УДК 517.968

С.И. Василец, А.А. Килбас

Действие и представления потенциалов Рисса со степенно-логарифмическими ядрами в весовых L_p-пространствах.

(Представлено академиком И.В. Гайшуном)

Настоящая работа посвящена исследованию многомерных интегральных операторов

$$(K^{\alpha}\varphi)(x)=\int_{\Omega_{a,b}}|x-t|^{\alpha-n}\ln|x-t|\varphi(t)dt \quad (\alpha>0;\; x\in\Omega_{a,b}), \tag{1}$$

где $\Omega_{a,b}=\{y\in R^n: 0\le a<|y|<b<+\infty\}$ – сферический слой с центром в начале координат (в частности, шар Ω_b при $a=0$) в n-мерном евклидовом пространстве R^n ($n\ge 2$). Интегралы вида (1) возникают в теории контактных задач теории упругости, теории ползучести, теории логарифмического потенциала и др. При $\alpha-n=2k\ (k=0,1,\ldots)$ оператор (1) вида

$$(I^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int_{\Omega_{a,b}}|x-t|^{\alpha-n}\ln|x-t|\varphi(t)dt \quad (x\in\Omega_{a,b}), \tag{2}$$

где $\gamma_n(\alpha)=(-1)^{\frac{n-\alpha}{2}}2^{\alpha-1}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}+1\right)$, известен как потенциал Рисса (см., например, [1, §25, с. 361]). Поэтому интегралы (1) называют потенциалами Рисса со степенно-логарифмическими ядрами.

С точки зрения приложений важным является изучение действия операторов K^{α} и I^{α} из одних функциональных пространств в другие и нахождение представлений интегралов (1) и (2) в виде более простых конструкций, позволяющих строить явные решения соответствующих интегральных уравнений первого рода. Такие вопросы для потенциалов (1) изучены сравнительно мало в отличие от потенциалов Рисса со степенным ядром

$$(I_0^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int_{\Omega_{a,b}}|x-t|^{\alpha-n}\varphi(t)dt \quad (\alpha>0;\; x\in\Omega_{a,b},\ 0\le a<b\le\infty), \tag{3}$$

где $\gamma_n(\alpha) = 2^{\alpha} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)$; (см. в связи с этим [1, гл.5] и обзорную статью [2]). Действие из $L_p(\Omega_{a,b})$ более общих, чем (1), операторов типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами произвольной степени логарифма было изучено в [3], а теорема типа Стейна-Вейса (см. [1, Теорема 25.3, с. 365]) для таких операторов доказана в [4]. Представление в $C(\Omega_{a,b})$ интегралов $(I^{\alpha}\varphi)(|x|)$ с $\alpha = n$ и радиальной плотностью $\varphi(|t|)$ в виде одномерных интегралов дано в [5].

В данной работе мы изучаем указанные выше вопросы для потенциалов Рисса (1) и (2) в весовых пространствах $L_p(\Omega_{a,b}, \rho_\nu)$, $1 \le p \le \infty$, измеримых на $\Omega_{a,b}$ функций $\varphi(x)$ со степенным весом $\rho_\nu(x) = (|x| - a)^{\nu_1}(b - |x|)^{\nu_2}$ $(\nu_1, \nu_2 \in R)$, для которых

$$\|\varphi\|_{p,\,\rho_\nu} = \Big(\int\limits_{\Omega_{a,b}} \rho_\nu(x)|\varphi(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} < \infty,\ 1 \le p < \infty, \tag{4}$$

$$\|\varphi\|_{\infty,\,\rho_\nu} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_{a,b}} |\rho_\nu(x)\varphi(x)| < \infty,\ p = \infty. \tag{5}$$

Действие операторов K^{α} и I^{α} из $L_p(\Omega_{a,b}, \rho_\nu)$ в $L_r(\Omega_{a,b}, \rho_\mu)$ характеризуют следующие утверждения

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < n,\ 1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$ *и* $p < r < q = \dfrac{np}{n - \alpha p}$. Пусть $\nu_1 < p - 1$ при $a \ne 0$ и $\nu_1 < n(p-1)$ при $a = 0$, $\nu_2 < p - 1$, $\mu_1 > -1$ при $a \ne 0$ и $\mu_1 > -n$ при $a = 0, \mu_2 > -1$. Тогда оператор K^{α} ограниченно действует из пространства $L_p(\Omega_{a,b}, \rho_\nu)$ в пространство $L_r(\Omega_{a,b}, \rho_\mu)$.

