УДК 517.95

У. А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук,
дэкан матэматычнага факультэта БДПУ;
А.С. Сушчынская,
студэнт V курса матэматычнага факультэта БДПУ;
Г.Л. Паляк,
студэнт V курса матэматычнага факультэта БДПУ

АБ ПЕРАЎТВАРЭННІ ДА КАНАНІЧНАГА ВЫГЛЯДУ СІСТЭМЫ РАЎНАННЯЎ У ЧАСТКОВЫХ ВЫТВОРНЫХ ПРЫ ДАПАМОЗЕ БІКАМПЛЕКСНЫХ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ АПЕРАТАРАЎ

Уводзіны. У шэрагу прац [1–4] выкарыстоўваліся спецыяльныя дыферэнцыяльныя аператары (фармальныя вытворныя) [5] для прывядзення да кананічнага выгляду сістэм раўнанняў у частковых вытворных.

У дадзеным артыкуле разглядаецца сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў, адрозная ад вывучаемых раней:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= B_1\frac{\partial v}{\partial x} + B_2\frac{\partial v}{\partial y} + M_1 u + N_1 v + F_1 u^2 + E_1 v^2 + C_1 uv,\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= B_3\frac{\partial v}{\partial x} + B_4\frac{\partial v}{\partial y} + M_2 u + N_2 v + F_2 u^2 + E_2 v^2 + C_2 uv,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

дзе $B_k, M_i, N_i, F_i, E_i, C_i\,(u,v)-$ вядомыя (шуканыя) функцыі класа $A^*(G); k=1,...4; i=1,2$.

Праз $A^*(G)$ заўсёды абазначаем клас усіх аналітычных функцый (наогул камплексных) ад рэчаісных зменных x, y у некаторым адназвязным абсягу G, які змяшчае пачатак каардынат.

Ніжэй паказана, што дадзеную сістэму дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (1) таксама можна кананізаваць, скарыстаўшы фармальныя вытворныя.

Асноўная частка. Рашаем наступную задачу: маючы сістэму выгляду (1), знайсці неабходныя і дастатковыя ўмовы, пры якіх існуюць такія функцыі $p(x,y), q(x,y) \in A^*(G)$, што сістэма (1) зводзіцца да выгляду:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= a_1 f + a_2 f^2 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + c_1 f\varphi,\\ \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} &= a_3 f + a_4 f^2 + b_3\varphi + b_4\varphi^2 + c_2 f\varphi,\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

дзе f, φ – лінейныя функцыі ад u, v з каэфіцыентамі класа $A^*(G)$; $a_k, b_k, c_j\ (k=1,...,4;\ j=1,2)-$ вядомыя функцыі таго ж класа, а $\dfrac{\partial f}{\partial p}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial q}$ –

дыферэнцыяльныя аператары (фармальныя вытворныя), якія вызначаюцца роўнасцямі

$$\frac{\partial f}{\partial p} \equiv \frac{1}{\delta}\left(f'_x q'_y - f'_y q'_x\right), \frac{\partial f}{\partial q} \equiv \frac{1}{\delta}\left(f'_y p'_x - f'_x p'_y\right), \tag{3}$$

дзе

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} p'_x & p'_y \\ q'_x & q'_y \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Сістэму (2), на падставе (3), можна запісаць, адпаведна, у выглядзе:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + T_1 f + \Theta_1 \varphi + \Phi_1 f^2 + Q_1 \varphi^2 + K_1 f\varphi, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= A_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_4 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + T_2 f + \Theta_2 \varphi + \Phi_2 f^2 + Q_2 \varphi^2 + K_2 f\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

дзе

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= a_1 p'_x + a_3 q'_x, T_2 = a_1 p'_y + a_3 q'_y, \\ \Theta_1 &= b_1 p'_x + b_3 q'_x, \Theta_2 = b_1 p'_y + b_3 q'_y, \\ \Phi_1 &= a_2 p'_x + a_4 q'_x, \Phi_2 = a_2 p'_y + a_4 q'_y, \\ Q_1 &= b_2 p'_x + b_4 q'_x, Q_2 = b_2 p'_y + b_4 q'_y, \\ K_1 &= c_1 p'_x + c_2 q'_x, K_2 = c_1 p'_y + c_2 q'_y, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} -A_1 &= \frac{p'_x p'_y + q'_x q'_y}{\delta}, \quad -A_1 = A_4, \\ A_2 &= \frac{(p'_x)^2 + (q'_x)^2}{\delta}, \quad -A_3 = \frac{(p'_y)^2 + (q'_y)^2}{\delta}. \end{aligned}\right\} \tag{5´}$$

