

ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ **ЖУРНАЛ**

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК



СЕНТЯБРЬ-ОКТЯБРЬ, ТОМ 67, № 3-4

М И Н С К · 1994

УДК 539.22:536.2

В. Р. Соболев, О. Н. Мазуренко, В. К. Солонович**НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ ТЕРМОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ
В МЕТАЛЛАХ В УСЛОВИЯХ ДЖОУЛЕВА РАЗОГРЕВА**

Аналитически рассмотрена задача о распределении температуры по сечению прямоугольных образцов монокристаллов переходных металлов в условиях джоулева разогрева. Определена роль поперечного магнитного поля в формировании температурного поля при анизотропном теплообмене с окружающей средой.

Известно, что явления переноса как заряда, так и тепла в условиях низких температур в значительной степени определяются электронной подсистемой: законами дисперсии электронов проводимости, их механизмами рассеяния на дефектах кристаллической структуры [1—4]. При этом изучение явлений переноса и кинетических коэффициентов в условиях изотермичности либо адиабатичности требует специальных способов связи образца с термостатом, обеспечивающих анизотропию теплообмена с окружающей средой. При проведении гальваномагнитных исследований в присутствии конечных плотностей тока возбуждения подобные обстоятельства могут обусловить неконтролируемое искажение теплового режима системы и, как следствие, возникновение термоэлектрических полей. В работе [4] авторами определена степень взаимовлияния гальвано- и термомагнитных явлений в нормальных некомпенсированных металлах с замкнутыми и открытыми поверхностями Ферми (ПФ) в условиях, когда тепловой поток вдоль направления магнитного поля отсутствует.

Цель данной работы заключается в рассмотрении подобной стационарной тепловой задачи для металлов с другим законом дисперсии. Имеются в виду компенсированные металлы, которые характеризуются принципиально иным поведением кинетических коэффициентов в сильном магнитном поле, что приводит к высоким уровням диссипации [5, 6]. Наряду с симметричным теплоотводом представляет интерес изучить влияние сильного «холодового» дрейфа носителей в магнитном поле на характер симметрии распределения тепла по сечению.

Тепловые задачи для тонких металлических образцов в традиционном понимании основаны на приближении отсутствия какого-либо распределения температуры по объему из-за большой величины такого кинетического коэффициента, как теплопроводность, и малости поперечного сечения [7]. В данном же случае понятие малости поперечного сечения осложняется тем, что в условиях сильной анизотропии кинетических коэффициентов, анизотропии теплоотода и необходимости уменьшения влияния размерных эффектов низкотемпературные явления переноса могут влиять друг на друга.

В качестве объекта рассмотрения выбран квадратный в поперечном сечении образец, вдоль длинной оси которого протекает электрический ток плотности j_x . Образец расположен в среде жидкого гелия. Одна пара боковых граней, нормальных вектору напряженности магнитного поля

$H = H_z$, открыта, и через нее осуществляется теплообмен с термостатом, а другая пара граней, параллельных H , адиабатически изолирована. Решение задачи будем осуществлять, предполагая в качестве основного механизма диссипации упругое электрон-примесное рассеяние. Это позволит использовать при анализе замкнутую теорию явлений переноса в магнитном поле и адекватно описать релаксационные процессы в условиях гелиевых температур.

Распределение температуры по сечению в статическом случае удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопереноса

$$jE - \operatorname{div} q = 0, \quad (1)$$

дополненному обобщенными уравнениями переноса заряда и тепла

$$E_i = \rho_{ik} j_k + \alpha_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad q_i = \pi_{ik} j_k - \kappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \quad (2)$$

Здесь E_i и q_i — составляющие электрического поля E и потока тепла q в направлении внешней нормали; ρ_{ik} , α_{ik} и κ_{ik} — компоненты тензоров электросопротивления, термоэлектродвижущей силы и теплопроводности; π_{ik} — компонента тензора, описывающего эффект Пельтье; $i, k = x, y, z$, по повторяющимся индексам проводится суммирование; $\partial T / \partial x_k$ — градиент температуры вдоль одного из направлений.

