатырохвугольніка $(P_{k,i})$ набліжана роўная плошчы паралелаграма $M_{k,i}M_{k,i}^{(1)}M_{k,i}^{(3)}M_{k,i}^{(2)}$:

$$P_{k,i} = |I(u_k, v_i)|P'_{k,i} . \qquad (17)$$

Калі скарыстаць цяпер набліжаную роўнасць (17), то суму (15) можна запісаць так:

$$\sum_{k,i} f(M_{k,i})P_{k,i} \approx \sum_{k,i} f\left(x(u_k, v_i), y(u_k, v_i)\right)|I(u_k, v_i)|P'_{k,i} . \qquad (18)$$

У левай частцы роўнасці (18) мы маем інтэгральную суму для інтэграла

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)dxdy , \qquad (19)$$

а ў правай частцы інтэгральную суму для двайнога інтэграла

$$\iint\limits_{(P')} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)|I(u,v)|dudv . \qquad (20)$$

Як было адзначана вышэй, двайныя інтэгралы (19) і (20) існуюць. Таму пры імкненні да нуля найбольшага з дыяметраў частковых абсягаў $(P'_{k,i})$ (у гэтым выпадку імкнецца да нуля і найбольшы з дыяметраў частковых абсягаў $(P_{k,i})$) сума ў левай частцы роўнасці (18) імкнецца да двайнога інтэграла (19), а сума ў правай частцы роўнасці (18) імкнецца да двайнога інтэграла (20).

Прычым, пры такім лімітавым пераходзе набліжаная роўнасць (18) пераходзіць у дакладную роўнасць (12).

§ 5. Двайны інтэграл у палярных каардынатах

Выпадкам, які найбольш часта сустракаецца пры замене зменных у двайнам інтэграле, з’яўляецца пераход ад прамавугольных дэкартавых каардынат x, y да палярных каардынат ρ, φ. Гэты пераход ажыццяўляецца па формулах

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi.$$

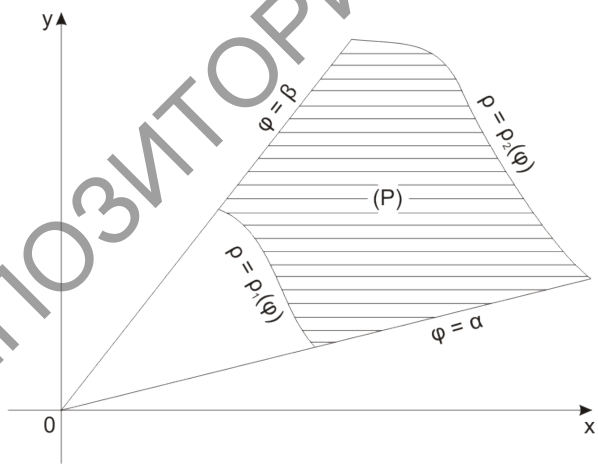
Вылічым

$$I(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Калі скарыстаць цяпер формулу (12) папярэдняга параграфа, атрымаем:

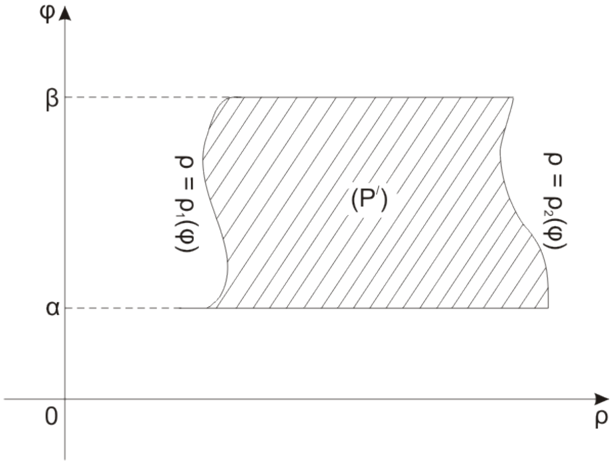
$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(P)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi. \tag{21}$$

Няхай абсяг (P) у палярнай сістэме каардынат (палярная вось якойсупадае з воссю Ox, а полюс з пунктам O) абмежаваны праменямі $\varphi = a$, $\varphi = b$ ($\alpha < \beta$) і графікамі функцый $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, якія непарыўныя на адрэзку $[\alpha,\beta]$ і задавальняюць на гэтым адрэзку няроўнасці: $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$ (рыс. 10).



Рыс. 10

Абсягу (P) у прамавугольнай дэкартавай сістэме каардынат $\rho O\varphi$ будзе адпавядаць абсяг (P') наступнага выгляду (рыс. 11):

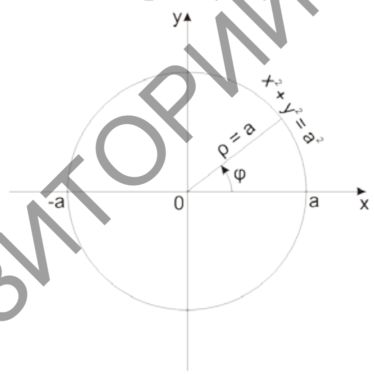


Рыс. 11

Як было паказана ў § 4, двайны інтэграл

$$\iint\limits_{(P')} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho \,. \qquad (22)$$

Прыклад. Вылічыць $\iint\limits_{(P)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, дзе абсягам інтэгравання з'яўляецца круг з радыусам a і цэнтрам у пункце $(0;0)$ (рыс. 12).



Рыс. 12

Рашэнне. З мэтай спрашчэння вылічэнняў пяройдзем да палярных каардынатаў. За полюс прымем цэнтр круга (пачатак сістэмы каардынатаў).

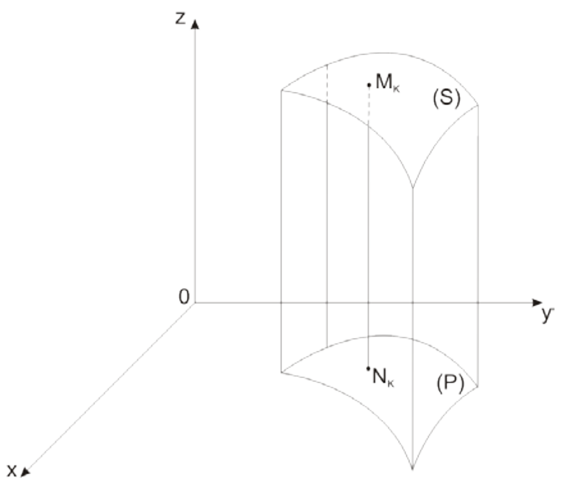
$$\iint\limits_{(P)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 dxdy} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} \sqrt{a^2 - \rho^2}\,\rho d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}\left(a^2 - \rho^2\right)^{3/2} \Big|_0^a \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{3} a^3 d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3 \,.$$

§ 6. Вылічэнне плошчы паверхні

Пры дапамозе двайных інтэгралаў можна вылічыць плошчы не толькі плоскіх фігур, але і крывых паверхняў.

Няхай (S) – кавалак паверхні $z = f(x, y)$, а замкнуты квадравальны абсяг (P) – яго праекцыя на каардынатную плоскасць xOy (рыс. 13).



Рыс. 13

Будзем меркаваць, што ў абсягу (P) функцыя $z = f(x,y)$ непарыўная разам са сваімі частковымі вытворнымі першага парадку.

Для знаходжання плошчы S паверхні (S) разаб'ём абсяг (P) на n частковых абсягаў (P_1), (P_2), …, (P_n), якія не маюць агульных унутраных пунктаў, плошчы якіх абазначым праз P_1, P_2, …, P_n. Найбольшы з дыяметраў гэтых частковых абсягаў абазначым праз λ.

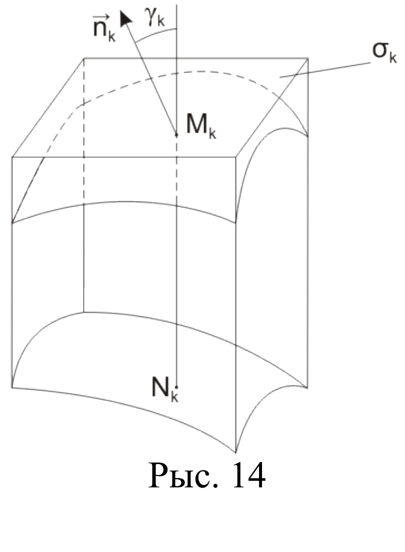
У кожным з атрыманых частковых абсягаў (P_k) возьмем адвольны пункт $N_k(\xi_k,\eta_k)$. Гэтаму пункту на паверхні (S) будзе адпавядаць пункт $M_k(\xi_k,\eta_k,\tau_k)$, дзе $\tau_k = f(\xi_k,\eta_k)$. Пабудуем у пункце M_k датычную плоскасць да дадзенай паверхні (S). Раўнанне гэтай датычнай плоскасці мае выгляд:

$$z - f(\xi_k,\eta_k) = f'_x(\xi_k,\eta_k)(x-\xi_k) + f'_y(\xi_k,\eta_k)(y-\eta_k),$$

г. зн.

$$f'_x(\xi_k,\eta_k)(x-\xi_k) + f'_y(\xi_k,\eta_k)(y-\eta_k) - (z - f(\xi_k,\eta_k)) = 0. \qquad (23)$$

Праз кожны пункт граніцы частковага абсягу (P_k) правядзём прамыя, перпендыкулярныя плоскасці xOy. Атрымаем некаторую цыліндрычную паверхню, якая на датычнай плоскасці (23) вырэзвае некаторую фігуру (σ_k) (рыс. 14).



Рыс. 14

Здзейснім такія пабудовы для ўсіх k. Такім чынам, паверхня (S) пакрыецца плоскімі пласцінкамі (σ_k), сума плошчаў якіх дае набліжанае значэнне плошчы S паверхні (S), г. зн.

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \sigma_k ,$$

дзе σ_k – плошча пласцінкі (σ_k).

Вядома, што плошча праекцыі плоскай фігуры на некаторую плоскасць роўная здабытку плошчы праектуемай фігуры на косінус вострага вугла паміж плоскасцю праекцыі і плоскасцю, у якой ляжыць праектуемая фігура.

Паколькі фігура (P_k) з’яўляецца праекцыяй на плоскасць xOy фігуры (σ_k), то маем:

$$P_k = \sigma_k \cos\gamma_k ,$$

дзе γ_k – востры вугал паміж плоскасцю xOy і датычнай плоскасцю (23).

Адсюль

$$\sigma_k = \frac{P_k}{\cos\gamma_k} .$$

Знойдзем $\cos\gamma_k$. Заўважым, што вектар $\vec{n} = \{0,0,1\}$ – нармальным вектар плоскасці xOy, а вектар $\vec{m} = \{f_x'(\xi_k,\eta_k), f_y'(\xi_k,\eta_k), -1\}$ – нармальны вектар датычнай плоскасці (23).