Теорема 2. Пусть $\alpha > 0,\ 1 < p < \infty$, Пусть $\nu_1 < p - 1$ при $a \ne 0$ и $\nu_1 < n(p-1)$ при $a = 0$, $\nu_2 < p - 1$, $\mu_1 \ge 0$, $\mu_2 \ge 0$ Тогда операторы K^{α} и I^{α} ограниченно действуют из $L_p(\Omega_{a,b}, \rho_\nu)$ в $L_\infty(\Omega_{a,b}, \rho_\mu)$ соответственно при $p > \dfrac{n}{\alpha}$ и $p > 1$.

Доказательство теоремы 1 основано на представлении подынтегрального выражения в (1) в виде

$$([\varphi(t)]^{\frac{p}{r}}|x-t|^{\varepsilon-\frac{n}{r}}[\rho_\nu(t)]^{\frac{1}{r}})([\varphi(t)]^{1-\frac{p}{r}}[\rho_\nu(t)]^{\frac{1}{p_2}})(|x-t|^{\varepsilon-\frac{n}{p'}}\ln|x-t|[\rho_\nu(t)]^{-\frac{1}{r}-\frac{1}{p'}}),$$ где

$p'=\frac{p}{p-1}$ ($p'=1$ при $p=\infty$) и $p_2=\frac{rp}{r-p}$, $\varepsilon=(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})\frac{n}{2}$, применении обобщенного неравенства Гельдера ([1, (1.30), с.25]) с $n=3, p_1=r, p_2, p_3=p'$ и использовании соотношения (4). Доказательство теоремы 2 основано на неравенстве Гельдера ([1, (1.28), с.25]) и равенствах (4)-(5).

При $\mu_1=\mu_2=0$ из теорем 1 и 2 вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть $0<\alpha<n,\ 1<p<\frac{n}{\alpha}$ и $p<r<q=\frac{np}{n-\alpha p}$. Если $\alpha_1<p-1$ при $a\neq 0$ и $\nu_1<n(p-1)$ при $a=0$, а $\nu_2<p-1$, то оператор K^α ограничен из $L_p(\Omega_{a,b},\rho_\nu)$ в $L_r(\Omega_{a,b})$. В частности, при $\nu_1=\nu_2=0$ оператор K^α ограничен из $L_p(\Omega_{a,b})$ в $L_r(\Omega_{a,b})$.

Следствие 2. Пусть $\alpha>0,\ 1<p<\infty$, $\nu_1<p-1$ при $a\neq 0$ и $\nu_1<n(p-1)$ при $a=0$, а $\nu_2<p-1$. Тогда операторы K^α и I^α ограниченно действуют из $L_p(\Omega_{a,b},\rho_\nu)$ в $L_\infty(\Omega_{a,b})$ при $p>\frac{n}{\alpha}$ и $p>1$, соответственно. В частности, при $\nu_1=\nu_2=0$ K^α и I^α ограничены из $L_p(\Omega_{a,b})$ в $L_\infty(\Omega_{a,b})$ соответственно при $p>\frac{n}{\alpha}$ и $p>1$.

Замечание 1. Утверждение следствия 1 при $\nu_1=\nu_2=0$ может быть получено из теоремы Соболева для потенциала Рисса со степенным ядром (3) (см., например, ([1, теорема 25.2, с. 365]), если положить $r=\frac{np}{n-(\alpha-\varepsilon)p}$.

Замечание 2. В случае $\nu_1=\nu_2=0$ утверждение следствия 2 можно уточнить: операторы K^α и I^α соответственно при $p>\frac{n}{\alpha}$ и $p>1$ ограниченно действуют из $L_p(\Omega_{a,b})$ в пространство обобщенных функций $H^{\alpha-\frac{n}{p},1}(\Omega_{a,b})$ при $\alpha-\dfrac{n}{p}\neq 1,2,\ldots$ и в $H^{\alpha-\frac{n}{p},\,1+\frac{1}{p'}}(\Omega_{a,b})$ при $\alpha-\dfrac{n}{p}=1,2,\ldots$ (см. [3]).