Выразім p'_x, p'_y, q'_x, q'_y з (5´):

$$\left.\begin{aligned} p'_x &= A_1 q'_x + A_2 q'_y, \\ p'_y &= A_3 q'_x + A_4 q'_y, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} q'_x &= -\left(A_1 p'_x + A_2 p'_y\right), \\ q'_y &= -\left(A_3 p'_x + A_4 p'_y\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Апошнія роўнасці можна запісаць у выглядзе сістэмы

$$\left.\begin{aligned} &-p'_x + 0 \cdot p'_y + A_1 q'_x + A_2 q'_y = 0, \\ &A_1 p'_x + A_2 p'_y + q'_x + 0 \cdot q'_y = 0, \\ &0 \cdot p'_x - p'_y + A_3 q'_x + A_4 q'_y = 0, \\ &A_3 p'_x + A_4 p'_y + 0 \cdot q'_x + q'_y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Для рашэння сістэмы (8) адносна $p'_x, p'_y, q'_x, q'_y(\delta \neq 0)$ неабходна мець

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & A_1 & A_2 \\ 0 & -1 & A_3 & A_4 \\ A_1 & A_2 & 1 & 0 \\ A_3 & A_4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Пасля вылічэння дэтэрмінанта з улікам, што $A_1 = -A_4$, атрымаем

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 1.$$

Такім чынам, атрымалі наступную тэарэму.

Тэарэма 1. Неабходная ўмова звядзення сістэмы (4) да сістэмы (2) з тымі ж невядомымі функцыямі заключаецца ў тым, што

$$A_1 = -A_4, \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 1. \tag{10}$$

Няхай цяпер дадзена сістэма (4), у якой $A_k, T_j, \Theta_j, \Phi_j, Q_j, K_j (k = 1, \ldots, 4;\ j = 1,2)$ такія функцыі класа $A^*(G)$, што выконваецца ў G умова (10). Даследуем магчымасць звядзення такой сістэмы (4) да выгляду (2).

Для рашэння гэтай задачы здзейснім наступнае.

Складзём сістэму (6) з невядомымі функцыямі p, q і знаходзім функцыю $q(x, y) \in A^*(G)$ як якое-небудзь частковае рашэнне раўнання

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_3 q'_x + A_4 q'_y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(A_1 q'_x + A_2 q'_y\right), \tag{11}$$

якое ўзнікла як умова інтэгравальнасці сістэмы (6).

Разгледзім падрабязней раўнанне (11).

Каэфіцыенты раўнання задавальняюць умове (10).

Разгледзім выпадкі, якія могуць сустрэцца пры рашэнні раўнання (11).

1°. $A_3 \neq 0$. Тады раўнанне (11) прыме выгляд

$$q''_{xx} = f\left(x, y, q'_x, q'_y, q''_{xy}, q''_{yy}\right) \tag{12}$$

у некаторым абсягу $G_0 \subset G$ (для пэўнасці лічым, што пункт $(0,0) \in G_0$; $f\left(x, y, q'_x, q'_y, q''_{xy}, q''_{yy}\right) \in A^*(G_0)$).

Раўнанне (12) – гэта раўнанне Кашы-Кавалеўскай. Зададзім пачатковыя ўмовы

$$q\big|_{x=0} = \psi_1(y), q'_x\big|_{x=0} = \psi_2(y),$$

дзе $\psi_1(y), \psi_2(y)$ − аналітычныя функцыі ад y.

Разгледзім $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x$. Калі падставіць замест p'_x і p'_y правыя часткі раўнанняў сістэмы (6) і ўлічыць умовы (10), атрымаем

$$\delta = 2A_1 q'_x q'_y + A_2 \left(q'_y\right)^2 - A_3 \left(q'_x\right)^2,$$

$$\delta^0 = 2{A_1}^0 \left(q'_x\right)^0 \left(q'_y\right)^0 + {A_2}^0 \left(\left(q'_y\right)^0\right)^2 + {A_3}^0 \left(\left(q'_x\right)^0\right)^2$$

(верхні індэкс 0 абазначае значэнне функцыі пры $x = y = 0$). Таму можна лічыць (пры належным падборы $\left(q'_x\right)^0, \left(q'_y\right)^0, q^0$) $\delta^0 \neq 0$, а таму знойдзецца такое наваколле пачатку каардынат, у якім $\delta \neq 0$. Толькі гэтае наваколле і будзем далей разглядаць як абсяг змянення зменных x, y.