Цяпер знаходзім

$$\cos(\vec{n},^\wedge \vec{m}) = \frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|} = \frac{0\cdot f_x'(\xi_k,\eta_k) + 0\cdot f_y'(\xi_k,\eta_k) + 1\cdot(-1)}{1\cdot\sqrt{f_x'^2(\xi_k,\eta_k) + f_y'^2(\xi_k,\eta_k) + 1}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(\xi_k,\eta_k) + f_y'^2(\xi_k,\eta_k)}} .$$

Адсюль атрымліваем, што

$$\cos\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(\xi_k,\eta_k) + f_y'^2(\xi_k,\eta_k)}} .$$

Такім чынам,

$$\sigma_k = \frac{P_k}{\cos\gamma_k} = \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_k,\eta_k) + f_y'^2(\xi_k,\eta_k)} .$$

Такім чынам,

$$\sigma_k = \frac{P_k}{\cos\gamma_k} = \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_k,\eta_k) + f_y'^2(\xi_k,\eta_k)} P_k ,$$

і таму

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_k,\eta_k) + f_y'^2(\xi_k,\eta_k) P_k} . \quad (24)$$

Па азначэнні плошчай S паверхні (S) называецца ліміт апошняй сумы, калі найбольшы з дыяметраў частковых абсягаў (P_k) імкнецца да нуля.

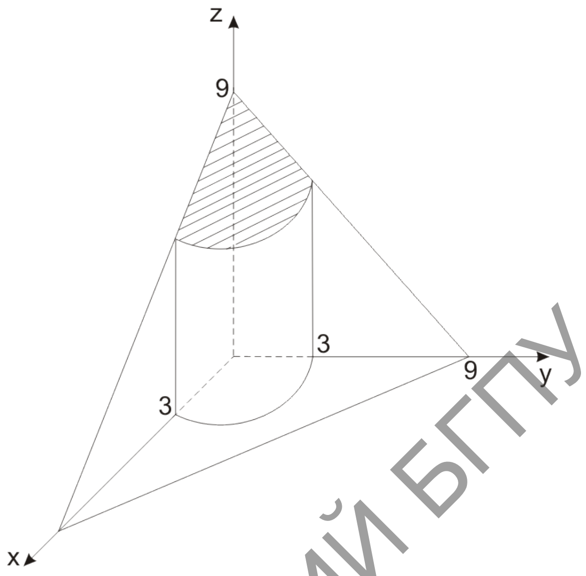
Сума (24) з’яўляецца інтэгральнай сумай для непарыўнай у замкнутым квадравальным абсягу (P) функцыі

$$\sqrt{1+f_x'^2(\xi_k,\eta_k)+f_y'^2(\xi_k,\eta_k)},$$

таму ліміт сумы (24) пры $\lambda \to 0$ існуе і роўны:

$$S=\iint\limits_{(P)}\sqrt{1+f_x'^2(\xi_k,\eta_k)+f_y'^2(\xi_k,\eta_k)}dxdy.$$

Прыклад. Вылічыць плошчу часткі плоскасці $x+y+z=9$, абмежаванай каардынатнымі плоскасцямі і цыліндрам $x^2+y^2=9$ (рыс. 15).



Рыс. 15

Рашэнне. З раўнання плоскасці $z=9-x-y$ знаходзім вытворныя: $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-1$. Абсягам інтэгравання (P) з'яўляецца чвэрць круга $x^2+y^2\le 9$, абмежаваная дадатнымі паўвосямі каардынат.

Маем

$$S=\iint\limits_{(P)}\sqrt{3}dxdy=\sqrt{3}\iint\limits_{(P)}dxdy=\frac{\sqrt{3}\pi 9}{4}=\frac{9\sqrt{3}\pi}{4} \text{ (кв. адз.).}$$

§ 7. Трайны інтэграл

1. Азначэнне трайнога інтэграла

Няхай у замкнутым кубавальным абсягу (V) прасторы зададзена функцыя $f(x,y,z)$.

Выканаем наступныя аперацыі:

1. Абсяг (V) разаб'ём на n частковых кубавальных абсягаў (V_1), (V_2), …, (V_n), якія могуць мець агульнымі толькі гранічныя пункты. Сукупнасць атрыманых частковых абсягаў будзем называць разбіўкай T абсягу (V). Аб'ёмы разглядаемых частковых абсягаў абазначым адпаведна праз V_1, V_2, …, V_n, а найбольшы з дыяметраў частковых абсягаў абазначым праз λ.

2. У кожным частковым абсягу (V_k) $(k=1,...,n)$ возьмем адвольны пункт M_k (ξ_k,η_k,τ_k) і вылічым $f(M_k)=f(\xi_k,\eta_k,\tau_k)$ – адпаведнае значэнне функцыі.
3. Кожнае значэнне $f(M_k)=f(\xi_k,\eta_k,\tau_k)$ памножым на аб’ём адпаведнага частковага абсягу, г. зн. складём здабыткі выгляду
$$f(\xi_k,\eta_k,\tau_k)V_k \quad (k=1,...,n).$$
4. Складзём наступную суму:
$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\tau_k)V_k\,,$$
якая называецца інтэгральнай сумай для функцыі $f=(x,y,z)$ у абсягу (V).

Можна ўвесці паняцце ліміту інтэгральнай сумы σ пры $\lambda\to 0$. Гэта можна зрабіць ці на мове $\varepsilon-\delta$, ці на мове паслядоўнасцей (гл. § 1).

Азначэнне. Калі існуе ліміт інтэгральнай сумы σ пры $\lambda\to 0$, то функцыя $f(x,y,z)$ называецца інтэгравальнай у абсягу (V), а гэты ліміт I называецца трайным інтэгралам ад функцыі $f(x,y,z)$ па абсягу (V) і абазначаецца
$$I=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz\,.$$

Такім чынам,
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\lim_{\lambda\to 0}\sigma\,.$$

У далейшым, паколькі вынікі, атрыманыя для двайных інтэгралаў, разам з іх доказамі могуць быць перанесены на трайныя інтэгралы, будзем абмяжоўвацца толькі фармулёўкамі сцвярджэнняў і кароткімі тлумачэннямі.

2. Існаванне трайнога інтэграла

Інтэгравальнымі ў абсягу (V) могуць быць толькі абмежаваныя ў гэтым абсягу функцыі. Аднак не ўсякая абмежаваная ў гэтым абсягу (V) функцыя будзе інтэгравальнай. Мае месца наступная тэарэма.

Тэарэма 7. Калі функцыя $f(x,y,z)$ непарыўная ў замкнутым кубавальным абсягу (V), то яна інтэгравальная ў гэтым абсягу.

3. Уласцівасці трайнога інтэграла

1°. Калі функцыя $f(x,y,z)$ інтэгравальная ў абсягу (V), то інтэгравальнай ў гэтым абсягу будзе і функцыя $Cf(x,y,z)$ (C – const), прычым
$$\iiint\limits_{(V)} Cf(x,y,z)dxdydz=C\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz\,.$$

2°. Калі функцыі $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$ інтэгравальныя ў абсягу (V), то інтэгравальнымі ў гэтым абсягу будуць і функцыі $f(x,y,z)\pm\varphi(x,y,z)$, прычым
$$\iiint\limits_{(V)} (f(x,y,z)\pm\varphi(x,y,z))dxdudz=\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz\pm\iiint\limits_{(V)}\varphi(x,y,z)dxdydz\,.$$

$3°$. Няхай функцыі $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$ інтэгравальныя ў абсягу (V) і ў гэтым абсягу

$$f(x,y,z) \le \varphi(x,y,z),$$

тады

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz \le \iiint\limits_{(V)} \varphi(x,y,z)dxdydz .$$

$4°$. Няхай (V_1), (V_2) – два абсягі, якія не маюць агульных унутраных пунктаў, а (V) – іх аб'яднанне. Калі функцыя $f(x,y,z)$ інтэгравальная ў абсягах (V_1), (V_2), то яна інтэгравальная ў абсягу (V), прычым

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{(V_2)} f(x,y,z)dxdydz .$$

$5°$. Тэарэма 8 (тэарэма аб сярэднім). Калі $f(x,y,z)$ – непарыўная функцыя, зададзеная ў замкнутым абсягу (V), то ўнутры гэтага абсягу існуе прынамсі адзін пункт (ξ,η,τ), для якога

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = f(\xi,\eta,\tau)V ,$$

дзе V – аб'ём абсягу (V).

4. Вылічэнне аб'ёму цела пры дапамозе трайнога інтэграла

Няхай (V) – замкнуты кубавальны абсяг. Разгледзім у гэтым абсягу функцыю $f(x,y,z)=1$.

Для гэтай функцыі будзем мець:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\tau_k)V_k =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} V_k = \lim_{\lambda\to 0} V = V .$$

Мы атрымалі наступную формулу для вылічэння аб'ёму цела:

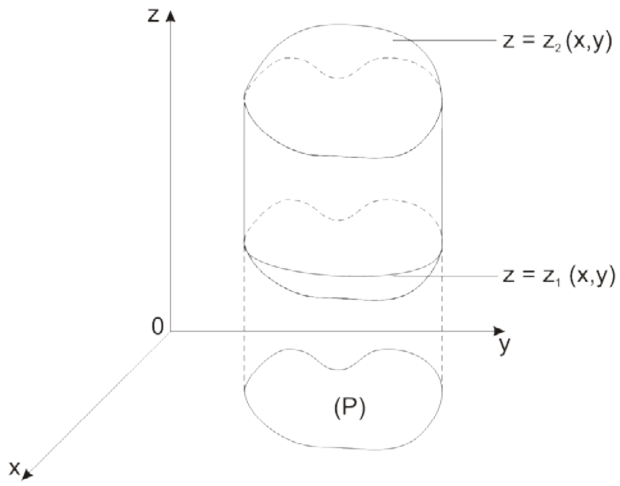
$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz . \tag{25}$$

5. Вылічэнне трайных інтэгралаў

Няхай на плоскасці xOy зададзены замкнуты квадравальны абсяг (P). Няхай у гэтым абсягу зададзены дзве функцыі $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$, якія непарыўныя ў абсягу (P) і задавальняюць у гэтым абсягу няроўнасці

$$z_1(x,y) \le z_2(x,y).$$

Разгледзім цела (V), абмежаванае зверху і знізу графікамі дадзеных функцый, а збоку цыліндрычнай паверхняй, утваральная якой паралельная восі Oz, а кіроўнай з'яўляецца граніца абсягу (P) (рыс. 16).



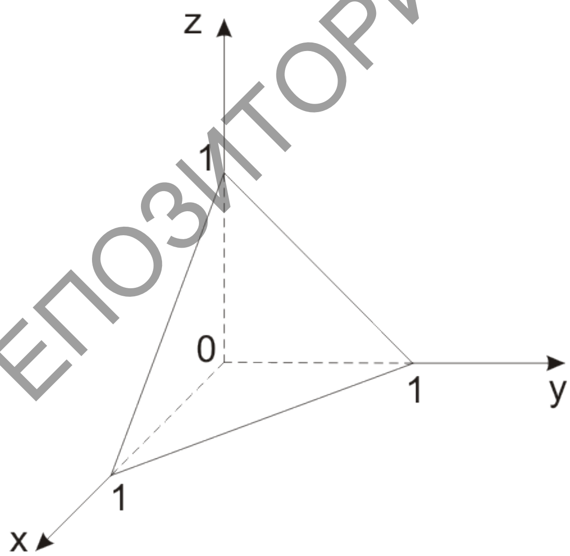
Рыс. 16

Можна даказаць наступную тэарэму.