Перейдем к нахождению представлений для потенциалов Рисса (2) с радиальной плотностью $\varphi(|t|)$. Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $p>1$, $\varphi(|x|)\in L_p(\Omega_{a,b},\rho_\nu)$, где $\rho_\nu(x)=$ $=(|x|-a)^{\nu_1}(b-|x|)^{\nu_2}$, $\nu_1<p-1$ при $a\neq 0$ и $\nu_1<n(p-1)$ при $a=0$, а $\nu_2<p-1$. Тогда для потенциала Рисса (2) справедливо представление:

$$(I^\alpha\varphi)(r)=\frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int_a^b\rho^{n-1}U(r,\rho)\varphi(\rho)d\rho,\ \ r=|x|, \tag{6}$$

где

$$U(r,\rho)=\frac{1}{2}\int_0^\pi\sin^{n-2}\psi(r^2-2r\rho\cos\psi+\rho^2)^k\ln(r^2-2r\rho\cos\psi+\rho^2)d\psi\,. \tag{7}$$

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы 1 в [5] для потенциала Рисса $(I^n\varphi)(|x|)$ с чисто логарифмическим ядром с учетом существования интеграла (6) на основании теоремы 2.

Для получения одномерных представлений для $(I^\alpha\varphi)(|x|)$ при $\alpha=n+2k\ (k=0,1,\ldots)$ вычислим интеграл (7). Имеют место следующие утверждения, дающие различные результаты при четных и нечетных n. При этом в приводимых далее формулах в лемме 2 и теореме 4 мы полагаем $\sum\limits_{j=m}^{n}c_j\equiv 0$, если $n<m$.

Лемма 1. Если $n=2m+1$ $(m=1,2,\ldots)$, то

$$U(r,\rho)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\binom{k}{i}\frac{(-1)^{j+i}(2r\rho)^i(r^2+\rho^2)^{k-i}}{2j+i+1}\Bigg[-2(\ln|r-\rho|+(-1)^i\ln|r+\rho|)+$$
$$+\left(\frac{r^2+\rho^2}{2r\rho}\right)^{2j+i+1}\ln\left|\frac{r+\rho}{r-\rho}\right|+\sum_{l=1}^{2j+i+1}\frac{(-1)^{i-l}-1}{2j+i-l+2}\left(\frac{r^2+\rho^2}{2r\rho}\right)^{l-1}\Bigg]. \tag{8}$$

Лемма 2. Если $n = 2m\,(m = 1,2,\dots)$, то

$$U(r,\rho) = \pi (r^2+\rho^2)^k \left[\left(1 + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-1)^l}{2^{2l}} \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \binom{k}{2i} \binom{m-1}{l} \binom{2(l+i)}{l+i} \left(\frac{r\rho}{r^2+\rho^2} \right)^{2i} \right) \ln \max(r,\rho) + \right.$$

$$+ \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-1)^l}{2^{2l-1}} \binom{m-1}{l} \left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \binom{k}{2i-1} \left(\frac{r\rho}{r^2+\rho^2} \right)^{2i-1} \sum_{j=0}^{l+i-1} \binom{2(l+i)-1}{j} \frac{\lambda^{2(l+i-j)-1}}{2(l+i-j)-1} - \right.$$

$$\left. \left. - \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \binom{k}{2i} \left(\frac{r\rho}{r^2+\rho^2} \right)^{2i} \sum_{j=0}^{l+i-1} \binom{2(l+i)}{j} \frac{\lambda^{2(l+i-j)}}{2(l+i-j)} \right) \right], \qquad (9)$$

где $\lambda = \frac{r}{\rho}$ при $r < p$ и $\lambda = \frac{\rho}{r}$ при $r > p$.

Доказательство равенства (8) проводится с помощью замены $\cos\psi = t$ и вычисления возникающих при этом интегралов с помощью формулы 1.6.5.2 из [6, с. 244]. Доказательство соотношения (9) основывается на его преобразовании с помощью формул для степеней $\cos^m\psi$ ([6, с. 760]) и вычислении возникающих при этом интегралов по формулам 2.6.36.9 и 2.6.36.15 из [6, с. 545].