2° $A_2 \neq 0$. Тады раўнанне (11) зводзіцца да выгляду

$$q''_{yy} = f\left(x, y, q'_x, q'_y, q''_{xy}, q''_{xx}\right)$$

у некаторым в некоторой абсягу $G_0 \subset G$.

3° $A_2 \equiv A_3 \equiv 0$, тады на падставе (10) $A_1 A_4 = 1$, але $A_1 = -A_4$, а таму з раўнання (11) вынікае:

$$q''_{xy} = 0.$$

У другім і трэцім выпадках мы аналагічна знойдзем такую функцыю $q(x, y)$ і такі абсяг, у якім $\delta \neq 0$.

Знайшоўшы q, знойдзем p з (6). Такім чынам, знойдзем функцыі p і q, для якіх $\delta \neq 0$.

Цяпер знаходзім a_k, b_k, c_j $\left(k = 1,...,4;\, j = 1,2\right)$ з (5). Сістэмы (5) вызначаныя, паколькі $\delta \neq 0$. Пакажам зараз, што A_1, A_2, A_3 выражаюцца праз p і q па формулах (5´). Для гэтага рэшым сістэму (6) адносна q'_x і q'_y. Скарыстаем умовы (10) і атрымаем (7). З (7) і (6) будзем мець

$$\left(p'_x\right)^2 + \left(q'_x\right)^2 = A_2 \delta,$$

$$\left(p'_y\right)^2 + \left(q'_y\right)^2 = -A_3 \delta,$$

$$p'_x p'_y + q'_x q'_y = -A_1 \delta,$$

г.зн. для A_1, A_2, A_3 атрымаем выразы (5´).

Тэарэма 2. Сістэма (4) зводзіцца да сістэмы (2) кожны раз, калі выконваецца ўмова (10).

Вывучым умовы пераўтварэння сістэмы (1) у сістэму (4).

Мяркуем у дадзенай сістэме (1)

$$u = \alpha f + \beta \varphi,\ v = \alpha_1 f + \beta_1 \varphi \tag{13}$$

$$\left(\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1 \in A^*(G); \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{vmatrix} \neq 0\right).$$

Тады сістэма (1) прыме наступны выгляд:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=B_1\left(\alpha_1\frac{\partial f}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+B_2\left(\alpha_1\frac{\partial f}{\partial x}+\beta_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\ldots,\\
\alpha\frac{\partial f}{\partial y}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}&=B_3\left(\alpha_1\frac{\partial f}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+B_4\left(\alpha_1\frac{\partial f}{\partial y}+\beta_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\ldots,
\end{aligned}\right\}$$

адкуль

$$\left.\begin{aligned}
a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}&=a'\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b'\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\ldots,\\
c\frac{\partial f}{\partial x}+\partial\frac{\partial f}{\partial y}&=c'\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\partial'\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\ldots,
\end{aligned}\right\}$$

дзе

$$a=\alpha-\alpha_1B_1, b=-\alpha_1B_2, c=-\alpha_1B_3, \partial=\alpha-\alpha_1B_4,$$
$$a'=\beta_1B_1-\beta, b'=\beta_1B_2, c'=\beta_1B_3, \partial'=\beta_1B_4-\beta.$$

З апошняй сістэмы знаходзім $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Калі ў правай частцы адкінуць складнікі, якія не змяшчаюць $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, атрымаем

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a'\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b'\frac{\partial\varphi}{\partial y} & b\\ c'\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\partial'\frac{\partial\varphi}{\partial y} & \partial\end{vmatrix}+\ldots=\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\Delta_2}{\Delta}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\ldots,\\
\frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & a'\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b'\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ c & c'\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\partial'\frac{\partial\varphi}{\partial y}\end{vmatrix}+\ldots=\frac{\Delta_3}{\Delta}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\Delta_4}{\Delta}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\ldots,
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

дзе

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a' & b\\ c' & \partial\end{vmatrix}, \Delta_2=\begin{vmatrix} b' & b\\ \partial' & \partial\end{vmatrix}, \Delta=\begin{vmatrix} a & b\\ c & \partial\end{vmatrix},$$
$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a & a'\\ c & c'\end{vmatrix}, \Delta_4=\begin{vmatrix} a & b'\\ c & \partial'\end{vmatrix}.$$

Маем

$$\Delta=\alpha^2-\alpha\alpha_1(B_1+B_4)+\alpha_1^2D. \tag{14´}$$

дзе

$$D=\begin{vmatrix} B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{vmatrix}.$$

$$\Delta_1=a'\partial-c'b=(\beta_1B_1-\beta)(\alpha-\alpha_1B_4)+\alpha_1\beta_1B_2B_3$$