Тэарэма 2. Калі функцыя $f(x,y,z)$ непарыўная ў разглядаемым prасторывым абсягу (V), то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(P)} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,. \tag{26}$$

Прыклад 1. Знайсці аб’ём V піраміды, абмежаванай плоскасцямі $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z+1=0$ (рыс. 17).



Рыс. 17

Рашэнне. Абсяг (V) праектуецца на плоскасць xOy у трохвугольнік (P), абмежаваны прамымі $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. Скарыстаўшы формулы (25) і (26), атрымаем:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \iint\limits_{(P)} dxdy \int\limits_{0}^{1-x-y} dz = \iint\limits_{(P)} (1-x-y)dxdy =$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2dx=\frac{1}{6}\ \text{(куб. адз.)}.$$

6. Замена зменных у трайным інтэграле

Разгледзім трайны інтэграл

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz,$$

дзе $f(x,y,z)$ – непарыўная ў замкнутым кубавальным абсягу (V) функцыя.

Няхай функцыі

$$x=x(u,v,w),$$
$$y=y(u,v,w),$$
$$z=z(u,v,w)$$

непарыўныя разам са сваімі частковымі вытворнымі ў замкнутым кубавальным абсягу (V') і ўзаемнаадназначна адлюстроўваюць гэты абсяг на абсяг (V). Тады мае месца наступная формула замены зменных у трайным інтэграле:

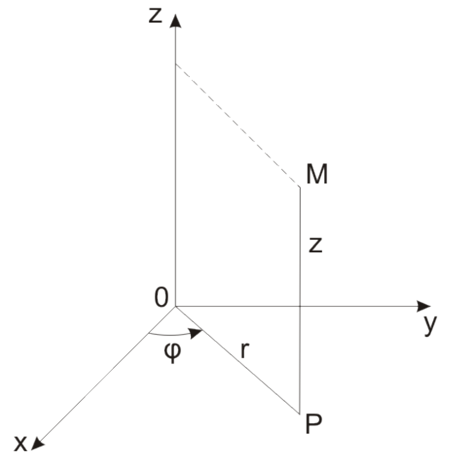
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{(V')} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|I(u,v,w)|dudvdw, \quad (27)$$

дзе

$$I(u,v,w)=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$$

На практыцы пры вылічэнні трайных інтэгралаў часта карыстаюцца заменай прамавугольных каардынат так званымі цыліндрычнымі і сферычнымі каардынатамі.

Няхай у прамавугольнай сістэме кардынат дадзены пункт M і P – яго праекцыя на плоскасць xOy (рыс. 18).



Рыс. 18

Цыліндрычнымі каардынатамі пункта $M(x,y,z)$ называюцца лікі r, φ і z, дзе $r=OP$, φ – лікавае значэнне велічыні вугла xOP, а z – апліката пункта M.

Відавочна, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

Пераход ад прамавугольных каардынат да цыліндрычных ажыццяўляецца па наступных формулах:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z.$$

Вылічым якабіян

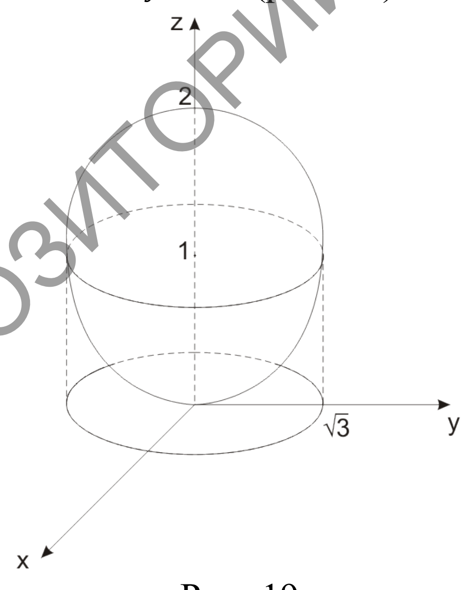
$$I(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Скарыстаўшы цяпер формулу (27), атрымаем:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V')} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dr d\varphi dz. \qquad (28)$$

Прыклад 2. Вылічыць $\iiint\limits_{(V)} z\,dxdydz$, дзе абсяг (V) абмежаваны сферай $x^2+y^2+z^2=4$ і парабалоідам $x^2+y^2=3z$ (рыс. 19).



Рыс. 19

Рашэнне. Калі выключыць з дадзеных раўнанняў x і y, атрымаем раўнанне рлоскасці $z=1$, якая сумесна з парабалоідам (або сферай) дае лінію перасячэння зададзеных ва ўмове задачы паверхняў. Калі пазбавіцца ў раўнаннях $z=1$ і $x^2+y^2=3z$ ад зменнай z, атрымаем $x^2+y^2=3$ – раўнанне цыліндра, які праектуе гэтую лінію на плоскасць xOy.

Дадзены абсяг (V) праектуецца на гэтую плоскасць у выглядзе круга з радыусам $\sqrt{3}$ і цэнтрам у пачатку каардынат.

Раўнанні парабалоіда і сферы ў цыліндрычных каардынатах запішуцца так:

$$r^2 = 3z \text{ і } r^2 + z^2 = 4.$$

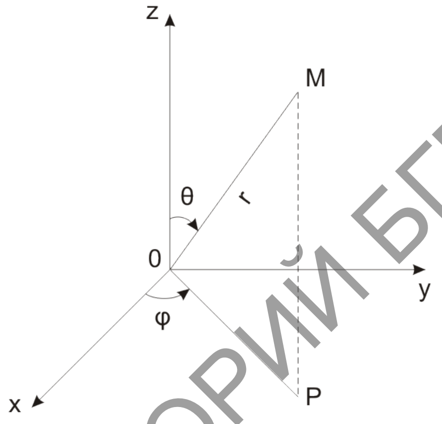
Скарыстаўшы формулу (28), маем:

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} rdr \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r\left(4 - r^2 - \frac{r^4}{9}\right)dr = \frac{13}{4}\pi,$$

г. зн.

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dxdydz = \frac{13}{4}\pi.$$

Сферычнымі каардынатамі пункта $M(x, y, z)$ называюцца лікі r, φ, θ, дзе r – адлегласць ад пачатку каардынат да пункта M, φ – лікавае значэнне велічыні вугла xOP, а θ – лікавае значэнне вугла паміж дадатным напрамкам восі Oz і адрэзкам OM (рыс. 20).



Рыс. 20

Відавочна, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

Формулы перахода ад прамавугольных дэкартавых каардынат да сферычных маюць выгляд:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\theta,$$

модуль якабіяна пераўтварэння

$$I(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_r & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_r & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix}$$

роўны $r^2\sin\theta$.

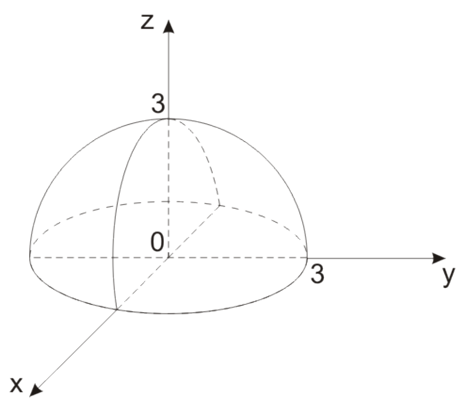
Скарыстаўшы цяпер формулу (27), атрымаем:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V')} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta. \quad (29)$$

Прыклад 3. Вылічыць трайны інтэграл

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdxydz,$$

калі абсяг (V) абмежаваны паўсферай $x^2+y^2+z^2=9$, $z \ge 0$ (рыс. 21).



Рыс. 21

Рашэнне. Пераўтворым да сферычных каардынат падынтэгральную функцыю і раўнанне сферы. Паколькі $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, атрымаем:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + r^2\cos^2\theta = r^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = r^2,$$

адкуль

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r,$$

а раўнанне дадзенай сферы мае выгляд $r = 3$.

З выгляду абсягу (V) вынікае, што каардынаты r, φ і θ мяняюцца ў наступных межах: r – ад 0 да 3, φ – ад 0 да 2π, θ – ад 0 да $\frac{\pi}{2}$.

Па формуле (29) атрымаем:

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^3 r^3 dr = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{3^4}{4} = 40{,}5\pi.$$

§ 8. Статычныя моманты, маса, цэнтр цяжару і моманты інерцыі матэрыяльнай пласцінкі

Няхай на плоскасці xOy дадзены n матэрыяльных пунктаў:

$$A_1(x_1, y_1),\ A_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ A_n(x_n, y_n),$$

масы якіх адпаведна роўныя

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n.$$

З механікі вядома, што статычныя моманты сістэмы гэтых пунктаў адносна восей Ox і Oy і яе маса вызначаюцца адпаведна формуламі:

$$M_X = \sum_{k=1}^{n} y_k m_k,\ M_Y = \sum_{k=1}^{n} x_k m_k,\ m = \sum_{k=1}^{n} m_k. \qquad (30)$$

Вядома таксама, што моманты інерцыі дадзенай сістэмы n матэрыяльных пунктаў адносна восей Ox, Oy, а таксама адносна пачатку каардынатаў вызначаюцца адпаведна так:

$$I_X = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 m_k,\ I_Y = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 m_k,\ I_0 = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 + y_k^2\right) m_k.$$

Пры гэтым каардынаты цэнтра цяжару дадзенай сістэмы n матэрыяльных пунктаў вызначаюцца формуламі:

$$\overline{x} = \frac{M_Y}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad \overline{y} = \frac{M_X}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}. \tag{31}$$

На плоскасці xOy разгледзім матэрыяльную пласцінку, г. зн. Некаторы замкнуты квадравальны абсяг (P), уздоўж якога распаўсюджана маса.

Спачатку ўвядзём паняцце паверхневай шчыльнасці матэрыяльнай пласцінкі. У абсягу (P) возьмем адвольны пункт $M(x, y)$ а разгледзім квадравальны абсяг (D), які змяшчае пункт M і сам змяшчаецца ў абсягу (P).

Паверхневая шчыльнасць матэрыяльнай пласцінкі ў пункце $M(x, y)$ (будзем абазначаць $\rho(M)$ або $\rho(x, y)$) вызначаецца наступным чынам:

$$\rho(M) = \lim_{\lambda_D \to 0} \frac{m(D)}{D},$$

дзе D – плошча абсягу (D), $m(D)$ – маса абсягу (D), λ_D – дыяметр абсягу (D).

Такім чынам, разгледзім матэрыяльную пласцінку, г. зн. Замкнуты квадравальны абсяг (P), уздоўж якога распаўсюджана маса з паверхневай шчыльнасцю $\rho(x, y)$. Будзем меркаваць, што функцыя $\rho(x, y)$ непарыўная ў абсягу (P). Патрабуецца знайсці статычныя мрманты M_X, M_Y, масу m, цэнтр цяжару $(\overline{x}, \overline{y})$ і моманты інерцыі I_X, I_Y, I_0 матэрыяльнай пласцінкі.

Скарыстаем для гэтага наступную схему.