Подставляя (8) и (9) в (6), приходим к следующему утверждению

Теорема 4. Пусть $p > 1$, $\varphi(|x|) \in L_p(\Omega_{a,b}, \rho_\nu)$, где $\rho_\nu(x) = (|x| - a)^{\nu_1}(b - |x|)^{\nu_2}$, $\nu_1 < p - 1$ при $a \neq 0$ и $\nu_1 < n(p-1)$ при $a = 0$, а $\nu_2 < p - 1$. Пусть $\alpha = n + 2k\ (k = 0, 1, 2\dots)$. Тогда для потенциала Рисса $(I^\alpha \varphi)(r)$, $r = |x|$ справедливо представление:

$$(I^\alpha \varphi)(r) = \frac{\pi}{\gamma_n(\alpha)} \left[\ln r \int_a^r (r^2+\rho^2)^k \varphi(\rho)\, d\rho + \int_r^b (r^2+\rho^2)^k \ln \rho\, \varphi(\rho)\, d\rho + \right.$$

$$+\sum_{\tau=0}^{m-1}\frac{(-1)^{\tau}}{2^{2\tau}}\binom{m-1}{\tau}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\binom{k}{2i}\binom{2(\tau+i)}{\tau+i}\left(\ln r\int_a^r(r^2+\rho^2)^{k-2i}(r\rho)^{2i}\varphi(\rho)\,d\rho+\right.$$

$$\left.+\int_r^b(r^2+\rho^2)^{k-2i}(r\rho)^{2i}\ln\rho\varphi(\rho)\,d\rho\right)+$$

$$+\sum_{\tau=0}^{m-1}\frac{(-1)^{\tau}}{2^{2\tau-1}}\binom{m-1}{\tau}\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}\binom{k}{2i-1}\sum_{j=0}^{\tau+i-1}\binom{2(\tau+i)-1}{j}\times\right.$$

$$\times\left(r^{2(j-\tau)}\int_a^r(r^2+\rho^2)^{k-2i+1}\rho^{2(\tau+2i-j-1)}\varphi(\rho)\,d\rho+r^{2(\tau+2i-j-1)}\int_r^b(r^2+\rho^2)^{k-2i+1}\rho^{2(j-\tau)}\varphi(\rho)\,d\rho\right)-$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\binom{k}{2i}\sum_{j=0}^{\tau+i-1}\binom{2(\tau+i)}{j}\frac{1}{2(l+i-j)}\left(r^{2(j-\tau)}\int_a^r(r^2+\rho^2)^{k-2i}\rho^{2(\tau+2i-j)}\varphi(\rho)\,d\rho+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+r^{2(\tau+2i-j)}\int_r^b(r^2+\rho^2)^{k-2i}\rho^{2(j-\tau)}\varphi(\rho)d\rho\right)\right)\right]$$

(10)

при $n=2m\ (m=1,2,\ldots)$ и

$$(I^{\alpha}\varphi)(r)=\frac{1}{2}\int_a^b\left[\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\binom{k}{i}\frac{(-1)^{j+i}(2r\rho)^i(r^2+\rho^2)^{k-i}}{2j+i+1}\Big[2(\ln|r-\rho|+(-1)^i\ln|r+\rho|)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{r^2+\rho^2}{2r\rho}\right)^{2j+i+\tau}\ln\left|\frac{r+\rho}{r-\rho}\right|+\sum_{\tau=1}^{2j+i+1}\frac{(-1)^{i-\tau}-1}{2j+i-\tau+2}\left(\frac{r^2+\rho^2}{2r\rho}\right)^{\tau-1}\right]\varphi(\rho)\,d\rho \qquad (11)$$

при $n=2m+1\,(m=1,2,\ldots)$

Замечание 3. При $\alpha=n=2m\,(m=1,2,\ldots)$ представление (10) совпадает с формулой (7) из[5], полученной для потенциала с чисто логарифмическим ядром $I^n\varphi$ для функции $\varphi(|x|)\in C(\Omega_{a,b})$.

Замечание 4. Полученные в (10) и (11) представления для потенциалов Рисса $(I^{\alpha}\varphi)(|x|)$ со степенно-логарифмическим ядром и радиальной плотностью

$\varphi(|x|)$ могут быть использованы для решения соответствующих интегральных уравнений первого рода.

Замечание 5. При $a = 0$ из теорем 1-4 можно получить соответствующие результаты для потенциалов Рисса (1) и (2) по шару Ω_b.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.
2. Kilbas A.A., Vasilets S.I. // Fukuoka Univ. Sci. Rep. 1994. Vol. 24, N 1. P. 1-12.
3. Килбас А.А. // Изв. вузов. Мат. 1983. №6. С. 58-61.
4. Kilbas A.A., Saigo M, Bubakar S. // RIMS Kokyuroku. 1994. N 890. P. 131-147.
5. Килбас А.А., Василец С.И. // Дифференц. уравнения. 1987. Т.23, № 2. С. 321-328.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.

Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка

Белорусский государственный университет

Поступило