ці

$$\Delta_1 = -\alpha\beta + \alpha\beta_1 B_1 + \beta\alpha_1 B_4 - \alpha_1\beta_1 D\,,$$

аналагічна

$$\Delta_2 = \alpha\beta_1 B_2 - \alpha_1\beta B_2 = B_2(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta),$$
$$\Delta_3 = (\alpha - \alpha_1 B_1)\beta_1 B_3 + (\beta_1 B_1 - \beta)\alpha_1 B_3 = B_3(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta),$$
$$\Delta_4 = (\alpha - \alpha_1 B_1)(\beta_1 B_4 - \beta) + \alpha_1\beta_1 B_2 B_3\,.$$

Мяркуем $\alpha_1 = 0, \alpha = 1$, тады $\Delta = 1$, $\Delta_2 = B_2\beta_1$, $\Delta_3 = B_3\beta_1$, $\Delta_4 = -\beta + \beta_1 B_4$, $\Delta_1 = \beta_1 B_1 - \beta$.

Пабудуем дэтэрмінант $\overline{D}$ для сістэмы (14) (аналагічны дэтэрмінанту $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$ для сістэмы (4)):

$$\overline{D} = \frac{1}{\Delta^2}(\Delta_1\Delta_4 - \Delta_2\Delta_3) = \left(\beta^2 - \beta\beta_1(B_1 + B_4) + \beta_1^2 D\right).$$

Падпарадкоўваем каэфіцыенты сістэмы (14) умове

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_4}{\Delta} = 0,$$

тады

$$\beta = \beta_1\sigma\,, \text{ дзе } \sigma = \frac{B_1 + B_4}{2}; \qquad \overline{D} = \beta_1^2\left(D - \sigma^2\right).$$

Пры ўмове $D - \sigma^2 \neq 0$, β_1 можна лічыць роўным $\dfrac{1}{\sqrt{D - \sigma^2}}$, а адсюль $\overline{D} = 1$.

З усяго адзначанага вынікае наступная тэарэма.

Тэарэма 3. Сістэма (1) зводзіцца да сістэмы (4) пры ўмове (10) падстаноўкай

$$u = f + \beta\varphi,\ v = \beta_1\varphi$$

кожны раз, калі $D \neq \sigma^2$, дзе

$$\beta = \beta_1\sigma, \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{D - \sigma^2}}, \sigma = \frac{B_1 + B_4}{2}, D = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{vmatrix}.$$

Тэарэма 4. У выпадку

$$D = \sigma^2 \qquad (15)$$

сістэму (1) нельга звесці да сістэмы выгляду (4), дзе

$$A_1 + A_4 = 0, \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 1.$$

Доказ. Мяркуем, што сістэму (1) можна звесці падстаноўкай выгляду (13) да выгляду (4) у выпадку (15).

Тады, калі паўтарыць пераўтварэнні, скарыстаныя пры доказе тэарэмы 3, неабходна мець наступнае.

1° $\Delta \neq 0$. Пры ўмове $D = \sigma^2$ з (14´) адрымае

$$\Delta = (\alpha_1\sigma - \alpha)^2 .$$

Прыйшлі да неабходнага патрабавання

$$\alpha \neq \alpha_1\sigma . \tag{16}$$

2° Калі сістэма (1) зводзіцца да сістэмы (4) пры ўмове (10), то неабходна $\overline{D} \neq 0$.

З роўнасцей для $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, роўнасці (15) і формулы (16) атрымліваем, што

$$\overline{D} = \frac{(\beta - \beta_1\sigma)^2}{(\alpha - \alpha_1\sigma)^2},$$

адкуль павінна выконвацца

$$\beta \neq \beta_1\sigma . \tag{17}$$

3° Акрамя таго неабходна мець

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{\Delta_4}{\Delta} = 0 .$$

Адкуль на падставе роўнасцей для Δ_1, Δ_4, роўнасці (15) і формулы (17) вынікае:

$$\alpha = \frac{\alpha_1\left(\beta\sigma - \beta_1\sigma^2\right)}{\beta - \beta_1\sigma} = \alpha_1\sigma . \tag{18}$$

Прыйшлі да супярэчнасці. Тэарэма даказаная.