1. Абсяг (P) разаб'ём на n частковых квадравальных абсягаў (P_1), (P_2), …, (P_n), якія могуць мець агульнымі толькі гранічныя пункты. Плошчы атрыманых частковых абсягаў абазначым адпаведна праз P_1, P_2, …, P_n. Найбольшы з дыяметраў частковых абсягаў абазначым праз λ.
2. Мяркуем, што ўся маса m_k часткі (P_k) сканцэнтравана ў якім-небудзь яго пункце (ξ_k, η_k), шчыльнасць у якім ёсць $\rho(\xi_k, \eta_k)$, прычым
$$m_k \approx \rho(\xi_k, \eta_k) P_k.$$

Складзём наступныя сумы:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k, \eta_k) P_k, \ \sum_{k=1}^{n} \eta_k \rho(\xi_k, \eta_k) P_k, \ \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k) P_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2 \rho(\xi_k, \eta_k) P_k, \ \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \rho(\xi_k, \eta_k) P_k, \ \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k^2 + \eta_k^2\right) \rho(\xi_k, \eta_k) P_k,$$

якія з'яўляюцца адпаведна набліжанымі значэннямі шуканых велічынь M_Y, M_X, m, I_X, I_Y, I_0.

Тады набліжаныя значэнні каардынат цэнтра цяжару матэрыяльнай пласцінкі (P) можна запісаць так:

$$\bar{x} \approx \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k, \eta_k) P_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k) P_k}, \quad \bar{y} \approx \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k \rho(\xi_k, \eta_k) P_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k) P_k}.$$

3. Здзейснім пераход да лімту пры $\lambda \to 0$ і атрымаем:

$$M_Y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k, \eta_k) P_k = \iint\limits_{(P)} x \rho(x, y) dxdy, \tag{32}$$

$$M_X = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \rho(\xi_k, \eta_k) P_k = \iint\limits_{(P)} y \rho(x, y) dxdy, \tag{33}$$

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k) P_k = \iint\limits_{(P)} \rho(x, y) dxdy.$$

$$I_X = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2 \rho(\xi_k, \eta_k) P_k = \iint\limits_{(P)} y^2 \rho(x, y) dxdy, \tag{34}$$

$$I_Y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \rho(\xi_k, \eta_k) P_k = \iint\limits_{(P)} x^2 \rho(x, y) dxdy, \tag{35}$$

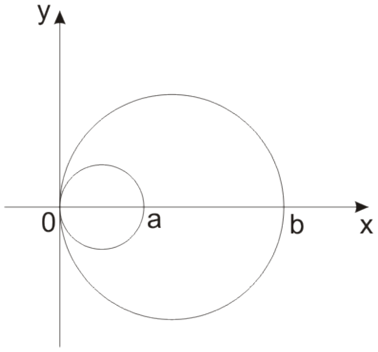
$$I_0 = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k^2 + \eta_k^2\right) \rho(\xi_k, \eta_k) P_k = \iint\limits_{(P)} \left(x^2 + y^2\right) \rho(x, y) dxdy. \tag{36}$$

Тады і каардынаты цэнтра цяжару матэрыяльнай пласцінкі вызначаюцца формуламі:

$$\bar{x} = \frac{M_Y}{m} = \frac{\iint\limits_{(P)} x \rho(x, y) dxdy}{\iint\limits_{(P)} \rho(x, y) dxdy}, \tag{37}$$

$$\bar{y} = \frac{M_X}{m} = \frac{\iint\limits_{(P)} y \rho(x, y) dxdy}{\iint\limits_{(P)} \rho(x, y) dxdy}. \tag{38}$$

Прыклад. Знайсці цэнтр цяжару аднароднай плоскай фігуры ($\rho(x, y) = 1$), абмежаванай акружнасцямі $r = a\cos\varphi$, $r = b\cos\varphi$ ($b > a$) (рыс. 22).



Рыс. 22

Рашэнне. Скарыстаем формулы (37), (38). Улічваючы сіметрыю дадзенай фігуры адносна палярнай восі, маем, што ардыната $\bar{y}$ роўная нулю.

Для знаходжання $\bar{x}$ вылічым M_Y і m.

Маем

$$M_Y=\iint\limits_{(P)}x\rho(x,y)dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi}r^2\cos\varphi\,dr=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\left[\frac{r^3}{3}\right]_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{b^3}{3}\cos^4\varphi-\frac{a^3}{3}\cos^4\varphi\right)d\varphi=\frac{b^3-a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{8}\left(b^3-a^3\right);$$

$$m=\iint\limits_{(P)}\rho(x,y)dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi}rdr=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left.\frac{r^2}{2}\right|_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}\pi\left(b^2-a^2\right).$$

Такім чынам,

$$\bar{x}=\frac{M_Y}{m}=\frac{b^2+ab+a^2}{2(b+a)}.$$

Значыць,

$$\bar{x}=\frac{b^2+ab+a^2}{2(b+a)},\ \bar{y}=0.$$

§ 9. Статычныя моманты, маса, цэнтр цяжару і моманты інерцыі прасторавага цела

Няхай дадзена прасторавае цела (V) з паверхневаю шчыльнасцю $\rho(x,y,z)$. Будзем меркаваць, што (V) – з'яўляецца замкнутым кубавальным абсягам, а функцыя $\rho(x,y,z)$ непарыўная ў гэтым абсягу.

Аналагічна таму, як мы выводзілі формулы для вылічэння статычных момантаў, масы, момантаў інерцыі, каардынат цэнтра цяжару плоскай фігуры, можна атрымаць формулы для знаходжання статычных момантаў, масы, моманташ інерцыі, каардынат цэнтра цяжару прасторавага цела.

Статычныя моманты цела адносна каардынатных плоскасцяў вылічваюцца так:

$$M_{XY}=\iiint\limits_{(V)}z\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz,$$

$$M_{YZ}=\iiint\limits_{(V)}x\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz,$$

$$M_{ZX}=\iiint\limits_{(V)}y\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

Пры дапамозе формулаў

$$m=\iiint\limits_{(V)}\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz,\ \bar{x}=\frac{M_{YZ}}{m}=\frac{\iiint\limits_{(V)}x\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{(V)}\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz},$$

$$\bar{y} = \frac{M_{ZX}}{m} = \frac{\iiint\limits_{(V)} y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{(V)} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}, \quad \bar{z} = \frac{M_{XY}}{m} = \frac{\iiint\limits_{(V)} z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{(V)} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

мы можам знайсці адпаведна масу і каардынаты цэнтра цяжару прасторавага цела.

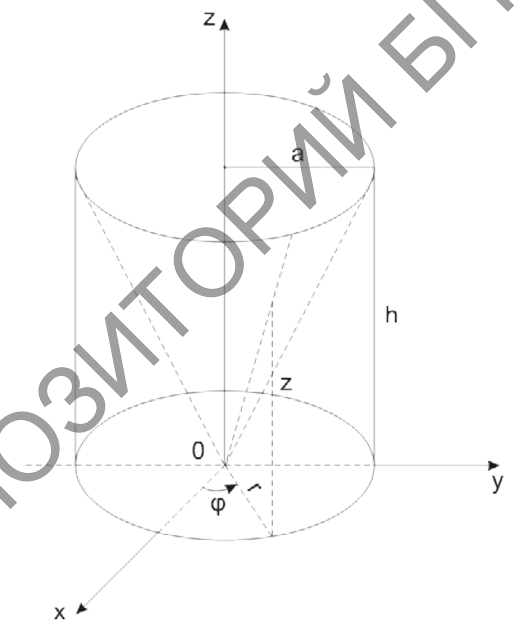
Моманты інерцыі адносна восей каардынат вылічваюцца так:

$$I_X = \iiint\limits_{(V)} \left(y^2 + z^2\right)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_Y = \iiint\limits_{(V)} \left(z^2 + x^2\right)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_Z = \iiint\limits_{(V)} \left(x^2 + y^2\right)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Прыклад. Знайсці цэнтр цяжару аднароднага ($\rho(x,y,z) = 1$) цела, абмежаванага цыліндрам $x^2 + y^2 = a^2$, конусам $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{h^2}z^2$ ($z \ge 0$) і плоскасцю xOy (рыс. 23).



Рыс. 23

Рашэнне. Праекцыя дадзенага цела на плоскасць xOy ёсць круг з акружнасцю $x^2 + y^2 = a^2$. Пяройдзем да цыліндрычных каардынатаў.

Паколькі цела сіметрычнае адносна плоскасцяў xOz і yOz, то

$$\bar{x} = 0,\ \bar{y} = 0.$$

Знойдзем $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz} = \frac{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r\,dr \int\limits_0^{\frac{h}{a}r} z\,dz}{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r\,dr \int\limits_0^{\frac{h}{a}r} dz} = \frac{\frac{1}{4}\pi h^2 a^2}{\frac{2}{3}\pi h a^2} = \frac{3}{8}h.$$

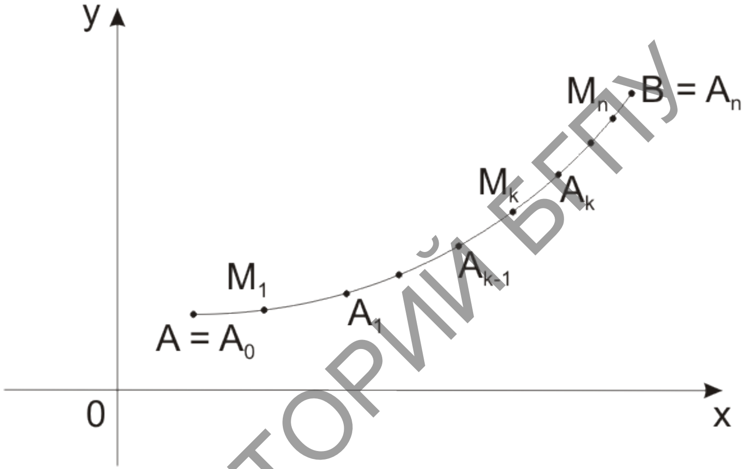
Такім чынам, цэнтр цяжару дадзенага цела вызначаецца пунктам $\left(0;0;\frac{3}{8}h\right)$.

§ 10. Крывалінейныя інтэгралы першага роду

I. Азначэнне крывалінейнага інтэграла першага роду

Няхай дадзена выпрастальная крывая (AB) з канцамі ў пунктах A і B і функцыя $f(M)=f(x,y)$, вызначаная на гэтай крывой.

Разбіваем крывую (AB) на n частак пунктамі $A=A_0$, A_1, …, A_{k-1}, A_k, …, $A_n=B$ (рыс. 24).



Рыс. 24

Сукупнасць усіх гэтых пунктаў будзем называць разбіўкай T крывой (AB).

Даўжыню частковай дугі (A_{k-1},A_k) абазначым праз Δs_k ($k=1,2,...,n$). Найбольшую з даўжынь частковых дуг абазначым праз λ.

На кожнай частковай дузе (A_{k-1},A_k) разгледзім адвольны пункт $M_k(\xi_k,\eta_k)$ ($k=1,2,...,n$) і разгледзім значэнне дадзенай функцыі ў гэтым пункце $f(M)=M_k(\xi_k,\eta_k)$.

Складзём наступную суму:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k . \qquad (39)$$

Гэтую суму будзем называць інтэгральнай сумай функцыі $f(x,y)$.

Можна ўвесці паняцце ліміту інтэгральнай сумы σ пры $\lambda\to 0$. Гэта можна зрабіць або на мове $\varepsilon-\delta$, або на мове паслядоўнасцяў. Прапануем зрабіць гэта самастойна.