Поскольку вдоль направления электрического тока размеры образца больше поперечных, допустимо применить приближение длинного образца, у которого отсутствует распределение температуры вдоль оси OX . Тогда, исключая из выражения для компоненты потока q_z градиент $\partial T / \partial y$ с учетом принятого τ -приближения, в рамках которого кинетические коэффициенты обладают простой линейной либо квадратичной температурной зависимостью, получаем из (1) и (2) выражение для распределения температуры вдоль оси OZ

$$\frac{\partial^2 T^2}{\partial z^2} + a \frac{\partial T^2}{\partial z} + d T^2 + b = 0, \quad (3)$$

$$a = \left[\alpha_{xz} - \left(\pi_{zx} - \kappa_{zy} \frac{\pi_{yx}}{\kappa_{yy}} \right) - \alpha_{xy} \frac{\kappa_{yz}}{\kappa_{yy}} \right] \left[\left(\kappa_{zz} - \frac{\kappa_{zy} \kappa_{yz}}{\kappa_{yy}} \right) \right]^{-1} j_x, \quad (4)$$

$$d = (\alpha_{xy} \kappa_{yy}^{-1} \pi_{yx})' [(\kappa_{zz} - \kappa_{zy} \kappa_{zy}^{-1})']^{-1} j_x^2, \quad (5)$$

$$b = \rho_{xx} j_x^2 (\kappa_{zz} - \kappa_{zy} \kappa_{zy}^{-1})'^{-1}, \quad (6)$$

причем штрих означает дифференцирование по температуре.

Полученное уравнение является уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, решение которого, используя метод Лагранжа, представим в следующем виде:

$$T = \left[c_1 \exp(\lambda_1 z) + c_2 \exp(\lambda_2 z) - \frac{b}{\lambda_1 \lambda_2} \right]^{0.5}. \quad (7)$$

Здесь λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения (3).

Вид решения существенным образом определяется типом корней λ_1 и λ_2 , которые зависят от соотношения между параметрами a^2 и $4d$ как по абсолютной величине, так и по знаку. Используя условия симметрии кинетических коэффициентов в сильном магнитном поле [8] и выражения для тензоров $\hat{\rho}$, $\hat{\kappa}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\pi}$:

$$\alpha_{ik} = -\rho_{ii} \beta_{ik}; \quad \pi_{ik} = -T \beta_{ii} \rho_{ik}, \quad (8)$$

где β_{ik} — коэффициент пропорциональности в соотношении

$$j_i = \sigma_{ih} E_h + \beta_{ih} \frac{\partial T}{\partial x_h},$$

получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} &\simeq -\omega\tau |\alpha|, \quad \pi_{zx} \simeq \omega\tau |\pi|, \quad \kappa_{yz} \simeq (\omega\tau)^{-1} |\kappa|, \quad \kappa_{zz} \simeq |\kappa|, \\ \pi_{yx} &\simeq \omega\tau |\pi|, \quad \kappa_{zy} \simeq -(\omega\tau)^{-1} |\kappa|, \quad \alpha_{xy} \simeq -\omega\tau |\alpha|, \quad \kappa_{yy} \simeq (\omega\tau)^{-2} |\kappa|, \end{aligned} \quad (9)$$

при этом α , κ , π — кинетические коэффициенты в отсутствие магнитного поля; ω — циклотронная частота; τ — время релаксации.

Как следует из (4), коэффициент a определяется суммой четырех слагаемых. Так как два последних слагаемых в (4) различаются только компонентами тензоров α_{xy} и π_{yx} , а вид этих компонент таков, что в силу условий симметрии они выражаются через одни и те же компоненты β и ρ , можно утверждать, что данные слагаемые асимптотически равны по абсолютной величине, и вследствие этого коэффициент $a = -\omega\tau |\alpha'| \times |\kappa'|^{-1} j_x$. Характерно, что знак данного коэффициента определен с точностью до направления тока и магнитного поля.

Вторым необходимым для решения характеристического уравнения параметром является коэффициент d , величина и знак которого определяются произведением $\alpha_{xy}\pi_{yx}$. Используя соотношения (8) и (9), легко убедиться, что

$$d = -(\omega\tau)^4 |\alpha'| |\pi''| |\kappa'|^{-2} j_x^2; \quad \frac{d}{a^2} \simeq (\omega\tau)^2$$

и при $\omega\tau \gg 1$ $\lambda_{1,2} \simeq \pm d^{0.5} = \pm \lambda$.