Азначэнне. Калі існуе ліміт I інтэгральнай сумы σ пры $\lambda\to 0$, то функцыя $f(x,y)$ называецца інтэгравальнай уздоўж крывой (AB), і гэты ліміт I называецца кравалінейным інтэгралам першага роду або крывалінейным інтэгралам па даўжыні дугі ад функцыі $f(x,y)$ па крывой (AB) і абазначаецца

$$I = \int_{(AB)} f(x,y)ds .$$

Такім чынам,

$$\int_{(AB)} f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k .$$

Заўвага 1. У азначэнні крывалінейнага інтэграла першага роду не мае ніякага значэння той факт, які з пунктаў A або B лічыць пачаткам крывой, а які канцом. Інакш кажучы, не мае ніякага значэння напрамак, які можа быць абраны на дадзенай крывой (бо Δs_k не залежыць ад выбару гэтага напрамку).

Таму, калі (AB) і (BA) – align="left"рознанакіраваныя крывыя, то

$$\int_{(AB)} f(x,y)ds = \int_{(BA)} f(x,y)ds .$$

II. Існаванне і вылічэнне крывалінейнага інтэграла першага роду

Няхай выпрастальная крывая (AB) зададзена параметрычнымі раўнаннямі

$$x=\varphi(t),\;\; y=\psi(t), \tag{40}$$

дзе $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – непарыўныя на адрэзку $[t_0,T]$ функцыі.

На адрэзку $[t_0,T]$ возьмем адвольны пункт t. Яму будзе на крывой адпавядаць некаторы пункт M. Даўжыню дугі (AM) абазначым праз $s(t)$.

Разгледзім функцыю $s=s(t)$, вызначаную на адрэзку $[t_0,T]$. Гэтую функцыю будзем называць зменнай дугой крывой (40). Можна даказаць, што функцыя $s=s(t)$ нарастае і непарыўная на адрэзку $[t_0,T]$. Мноствам яе значэнняў з’яўляецца адрэзак $[0,S]$, дзе S – даўжыня крывой (AB).

Па тэарэме пра існаванне адваротнай функцыі на адрэзку $[0,S]$ існуе непарыўная функцыя

$$t=t(s), \tag{41}$$

адваротная ў дачыненні да функцыі $s=s(t)$.

Калі падставіць (41) у (40), атрымаем:

$$x=\varphi(t(s))=x(s),$$
$$y=\psi(t(s))=y(s),$$

г. зн.

$$x=x(s),\;\; y=y(s). \tag{42}$$

Такім чынам, мы атрымалі, што параметрычныя раўнанні выпрастальнай крывой (AB) могуць быць запісаны ў выглядзе (42), дзе параметрам s з’яўляецца даўжыня дугі ад пункта A да зменнага пункта M крывой (AB). Адзначым, што функцыі (42) непарыўныя на адрэзку $[0,S]$.

Раўнанні (42) з’яўляюцца вельмі зручнымі для разнастайных даследаванняў. Скарыстаем іх для высвятлення пытання пра існаванне і вылічэнне крывалінейнага інтэграла першага роду.

Абазначым праз S_k^* значэнне параметра s, якое адпавядае пункту M_k у суме (39).

Тады суму (39) можна запісаць наступным чынам:

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} f\left(x\left(S_k^*\right), y\left(S_k^*\right)\right)\Delta s_k .$$

Значыць, інтэгральная сума для крывалінейнага інтэграла $\int\limits_{(AB)} f(M)ds$ аказалася роўная інтэгральнай суме для вызначанага інтэграла $\int\limits_0^S f(x(s), y(s))ds$.

Таму, калі існуе адзін з адзначаных інтэгралаў, то існуе і другі, прычым мае месца роўнасць

$$\int\limits_{(AB)} f(M)ds = \int\limits_0^S f(x(s), y(s))ds . \qquad (43)$$

Так, напрыклад, калі функцыя $f(M)$ непарыўная ўздоўж крывой (AB), г. зн. калі непарыўная на адрэзку $[0, S]$ з’яўляецца функцыя $f(x(s), y(s))$, то вызначаны інтэграл, які стаіць у правай частцы формулы (43), існуе, а таму існуе і крывалінейны інтэграл, які стаіць у левай частцы гэтай формулы.

Такім чынам, мы высветлілі пытанне аб існаванні і вылічэнні крывалінейнага інтэграла першага роду.

Заўвага 2. Формула (43) зводзіць вылічэнне крывалінейнага інтэграла першага роду да вылічэння вызначанага інтэграла. Аднак гэтая формула не зусім зручная тым, што трэба ведаць параметрычныя раўнанні (42) дадзенай крывой, у якіх параметрам s з’яўляецца даўжыня дугі ад пункта A да зменнага пункта M.

Скарыстаем формулу (43) і атрымаем больш зручную для практыкі формулу, у якой выкарыстоўваюцца параметрычныя раўнанні (40) дадзенай крывой.

1°. Няхай крывая (AB) зададзена параметрычнымі раўнаннямі $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, дзе функцыі $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непарыўныя разам са сваімі вытворнымі першага парадку на адрэзку $[t_0, T]$.

У вызначаным інтэграле, які стаіць у правай частцы формулы (43), зробім падстаноўку $s = s(t)$ і пяройдзем да зменнай t.

Атрымаем:

$$\int\limits_{(AB)} f(M)ds = \int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt . \qquad (44)$$

Пры гэтым ма скарысталі тое, што

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt .$$

Атрыманую формулу (44) выкарыстоўваюць для вылічэння крывалінейных інтэгралаў першага роду ў выпадку, калі крывая (AB) зададзена параметрычнымі раўнаннямі (40).

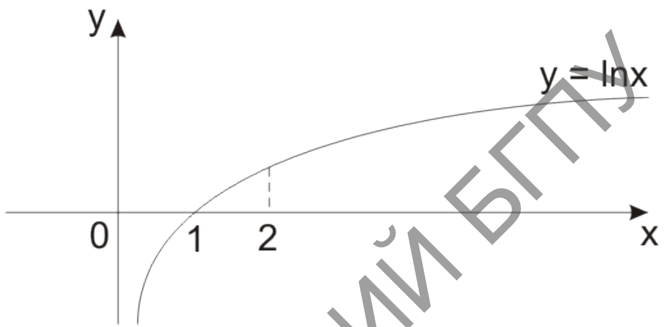
$2°$. Няхай крывая (AB) зададзена раўнаннем $y = y(x)$, дзе функцыя $y = y(x)$ непарыўная разам са сваёй вытворнай першага парадку на адрэзку $[a,b]$.

Калі запісаць параметрычныя раўнанні $x = x$, $y = y(x)$ дадзенай крывой і скарыстаць формулу (44), атрымаем:

$$\int\limits_{(AB)} f(M)ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx. \qquad (45)$$

Формулу (45) выкарыстоўваюць для вылічэння крывалінейнага інтэграла першага роду, калі крывая зададзена раўнаннем $y = y(x)$.

Прыклад. Вылічыць інтэграл $\int\limits_{(AB)} x^2 ds$, дзе (AB) – частка лагарыфмічнай крывой $y = \ln x$ ад $x = 1$ да $x = 2$ (рыс. 25).



Рыс. 25

Рашэнне. Па формулу (45)

$$\int\limits_{(AB)} x^2 ds = \int\limits_1^2 x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx = \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right).$$

Заўвага 3. Крывалінейны інтэграл першага роду валодае шэрагам уласцівасцяў, аналагічных уласцівасцям вызначанага інтэграла.

III. Выкарыстанне крывалінейных інтэгралаў першага роду ў механіцы

Крывалінейны інтэграл першага роду мае разнастайныя прыкладанні ў механіцы. Пры дапамозе гэтага інтэграла можна знайсці масу матэрыяльнай крывой, вызначыць яе статычныя моманты адносна каардынатных восяў, моманты інерцыі адносна каардынатных восяў, знайсці каардынаты цэнтра цяжару такой крывой, рашыць задачу аб прыцяжэнні матэрыяльнага пункта матэрыяльнай крывой і г. д.

1. Знаходжанне масы матэрыяльнай крывой

Разгледзім матэрыяльную крывую, г. зн. выпрастальную крывую (AB), уздоўж якой распаўсюджана маса з лінейнай шчыльнасцю $\rho = \rho(x, y)$. Будзем меркаваць, што функцыя $\rho(x, y)$ непарыўная ўздоўж крывой.

Крывую (AB) разбіваем на n частак пунктамі $A = A_0$, A_1, A_2, …, A_{k-1}, A_k, …, $A_n = B$. Даўжыні атрыманых частковых дуг абазначым праз Δs_k ($k = 1, 2, ..., n$). Найбольшую з даўжынь частковых дуг абазначым праз λ.

На частковай дузе (A_{k-1}, A_k) возьмем адвольны пункт $M_k(\xi_k, \eta_k)$. Шчыльнасць у гэтым пункце роўная $\rho(\xi_k, \eta_k)$.

Будзем абстрагавацца ад рэчаіснасці і лічыць, што дуга (A_{k-1}, A_k) – аднародная, а таксама што шчыльнасць яе ва ўсіх пунктах роўная $\rho(\xi_k, \eta_k)$. Тады здабытак $\rho(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k$ можна лічыць набліжаным значэннем масы частковай дугі (A_{k-1}, A_k).

Сума

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k \tag{46}$$

будзе набліжаным значэннем масы усёй матэрыяльнай крывой (AB).

За масу m матэрыяльнай крывой (AB) натуральна прыняць ліміт, да якога імкнецца сума (46) пры $\lambda \to 0$:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k = \int_{(AB)} \rho(x, y)ds .$$

Адзначым, што гэты ліміт (інтэграл) існуе, бо функцыя $\rho = \rho(x, y)$ непарыўная ўздоўж крывой (AB).

Такім чынам, мы атрымалі наступную формулу для вылічэння масы матэрыяльнай крывой:

$$m = \int_{(AB)} \rho(x, y)ds .$$

2. Знаходжанне цэнтра цяжару матэрыяльнай крывой

Як было адзначана вышэй, $\rho(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k$ можна лічыць набліжаным значэннем масы матэрыяльнай дугі (A_{k-1}, A_k). Сканцэнтруем гэтую масу ў пункце (ξ_k, η_k). Атрымаем сістэму матэрыяльных пунктаў $M_k(\xi_k, \eta_k)$ ($k = 1, 2, ..., n$), у якіх сканцэнтраваны адпаведна масы

$$m_k = \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

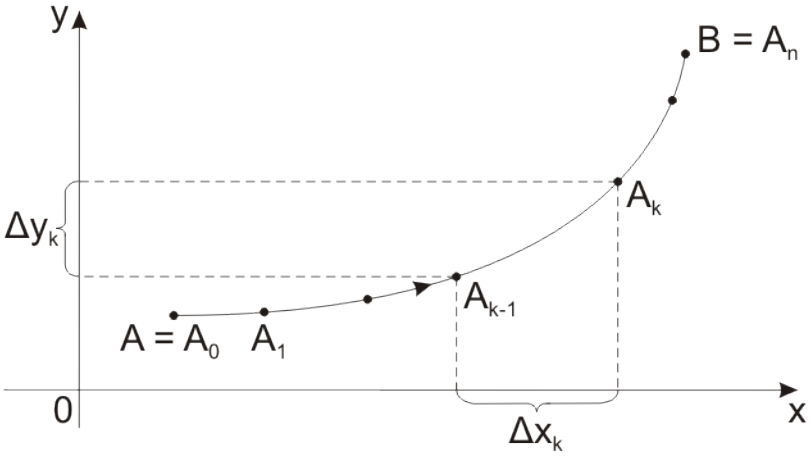
Знаходзім каардынаты цэнтра цяжару гэтай сістэмы матэрыяльных пунктаў, а потым пры дапамозе лімітавага пераходу пры $\lambda \to 0$ знаходзім каардынаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ цэнтра цяжару матэрыяльнай крывой:

$$\bar{x} = \frac{\int_{(AB)} x\rho(x, y)ds}{m}, \quad \bar{y} = \frac{\int_{(AB)} y\rho(x, y)ds}{m},$$

дзе $m = \int_{(AB)} \rho(x, y)ds$.

§ 11. Крываліне йныя інтэгралы другога роду

I. Азначэнне крывалінейнага інтэграла другога роду



Рыс. 26

На плоскасці xOy разгледзім крывую, абмежаваную пунктамі A і B. На дадзенай крывой можна абраць пэўны напрамак, калі пункт A лічыць яе пачаткам, а пункт B яе канцом, або наадварот.

Крывую, на якой абраны пэўны напрамак (ён звычайна адзначаецца стрэлкай) будзем называць накіраванай. Накіраваную крывую, якая мае пачатак у пункце A, а канец у пункце B, будзем абазначаць (AB). Накіраваную крывую, якая мае пачатак у пункце B, а канец у пункце A, абазначым праз (BA).

Такім чынам, разгледзім накіраваную крывую (AB). Будзем лічыць яе выпрастальнай.

Няхай на крывой (AB) зададзена функцыя $f(x, y)$. Крывую (AB) разбіваем пунктамі $A = A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, …, $A_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$, $A_k(x_k, y_k)$, …, $A_n(x_n, y_n) = B$ на n частковых дуг. Прычым гэтыя пункты такія, што A_0 папярэднічае A_1, A_1 папярэднічае A_2 і г. д. Сукупнасць усіх гэтых пунктаў называем разбіўкай крывой (AB). Найбольшую з даўжынь частковых дуг абазначым праз λ.

Мяркуем

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1},\ (k = 1, ..., n).$$

Гэта ёсць праекцыі накіраванай дугі $(A_{k-1}A_k)$ на восі Ox, Oy.

Разгледзім наступную суму:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k , \qquad (47)$$

дзе $M_k(\xi_k, \eta_k)$ адвольны пункт дугі $(A_{k-1}A_k)$.

Будзем называць яе інтэгральнай сумай. Можна ўвесці паняцце ліміту інтэгральнай сумы σ пры $\lambda \to 0$. Гэта можна зрабіць як на мове $\varepsilon - \delta$, так і на мове паслядоўнасцяў.

Азначэнне 1. Калі існуе ліміт I інтэгральнай сумы σ пры $\lambda \to 0$, то ён называецца крывалінейным інтэгралам другога роду ад $f(x,y)dx$ на крывой (AB) і абазначаецца

$$I = \int\limits_{(AB)} f(x,y)dx\,. \qquad (48)$$

Поруч з сумамі (47) можна разглядваць і наступныя сумы:

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\,. \qquad (49)$$

Азначэнне 2. Калі існуе ліміт I^* інтэгральнай сумы σ^* пры $\lambda \to 0$, то ён называецца крывалінейным інтэгралам другога роду ад $f(x,y)dy$ па крывой (AB) і абазначаецца

$$I^* = \int\limits_{(AB)} f(x,y)dy\,.$$

Заўвага 1. Як было адзначана раней, крывалінейны інтэграл першага роду не залежыць ад напрамку, які можа быць абраны на крывой.

Інакш абстаіць справа з крывалінейным інтэгралам другога роду. Ён залежыць ад напрамку, які можа быць абраны на крывой. Змяніўшы напрамак на дадзенай крывой, мы павінны ў сумах (47), (49) замяніць Δx_k, Δy_k на $-\Delta x_k$, $-\Delta y_k$ адпаведна. Пры гэтым зменяць знак інтэгральныя сумы (47) і (49), таму зменяць знак і іх ліміты.

Такім чынам, калі (AB) і (BA) – рознанакіраваныя крывыя, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dx = -\int\limits_{(BA)} f(x,y)dx\,,$$

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dy = -\int\limits_{(BA)} f(x,y)dy\,.$$

Адзначым, што крывалінейныя інтэгралы другога роду валодаюць шэрагам уласцівасцяў, аналагічных уласцівасцям вызначанага інтэграла.

Заўвага 2. Можна ўвесці паняцце крывалінейнага інтэграла другога роду агульнага выгляду.

Няхай на крывой (AB) зададзены дзве функцыі $P(x,y)$, $Q(x,y)$.

Азначэнне 5. Калі існуюць крывалінейныя інтэгралы $\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx$ і $\int\limits_{(AB)} Q(x,y)dy$, то іх сума называецца крывалінейным інтэгралам другога роду агульнага выгляду і абазначаецца

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,. \qquad (50)$$

Такім чынам,

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + \int\limits_{(AB)} Q(x,y)dy\,.$$

Заўвага 3. У азначэнні крывалінейнага інтэграла другога роду разглядаемая крывая (AB) можа быць і замкнутай, г. зн. пункт B супадае з пунктам A. Такую крывую будзем называць замкнутым контурам і абазначаць (L). З двух магчымых напрамкаў абходу замкнутага контура (L)

дамовімся называць дадатным той напрамак, пры якім абсяг, які ляжыць унутры гэтага контура, застаецца злева ў адносінах да пункта, які ажыццяўляе абход.

Працілеглы напрамак абходу контура (L) дамовімся называць адмоўным.

Крывалінейны інтэграл па замкнутаму контуру (L), на якім абраны дадатны напрамак абходу, часта абазначаюць сімвалам

$$\oint_{(L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

II. Існаванне і вылічэнне крывалінейнага інтэграла другога роду

Няхай накіраваная крывая (AB) зададзена параметрычнымі раўнаннямі

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t).$$

Няхай пачатку A дадзенай крывой адпавядае значэнне параметра $t = a$, а канцу B – значэнне параметра $t = \beta$. Будзем меркаваць, што $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ непарыўныя і маюць непарыўныя вытворныя $\varphi'(t)$ і $\psi'(t)$ на адрэзку з канцамі α, β. Будзем меркаваць таксама, што функцыі $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ непарыўныя ўздоўж крывой (AB). Можна даказаць, што пры гэтых меркаваннях крывалінейны інтэграл другога роду (50) існуе і роўны вызначанаму інтэгралу:

$$\int_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\right]dt . \qquad (51)$$

Разгледзім прыватны выпадак формулы (51).

1. Няхай крывая (AB) зададзена раўнаннем $x = x(y)$. Няхай пачатку A дадзенай крывой адпавядае значэнне $y = c$, а канцу B – значэнне $y = d$. Будзем меркаваць, што функцыя $x = x(y)$ непарыўная і мае непарыўную вытворную на адрэзку з канцамі c і d.

Запішам параметрычныя раўнанні дадзенай крывой:

$$x = x(y), \; y = y . \qquad (52)$$

Па формуле (51) атрымаем:

$$\int_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{c}^{d} \left[P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)\right]dy . \qquad (53)$$

Прыклад. Вылічыць

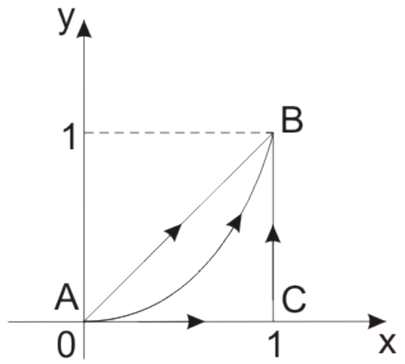
$$\int_{(AB)} 3x^2 y dx + \left(x^3 + 1\right)dy ,$$

дзе:

а) (AB) – адрэзак, які злучае пункты $(0;0)$ і $(1;1)$;

б) (AB) – дуга парабалы, якая злучае тыя ж пункты;

в) (AB) –ламаная, якая праходзіць праз пункты $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ (рыс. 27).



Рыс. 27

Рашэнне. Маем:

а) $\int\limits_{(AB)} 3x^2ydx + \left(x^3+1\right)dy = \int\limits_0^1 \left(4x^3+1\right)dx = 2$;

б) $\int\limits_{(AB)} 3x^2ydx + \left(x^3+1\right)dy = \int\limits_0^1 \left(5x^4+2x\right)dx = 2$;

в) $\int\limits_{(AB)} 3x^2ydx + \left(x^3+1\right)dy = \int\limits_{(AC)} 3x^2ydx + \left(x^3+1\right)dy +$

$+ \int\limits_{(CB)} 3x^2ydx + \left(x^3+1\right)dy = \int\limits_0^1 2dy = 2$.

Заўважым, што вынік інтэгравання не залежыць ад шляху інтэгравання. Гэтая акалічнасць не з'яўляецца выпадковай. Гэты факт будзе высветлены ў § 14.

Заўвага 4. Мы разглядзелі крывалінейныя інтэгралы для плоскіх крывых. Аднак усё сказанае пра іх можа быць перанесена і на прасторавыя крывыя.

Па аналогіі з выпадкам плоскай крывой можна вызначыць крывалінейны інтэграл першага роду.

$$\int\limits_{(AB)} f\left(x,y,z\right)ds$$

і крывалінейныя інтэгралы другога роду

$$\int\limits_{(AB)} P\left(x,y,z\right)dx, \quad \int\limits_{(AB)} Q\left(x,y,z\right)dy, \quad \int\limits_{(AB)} R\left(x,y,z\right)dz,$$

$$\int\limits_{(AB)} P\left(x,y,z\right)dx + Q\left(x,y,z\right)dy + R\left(x,y,z\right)dz.$$

Заўвага 5. Абазначым праз α і β вуглы, якія складае восямі каардынат накіраваная датычная да плоскай крывой (AB). Відавочна, што гэтыя вуглы з'яўляюцца функцыямі каардынат x, y пункта дотыку.

Тады крывалінейны інтэграл другога роду агульнага выгляду можна выразіць праз крывалінейны інтэграл першага роду па формуле

$$\int\limits_{(AB)} P\left(x,y\right)dx + Q\left(x,y\right)dy = \int\limits_{(AB)} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta\right)ds.$$

§ 12. Формула Грына

Формула Грына звязвае двайны інтэграл з крывалінейнымі інтэграламі другога роду. Яна мае шырокае прымяненне як у матэматычным аналізе, так і ў яго прыкладаннях.