В соответствии с граничными условиями, когда температура открытых граней равна T_0 , а градиент вдоль оси OZ в центре образца из-за симметрии задачи отсутствует: $T(z=l) = T(z=-l) = T_0$; $\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$, получаем

$$T = \left\{ \left(T_0^2 - \frac{b}{d} \right) [\exp(\lambda l) + \exp(-\lambda l)]^{-1} [\exp(\lambda z) + \exp(-\lambda z)] + \frac{b}{d} \right\}^{0.5}. \quad (10)$$

Дифференцируя полученное выражение по z , получаем выражение для градиента температуры вдоль оси OZ

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z} &= \left\{ \left(T_0^2 - \frac{b}{d} \right) [\exp(\lambda l) + \exp(-\lambda l)]^{-1} [\exp(\lambda z) + \right. \\ &+ \exp(-\lambda z)] + \frac{b}{d} \Big\}^{-0.5} \left\{ \lambda \left(T_0^2 - \frac{b}{d} \right) [\exp(\lambda l) + \exp(-\lambda l)]^{-1} \times \right. \\ &\times [\exp(\lambda z) - \exp(-\lambda z)] \Big\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Упростим выражение для градиента, разложив экспоненты и удерживая максимальные по величине члены:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = (T_0 d - T_0^{-1} b) z, \quad (12)$$

при этом зависимость температуры от координаты является квадратичной. В соответствии с (5) первый член в выражении (12) отрицателен по знаку и четен по отношению к направлению тока. Для определения количественного вида градиента (12) необходимо оценить величины коэффициентов d и b .

Характерно, что градиент $\partial T/\partial z$ является четной функцией магнитного поля и тока. Это понятно с общезначимой точки зрения, поскольку изменение знака градиента температуры противоречило бы общим принципам термодинамики необратимых процессов.

Адиабатичность вдоль оси OY не исключает и распределения температуры вдоль данного направления. При этом температурный градиент имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \kappa_{yy}^{-1} \left(\pi_{yx} j_x - \kappa_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (13)$$

Зависимость температуры от переменной y в условиях данной постановки задачи линейна. В центре образца градиент определяется эффектом Эттингауза, а на объеме вид его зависит от масштаба параметров, входящих в выражение (13).

Поскольку термоэлектродвижущая сила Нернста

$$(E_N)_x = \alpha_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} \simeq \frac{(\omega\tau)^4}{\kappa'} (\alpha')^2 T j_x,$$

то данная термоэлектрическая составляющая является четной по отношению к направлению вектора магнитного поля и нечетной функцией транспортного тока, что затрудняет ее выделение из омической составляющей в эксперименте при инверсии тока возбуждения.

Для полноты анализа рассмотрим ситуацию, когда адиабатически изолирована пара граней, нормальных вектору напряженности магнитного поля, и тепловой поток вдоль оси OZ отсутствует, а теплообмен осуществляется через грани, параллельные вектору магнитного поля. Исключая из выражения (2) для составляющей потока тепла q_y градиент $\partial T/\partial z$ и преобразуя уравнение (1), легко убедиться, что если направление транспортного тока осталось неизменным, то для записи решения о распределении температуры вдоль оси OY необходимо, оставив неизменным индекс x у компонент тензоров α , ρ , π , в выражениях (3) — (8) индексы y , z заменить друг на друга. Тогда распределение температуры вдоль оси OY будет удовлетворять уравнению, аналогичному (3):

$$\frac{\partial^2 T^2}{\partial y^2} + a \frac{\partial T^2}{\partial y} + d T^2 + b = 0, \quad (14)$$

$$a = \left[\alpha_{xy} - \left(\pi_{yx} - \kappa_{yz} \frac{\pi_{zx}}{\kappa_{zz}} \right)' - \alpha_{xz} \frac{\kappa_{zy}}{\kappa_{zz}} \right] j_x \left[\left(\kappa_{yy} - \frac{\kappa_{zy}\kappa_{yz}}{\kappa_{zz}} \right)' \right]^{-1}, \quad (15)$$

$$d = (\alpha_{xz}\kappa_{zz}^{-1}\pi_{zx})'' [(\kappa_{yy} - \kappa_{zy}\kappa_{yz}\kappa_{zz}^{-1})']^{-1} j_x^2, \quad (16)$$

$$b = \rho_{xx} j_x^2 [(\kappa_{yy} - \kappa_{zy}\kappa_{yz}\kappa_{zz}^{-1})']^{-1}. \quad (17)$$