I. Вывад формулы Грына

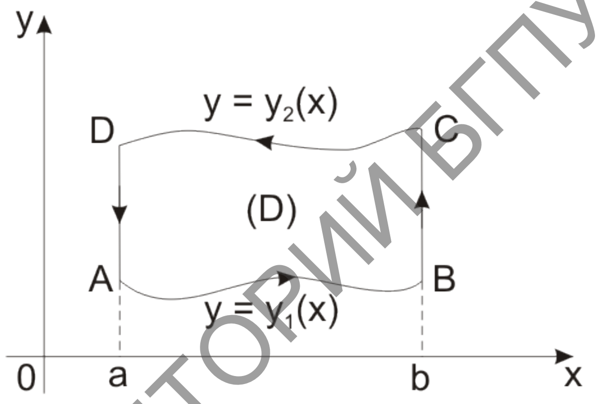
1. На плоскасці xOy разгледзім абсяг (D), абмежаваны крывымі

$$y = y_1(x),\; y = y_2(x) \;\; (a \le x \le b) \tag{54}$$

і прамымі

$$x = a\,,\;\; x = b\,. \tag{55}$$

Будзем меркаваць, што функцыі (54) на адрэзку $[a,b]$ маюць непарыўныя вытворныя і што на гэтым адрэзку $y_1(x) \le y_2(x)$. Граніцу абсягу (D) абазначым праз (L) і возьмем на ёй дадатны напрамак абходу (рыс. 28).



Рыс. 28

Няхай функцыя $P(x,y)$ вызначаная і непарыўная разам са сваёй частковай вытворнай $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ у замкнутым абсягу (D). Выразім двайны інтэграл $\iint\limits_{(D)} \dfrac{\partial P}{\partial y} dxdy$ праз крывалінейны інтэграл па контуру (L).

Вядома, што

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx =$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x))dx - \int_a^b P(x, y_1(x))dx\,. \tag{56}$$

Кожны з вызначаных інтэгралаў ў правай частцы роўнасці (56) выразім праз крывалінейныя інтэгралы:

$$\int_a^b P(x, y_1(x))dx = \int\limits_{(AB)} P(x,y)dx\,, \tag{57}$$

$$\int_a^b P(x, y_2(x))dx = \int\limits_{(DC)} P(x,y)dx = -\int\limits_{(CD)} P(x,y)dx\,. \tag{58}$$

Скарыстаем таксама тую акалічнасць, што

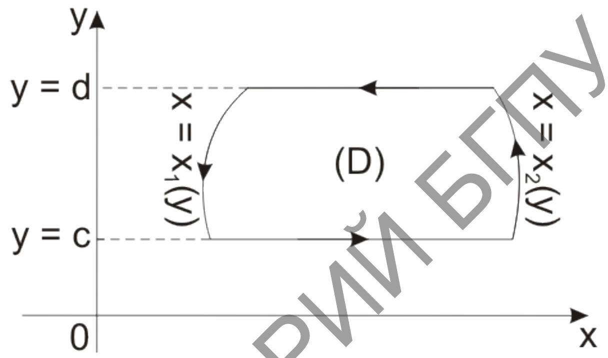
$$\int\limits_{(BC)} P(x,y)dx = 0\,, \quad \int\limits_{(DA)} P(x,y)dx = 0\,. \tag{59}$$

Калі ўлічыць роўнасці (57), (58), (59),то роўнасць (56) можна запісацьў наступным выглядзе:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{(L)} P(x,y)dx\,. \tag{60}$$

Формула (60) атрымана намі для абсяг, абмежаванага крывымі (54) і прамымі (55) (будзе карацей гаварыць для абсягу выгляду 1). Адзначым, што формула (60) мае месца і для любога абсягу, які можна разбіць на канечны лік абсягаў выгляду 1.

2. Разгледзім абсяг (D), абмежаваны крывымі $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ $(c \le y \le d)$ і прамымі $y = c$, $y = d$ (рыс. 29).



Рыс. 29

Будзем меркаваць, што функцыі $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ маюць непарыўныя вытворныя на адрэзку $[c,d]$ і на гэтым адрэзку $x_1(y) \le x_2(y)$. Граніцу абсягу (D) абазначым праз (L) і возьмем на ёй дадатны напрамак абходу. Няхай функцыя $Q(x,y)$ непарыўная разам са сваёй частковай вытворнай $\frac{\partial Q}{\partial x}$ у замкнутым абсягу (D).

Калі разважаць аналагічным чынам, як і ў пункце 1, атрымаем натупную формулу:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{(L)} Q(x,y)dy\,. \tag{61}$$

Гэтая формула мае месца і для любога абсягу, які можна разбіць на канечны лік абсягаў выгляду 2.

3. Разгледзім абсяг (D), які можна разбіць як на канечны лік абсягаў выгляду 1, так і на канечны лік абсягаў выгляду 2. Такі абсяг будзем называць простым.

Тэарэма. Няхай (D) – просты абсяг, і няхай функцыі $Q(x,y)$, $P(x,y)$ непарыўныя разам са сваімі частковымі вытворнымі $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ у замкнутым абсягу (D). Тады мае месца формула Грына

$$\iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_{(L)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,, \qquad (62)$$

дзе (L) – граніца абсягу (D), на якой абраны дадатны напрамак абходу.

Доказ. Відавочна, у абсягу (D) маюць месца адначасова формулы (60) і (61). Калі ад (61) адняць (60), атрымаем формулу (62).

Заўвага. Формула Грына мае месца для любога абсягу, абмежаванага канечным лікам кускова-гладкіх крывых.

II. Прымяненне формулы Грына для вылічэння плошчы

Калі функцыі $P(x,y)$, $Q(x,y)$ узяць такімі, каб у абсягу (D) $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$, тодвайны інтэграл, які стаіць улевай частцы формулы Грына, роўны плошчы D абсягу (D).

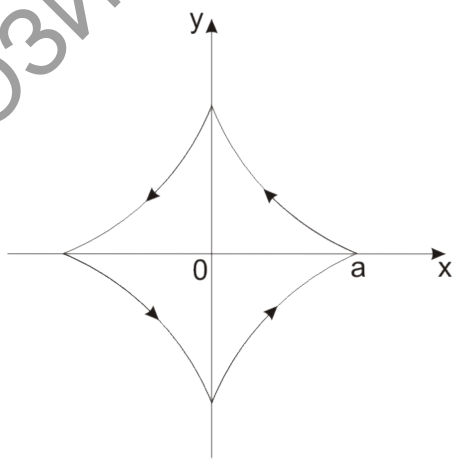
У прыватнасці, калі $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=x$, то на падставе формулы Грына атрымаем:

$$D=\int\limits_{(L)}x\,dy\,.$$

Калі $P(x,y)=-\frac{1}{2}y$, $Q(x,y)=\frac{1}{2}x$, то будзем мець:

$$D=\frac{1}{2}\int\limits_{(L)}x\,dy-y\,dx\,. \qquad (63)$$

Прыклад. Вылічыць плошчу фігуры, абмежаванай астроідай $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ (рыс. 30).



Рыс. 30

Рашэнне. $D=\frac{1}{2}\int\limits_{(L)}x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[a\cos^3 t3\sin^2 t\cos t+a\sin^3 t\,a3\cos^2 t\sin t\right]dt=$

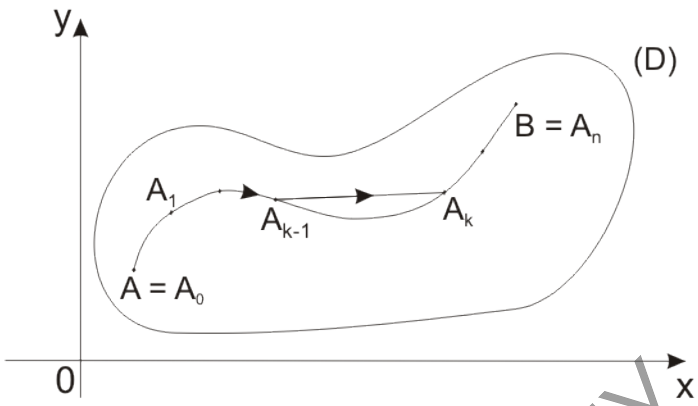
$=\frac{3}{2}a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\frac{3}{2}a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3}{8}\pi a^2$.

§ 13. Выкарыстанне крывалінейных інтэгралаў

другога роду у механіцы

Няхай зададзена плоскае сілавое поле, г. зн. абсяг (D), у кожным пункце $M(x,y)$ якога зададзена сіла $\vec{f}(x,y)$ (рыс. 31).

Праекцыі сілы $\vec{f}(x,y)$ на восі Ox і Oy абазначым праз $P(x,y)$, $Q(x,y)$.



Рыс. 31

Будзем мець:

$$\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} .$$

Лічым, што функцыі $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непарыўныя ў замкнутым абсягу (D).

Няхай уздоўж накіраванай крывой (AB), якая цалкам ляжыць у абсягу (D), перамяшчаецца матэрыяльны пункт. Знойдзем работу, якую чыняць пры гэтым сілы поля. Будзем лічыць, што крывая (AB) – кускова-гладкая.

Сфармуляваную задачу можна рашыць наступным чынам.

Разбіваем крывую (AB) пунктамі $A = A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, …, $A_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$, $A_k(x_k, y_k)$, …, $A_n(x_n, y_n) = B$ на n частковых дуг. Найбольшую з даўжынь частковых дуг абазначым праз λ. Абазначым $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Зафіксуем увагу на k-й частковай накіраванай дузе $(A_{k-1}A_k)$. Разгледзім вектар $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$, які злучае пункт A_{k-1} з пунктам A_k. Відавочна, што $\overrightarrow{A_{k-1}A_k} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$.

Разгледзім сілу

$$\vec{f}(A_{k-1}) = \vec{f}(x_{k-1}, y_{k-1}) = P(x_{k-1}, y_{k-1})\vec{i} + Q(x_{k-1}, y_{k-1})\vec{j} ,$$

якая дзейнічае ў пункце $A_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$.

Абстрагуючыся ад рэчаіснасці, заменім рух матэрыяльнага пункта па частковай дузе $(A_{k-1}A_k)$ рухам па адрэзку $A_{k-1}A_k$. Акрамя гэтага будзем лічыць, што ўздоўж гэтага адрэзка дзейнічае сталая сіла, роўная $\vec{f}(A_{k-1})$.

Работу сталай сілы $\vec{f}(A_{k-1})$ на прамалінейным шляху мы вылічваць умеем. Яна роўная скалярнаму здабытку:

$$\vec{f}(A_{k-1}) \cdot \overrightarrow{A_{k-1}A_k} = P(x_{k-1}, y_{k-1})\Delta x_k + Q(x_{k-1}, y_{k-1})\Delta y_k .$$

Гэты лік можна лічыць набліжаным значэннем работы, якую чыняць сілы поля ўздоўж крывалінейнага шляху $(A_{k-1}A_k)$.

Разгледзім цяпер наступную суму:

$$\sum_{k=1}^{n} P(x_{k-1}, y_{k-1})\Delta x_k + Q(x_{k-1}, y_{k-1})\Delta y_k \ . \qquad (64)$$

Гэтую суму можна лічыць набліжаным значэннем работы сіл поля пры перамяшчэнні матэрыяльнага пункта ўздоўж крывой (AB).

За работу W, якую чыняць сілы поля пры перамяшчэнні матэрыяльнага пункта ўздоўж крывой (AB), натуральна прыняць ліміт сумы (64) пры $\lambda \to 0$:

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(x_{k-1}, y_{k-1})\Delta x_k + Q(x_{k-1}, y_{k-1})\Delta y_k =$$

$$= \int\limits_{(AB)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \, .$$

Такім чынам,

$$W = \int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)dy \, .$$

§ 14. Умовы незалежнасці крывалінейнага інтэграла ад шляху

Тэарэма. Няхай (D) – замкнуты абмежаваны адназвязны абсяг. Няхай функцыі $P(x, y)$, $Q(x, y)$ вызначаныя і непарыўныя разам са сваімі вытворнымі $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ у абсягу (D). Тады наступныя чатыры ўмовы раўназначныя, г. зн. выкананне адной з іх цягне за сабой выкананне астатніх.

1. Крывалінейны інтэграл $\int P\,dx + Q\,dy$, узяты па любому замкнутаму контуру, які належыць абсягу (D), роўны нулю.

2. Крывалінейны інтэграл $\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy$ па крывой (AB), якая ляжыць у абсягу (D), не залежыць ад шляху інтэгравання, а залежыць толькі ад пачатковага пункта A і канцавога пункта B.

3. У абсягу (D) выраз $P\,dx + Q\,dy$ з'яўляецца дыферэнцыялам некаторай функцыі $F(x, y)$, г. зн.

$$dF = P\,dx + Q\,dy \, .$$

4. У абсягу (D) мае месца роўнасць

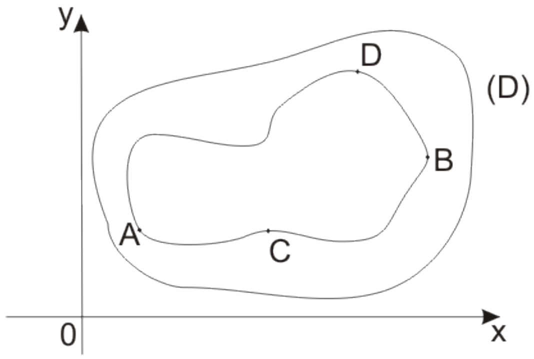
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \, .$$

Доказ. Доказ тэарэмы будзем ажыццяўляць па наступнай схеме:

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1 \, .$$

1. Доказ сцвярджэння $1 \Rightarrow 2$.

Няхай A і B – якія-небудзь два пункты абсягу (D) (рыс. 32).



Рыс. 32

Разгледзім адвольныя крывыя (ACB) і (ADB), якія ляжаць у абсягу (D). Аб'яднаннем гэтых крывых з'яўляецца замкнуты контур $(ACBDA)$, які належыць абсягу (D).

Згодна ўмове 1,

$$\int\limits_{(ACBDA)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(ACB)} + \int\limits_{(BDA)} = \int\limits_{(ACB)} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{(ADB)} P\,dx + Q\,dy\,.$$

Адсюль атрымліваем:

$$\int\limits_{(ACB)} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{(ADB)} P\,dx + Q\,dy = 0\,,$$

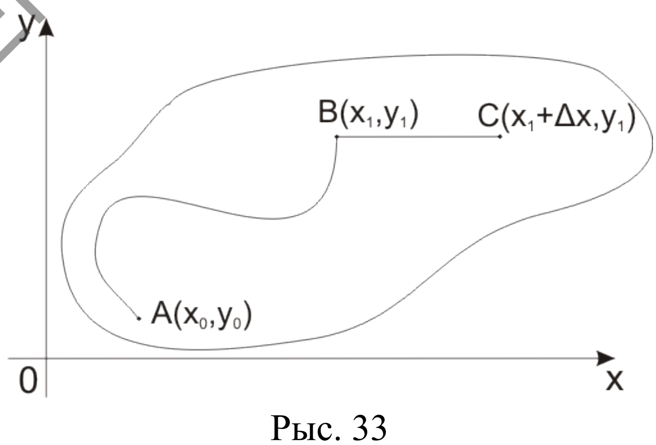
г. зн.

$$\int\limits_{(ACB)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(ADB)} P\,dx + Q\,dy\,.$$

Сцверджанне 2 даказанае.

2. Доказ сцверджэння $2 \Rightarrow 3$.

Па ўмове 2 крывалінейны інтэграл $\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy$ не залежыць ад шляху інтэгравання, а залежыць толькі ад пачатковага пункта $A(x_0, y_0)$ і канцавога пункта $B(x_1, y_1)$ (рыс. 33).



Рыс. 33

Таму разглядаемы крывалінейны інтэграл натуральна абазначыць наступным чынам:

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P\,dx + Q\,dy\,.$$

Разгледзім функцыю

$$F(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\,dx+Q\,dy\,,$$

дзе $A(x_0,y_0)$ – фіксаваны пункт абсягу (D), а $M(x,y)$ – адвольны пункт абсягу (D).

Дакажам, што ў кожным пункце абсягу (D) гэтая функцыя з’яўляецца дыферэнцавальнай і што яе дыферэнцыял роўны $dF = P\,dx + Q\,dy$. Тады і другая частка тэарэмы будзе даказанай.

Спачатку дакажам, што ў кожным пункце абсягу (D) функцыя $F(x,y)$ мае частковую вытворную

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y).$$

У абсягу (D) разгледзім адвольны пункт $B(x_1,y_1)$. Дадзім x_1 прырост Δx і разгледзім рознасць

$$\Delta_X F = F(x_1+\Delta x,y_1)-F(x_1,y_1)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\,dx+Q\,dy-\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y_0)} P\,dx+Q\,dy\,. \qquad (65)$$

Заўважым, што кожны з крывалінейных інтэгралаў у правай частцы роўнасці (65) не залежыць ад шляху інтэгравання.

Другі інтэграл будзем вылічваць па адвольнай крывой, якая злучае пункты A і B, а для першага інтэграла няхай шлях складаецца з той жа крывой і адрэзка, які злучае пункты $B(x_1,y_1)$ і $C(x_1+\Delta x,y_1)$ (рыс. 33).

Тады будзем мець:

$$\Delta_X F = \int\limits_{(ABC)} P\,dx+Q\,dy-\int\limits_{(AB)} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{(BC)} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{x_1}^{x_1+\Delta x} P(x,y_1)dx=$$
$$=P(x_1+\theta\Delta x,y_1)\Delta x\,,$$

дзе $0\le\theta\le1$.

Пры гэтым мы выкарысталі тэарэму аб сярэднім для вызначанага інтэграла.

Разгледзім стасунак

$$\frac{\Delta_X F}{\Delta x}=\frac{P(x_1+\theta\Delta x,y_1)\Delta x}{\Delta x}=P(x_1+\theta\Delta x,y_1).$$

Калі цяпер скарыстаць непарыўнасць функцыі $P(x,y)$ у пункце (x_1,y_1), то атрымаем, што

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_X F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}P(x_1+\theta\Delta x,y_1)=P(x_1,y_1).$$

Такім чынам, мы даказалі, што разглядаемая намі функцыя $F(x,y)$ у кожным пункце (x_1,y_1) абсягу (D) мае частковую вытворную па x, роўную $P(x_1,y_1)$.

Калі абазначыць адвольны пункт абсягу (D) праз (x,y), то атрымаем, што функцыя $F(x,y)$ у кожным пункце (x,y) абсягу (D) мае частковую вытворную па x, прычым

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y). \quad (66)$$

Аналагічна даказваецца, што функцыя $F(x, y)$ у кожным пункце (x, y) абсягу (D) мае частковую вытворную па y, прычым

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y). \quad (67)$$

Па ўмове тэарэмы функцыі $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ непарыўныя ў абсягу (D), таму на падставе роўнасцяў (2) і (3) непарыўнымі ў гэтым абсягу з'яўляюцца і частковыя вытворныя $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Адсюль паводле дастатковай умовы дыферанцавальнасці вынікае, што функцыя $F(x, y)$ з'яўляецца дыферэнцавальнай у абсягу (D). Яе дыферэнцыял роўны:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy\, dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Сцвярджэнне $2 \Rightarrow 3$ даказалі.

3. Доказ сцверджэння $3 \Rightarrow 4$.

Па ўмове выраз $Pdx + Qdy$ з'яўляецца дыферэнцыялам некаторай функцыі $F(x, y)$. Паколькі $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$, то маем:

$$P = \frac{\partial F}{\partial x},\ Q = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Адсюль вынікае, што

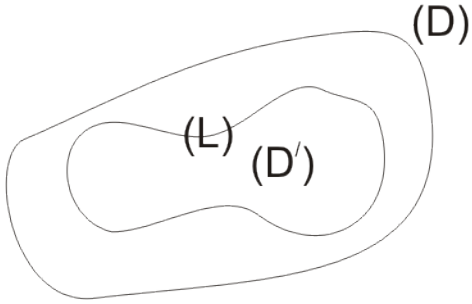
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

Па ўмове тэарэмы частковыя вытворныя $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непарыўныя ў абсягу (D), таму на падставе атрыманых вышэй роўнасцяў мы можам сцвярджаць, што непарыўнымі ў гэтым абсягу будуць і змешаныя вытворныя $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$. Калі цяпер скарыстаць тэарэму пра роўнасць змешаных вытворных, то з атрыманага вышэй вынікае, што $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ у абсягу (D), г. зн. у абсягу (D) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Сцвярджэнне $3 \Rightarrow 4$ даказалі.

4. Доказ сцвярджэння $4 \Rightarrow 1$.

Разгледзім адвольны замкнуты контур (L), які належыць абсягу (D) (рыс. 34).



Рыс. 34

Паколькі абсяг (D) – аднazвязны, то частка плоскасці (D'), абмежаваная гэтым контурам, цалкам належыць абсягу (D).

Функцыі P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непарыўныя ў абсягу (D), то яны будуць непарыўнымі таксама і ў замкнутым абсягу (D'). Гэта дае магчымасць у абсягу (D') карыстацца формулай Грына

$$\iint_{(D')}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{(L)}Pdx+Qdy\,.$$

Адсюль, скарыстаўшы ўмову 4, атрымліваем, што

$$\int_{(L)}Pdx+Qdy=0\,.$$

Сцвярджэнне $4\Rightarrow1$ даказалі.

Літаратура

1. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1967.
2. Уваренков И.М., Маллер М.З. Курс математического анализа: В 2 т. М.: Просвещение, 1976. Т.2.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2 ч. М.: Наука, 1980. Ч.2.
4. Виноградова И.А., Олехшик С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях. М.: МГУ, 1991.

Змест

Прадмова……………………………………………………………
§1. Двайны інтэграл……………………………………………………
§2. Вылічэнне аб'ёму цыліндрычнага цела………………………….
§3. Вылічэнне двайнога інтэграла паўторным інтэграваннем………
§4. Замена зменных у двайным інтэграле…………………………….
§5. Двайны інтэграл у палярных каардынатах………………………
§6. Вылічэнне плошчы паверхні………………………………………
§7. Трайны інтэграл…………………………………………………….
§8. Статычныя моманты, маса, цэнтр цяжару і моманты інерцыі матэрыяльнай пласціны………………………………………………………
§9. Статычныя моманты, маса, цэнтр цяжару і моманты інерцыі прасторавага цела……………………………………………………………………….
§10. Крывалінейныя інтэгралы першага роду…………………………………
§11. Крывалінейныя інтэгралы другога роду………………………………..
§12. Формула Грына…………………………………………………
§13. Выкарыстанне крывалінейных інтэгралаў другога роду ў механіцы……
§14. Умовы незалежнасці крывалінейных інтэгралаў ад шляху………………
Літаратура……………………………………………………………………………