Распределение температуры вдоль направления оси OY приобретает вид

$$T = \left[c_1 \exp(\lambda_1 y) + c_2 \exp(\lambda_2 y) - \frac{b}{\lambda_1 \lambda_2} \right]^{0.5}, \quad (18)$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (14). Поскольку, как и ранее, компоненты тензоров π_{zx} и α_{xz} асимптотически равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, коэффициент a (15) в данных условиях приобретает следующий вид: $a \simeq -(\omega\tau)^3 |\alpha'| |\kappa'|^{-1} j_x$, т. е. в $(\omega\tau)^2$ раз больше, чем в предыдущем случае, а коэффициент d (16) сохраняет прежний порядок величины: $d \simeq -(\omega\tau)^4 |\alpha'|^2 |\kappa'|^{-2} j_x^2$. Поскольку $d/a^2 \simeq (\omega\tau)^{-2}$, то $\lambda_1 \simeq -a$, $\lambda_2 \simeq -d/a$.

Как следует из вида корней λ_1 и λ_2 , температурная зависимость не является симметричной функцией координаты y . Поскольку a зависит от H и j_x нечетным образом, инверсия направлений тока и магнитного поля должна приводить к обращению температурного распределения, причем одна грань будет разогрета сильнее другой. Возникает вопрос, каким образом определять константы интегрирования в (18). В предыдущем случае теплоотвод из объема образца происходил вдоль оси магнитного поля и при этом оба направления (по и против оси OZ) равноправны, $\kappa_{zz} \simeq \kappa$, а магнитное поле воздействовало на теплоотвод через диагональные компоненты тензоров кинетических коэффициентов. Это обусловило симметрию по величине соответствующего характеристического уравнения. В данном случае ситуация иная. Действительно, единственность решения уравнения второго порядка (14), достигаемая в рамках задачи Коши, требует задания не только температуры, но и величины температурного градиента в некоторой точке. С другой стороны, определение величины температурного градиента по объему образца составляет предмет данной задачи. Поэтому, решая уравнение (14) с начальными условиями Коши, можно оценить только относительные величины градиентов. В рамках этих ограничений примем, что более холодная грань имеет температуру окружающей среды $T(y=l) = T_0$, а величина градиента в этой же точке

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=l} = \frac{T'_0}{2}.$$

Тогда с учетом малости показателя экспоненты от корня λ_2 распределение температуры по сечению образца вдоль оси OY подчиняется следующему закону:

$$T(y) = \left\{ \frac{T'_0 T_0}{\lambda_1} \exp[\lambda_1 (y-l)] + T_0^2 - \frac{T'_0 T_0}{\lambda_1} \right\}^{0.5}.$$

Нетрудно убедиться, что отношение температурных градиентов на противоположных гранях $T'(y=l)/T'(y=-l) \simeq \exp(2\lambda_1 l)$.

Экспоненциальная зависимость $\partial T/\partial y$ от j_x и H приводит к сложной трансформации температурного поля и поля Нернста в условиях инверсии тока и магнитного поля, когда градиент $\partial T/\partial y$ на открытой грани изменяется в $\exp(\lambda_1 l)$ раз, а электрическое поле Нернста еще изменяет и знак при инверсии магнитного поля за счет нечетности по полю компоненты α_{xy} . Остается добавить, что на адиабатически изолированной грани поле Нернста определено величиной градиента $\partial T/\partial z$, составляющая Эттинсгаузена которого мала:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \kappa_{zz}^{-1} \left(\pi_{zx} j_x - \kappa_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

Оценим количественно степень взаимовлияния гальвано- и термомагнитных явлений для конкретного случая, когда по образцу с поперечным сечением $\sim 10^{-6}$ м² протекает электрический ток заданной величины $I \simeq 10$ А. Для уровня остаточного сопротивления $\rho_0 \simeq 5 \cdot 10^{-13}$ Ом·м в поле $H \simeq 3 \cdot 10^7$ А/м параметры $\omega t \simeq 1,5 \cdot 10^3$; $\kappa' \simeq \kappa_{zz} \simeq 5 \cdot 10^4$ Вт/(м·К²); параметр, характеризующий мощность теплового источника $b \simeq 10^3$ К²/м².

Тогда для $q_y \simeq 0$ коэффициенты характеристического уравнения (3) следующие: $a \simeq 10^{-3}$ м⁻¹; $d \simeq -1$ м⁻²; $\lambda_1 \simeq -\lambda_2 \simeq d^{1/2}$. Градиент $\partial T/\partial z$ из (12) определяется преимущественно разогревным механизмом, и на поверхности образца $\partial T/\partial z \simeq 10^{-1}$ К/м. Обусловленное этим градиентом термоэлектрическое поле Нернста $\alpha_{xz}(\partial T/\partial z) \simeq 10^{-6}$ В/м невелико относительно связанного с диагональными компонентами тензора сопротивления электрического поля: $\sim 1-10$ В/м. В то же время градиент температуры $\partial T/\partial y$ в основном определяется эффектом Пельтье и термоэлект-

рическое поле Нернста имеет величину $\alpha_{xy}(\partial T/\partial y) \simeq 10^{-1} \div 1$ В/м, что составляет десятки процентов от упомянутого выше электрического поля.

В случае, когда $q_z \simeq 0$, теплоотвод осуществляется в направлении, нормальном H , и величина коэффициентов характеристического уравнения (14) увеличивается: $a \simeq 10^3$ м⁻¹; $d \simeq 1$ м⁻², приводя к искажению симметрии в распределении температуры относительно центра образца. В этих условиях величина $T_0 \leq 4 \cdot 10^3$ К/м и величина термоэлектрического поля $\alpha_{xy}(\partial T/\partial y) \simeq 10^{-2}$ В/м, что достигает единиц процентов от поля ρ_{xx}/x , а величина градиента $\partial T/\partial z \simeq 10^{-2} \div 10^{-3}$ К/м и соответствующее ему поле $\alpha_{xz}(\partial T/\partial z) \simeq 10^{-6}$ В/м пренебрежимо мало.

Итак, можно сделать следующие выводы. Анизотропия теплообмена с окружающей средой, имеющая место при проведении низкотемпературных гальваномагнитных исследований, может приводить к перераспределению температурных полей по сечению металлических образцов, так что величина температурных градиентов при этом может быть весьма ощутима. Данное обстоятельство требует учета рассмотренных эффектов для корректной оценки величины различных термоэлектрических полей и определения возможности их устранения из искомых характеристик.

В заключение следует отметить, что в проведенном рассмотрении единственным определяемым эмпирически параметром задачи является остаточное сопротивление материала, а все остальные кинетические коэффициенты аналитически определены из ряда постулатов: приближения почти свободных электронов, упругого рассеяния электронов, эффективного магнитного поля и др. По этой причине применимость данного подхода, равно как и переход к более простым выражениям, определяется степенью и глубиной соответствия принятой модели реальной физической ситуации, которая включает и несколько большую, чем в нормальных металлах, массу электронов проводимости из-за узости энергетических зон, и более сложный вид интеграла столкновений из-за присутствия магнитоперевосной диффузии, и возможную раскомпенсацию электронных и дырочных объемов. Кроме того, при таких поперечных размерах определенное влияние на кинетику носителей заряда и, как следствие, на асимптотическое поведение тензоров кинетических коэффициентов оказывают поверхностные эффекты. Вместе с тем полученные распределения температуры по сечению образца в условиях тензорности кинетических коэффициентов дают представление о взаимовлиянии гальвано- и термомагнитных характеристик при конечности уровней возбуждения.

Обозначения

H — вектор напряженности магнитного поля; j — вектор плотности тока; q — вектор потока тепла; E — вектор электрического поля; ρ — тензор электрического сопротивления; α — тензор термоэдс; χ — тензор теплопроводности; π — тензор, описывающий эффект Пельтье; T — температура образца; E_H — вектор термоэлектрического поля Нернста; τ — время релаксации носителей; ω — циклотронная частота.

Литература

1. Самойлович А. Г., Коренблин Л. Л. // ФТТ. 1961. Т. 3, № 7. С. 2054—2059.
2. Азбель М. Я., Каганов М. И., Лифшиц И. М. // ЖЭТФ. 1957. Т. 32, вып. 5. С. 1188—1192.
3. Бычков Ю. А., Гуревич Л. Э., Недлин Г. М. // ЖЭТФ. 1959. Т. 37, вып. 2(8). С. 534—539.
4. Соболев В. Р., Криворучко Т. А. // ИФЖ. 1990. Т. 58, № 4. С. 670—675.
5. Старцев В. Е., Дякина В. П., Черепанов В. И. и др. // ЖЭТФ. 1980. Т. 79, вып. 4(10). С. 1335—1344.
6. Черепанов А. Н., Марченков В. В., Старцев В. Е. и др. // ФНТ. 1986. Т. 12, № 11. С. 1181—1186.
7. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., 1964.
8. Абрикосов А. А. Основы теории металлов. М., 1987.

Институт физики твердого тела
и полупроводников АН Беларуси,
г. Минск

17.11.93.