Скарыстаем далей бікамплексныя функцыі, манагенныя ў сэнсе У.С. Фёдарава, для пабудовы рашэнняў сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= a_1 f + a_2 f^2 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + c_1 f\varphi, \\ \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} &= a_3 f + a_4 f^2 + b_3\varphi + b_4\varphi^2 + c_2 f\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

дзе a_k, b_k, c_i $(k = 1,\ldots,4;\ i = 1,2)(f, \varphi)$ − вядомыя (шуканыя) камплексныя функцыі ад x, y. Усе функцыі, разглядаемыя далей, лічым непарыўна дыферэнцавальнымі функцыямі рэчаісных зменных x, y у некаторым адназвязным абсягу D. Далей праз $p(x,y), q(x,y)$ будзем абазначаць дзве такія камплексныя функцыі, для якіх $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x \neq 0$ у разглядаемым абсягу. Аператары $\dfrac{\partial}{\partial q}$ і $\dfrac{\partial}{\partial p}$ вызначаюцца наступным чынам:

$$\frac{\partial f}{\partial p} \equiv \frac{1}{\delta}\left(f'_x q'_y - f'_y q'_x\right), \frac{\partial f}{\partial q} \equiv \frac{1}{\delta}\left(f'_y p'_x - f'_x p'_y\right).$$

Для любой бікамплекснай непарыўна дыферэнцавальнай функцыі $F(x,y)$ уводзім наступныя дыферэнцыяльныя аператары:

$$\frac{\partial F}{\partial P}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial p}-j\frac{\partial F}{\partial q}\right),\ \frac{\partial F}{\partial Q}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial p}+j\frac{\partial F}{\partial q}\right) \tag{20}$$

$$\left(P=p+jq, Q=p-jq, j^2=-1, j\neq i\right).$$

Лёгка даказаць, што для гэтых аператараў маюць месца звычайныя правілы дыферэнцавання сумы, рознасці, здабытку і дзелі. Акрамя гэтага, маем:

$$\frac{\partial\left(f+j\varphi\right)}{\partial Q}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)+j\left(\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)\right]. \tag{21}$$

Тэарэма 5. У выпадку

$$a_1=b_3, b_1=-a_3, a_2=-b_2, a_4=-b_4, \tag{22}$$

$$b_2=-\frac{c_2}{2}, b_4=\frac{c_1}{2} \tag{23}$$

сістэма (2) зводзіцца да выгляду

$$\frac{\partial F}{\partial Q}=AF+BF^2, \tag{24}$$

дзе

$$F=f+j\varphi,\ A=\frac{1}{4}\left(\left(a_1+b_3\right)+j\left(a_3-b_1\right)\right), B=\frac{1}{4}\left(\left(a_2-b_2\right)+j\left(a_4-b_4\right)\right),$$

$$j^2=-1, j\neq i.$$

Доказ. З азначэння дыферэнцыяльных аператараў (20), з (2) і (23) вынікае, что

$$4\frac{\partial F}{\partial Q}=\left(\left(a_1+b_3\right)+j\left(a_3-b_1\right)\right)F+\left(\left(a_1-b_3\right)+j\left(b_1+a_3\right)\right)\left(f-j\varphi\right)+$$

$$+\left(\left(a_2-b_2\right)+j\left(a_4-b_4\right)\right)F^2+\left(\left(a_2+b_2\right)+j\left(a_4+b_4\right)\right)\left(f^2-\varphi^2-2jf\varphi\right),$$

адкуль у выпадку (22) прыходзім да раўнання (24)

Тэарэма 1 даказаная.

Знойдзем агульнае рашэнне раўнання (24)

$$\frac{\partial F}{\partial Q}=AF+BF^2,$$

дзе $F-$ невядомая бікамплексная функцыя, $A,B-$ вядомыя бікамплексныя функцыі, прычым лічым, што A і B − функцыі, манагенныя ў сэнсе У.С. Фёдарава па функцыі $Q=p-jq$ у абсягу D.

Мяркуем

$$u=\int_{M_0}^{M}AdQ, F\exp\left(-u\right)=v.$$

Пры гэтым маем: $u-$ функцыя, манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава па функцыі Q;

$$\frac{du}{dQ}=\frac{\partial u}{\partial Q}=A, \tag{25}$$

дзе $\dfrac{du}{dQ}$ – вытворная ў сэнсе У.С. Фёдарава;

$$F=\exp(u)v.$$

Раўнанне (24) прыме выгляд

$$\frac{\partial F}{\partial Q}=\exp(u)\frac{\partial u}{\partial Q}v+\exp(u)\frac{\partial v}{\partial Q}=A\exp(u)v+B\exp(2u)v^2,$$

адкуль і з (25) атрымаем

$$\frac{\partial v}{\partial Q}=B\exp(u)v^2. \tag{26}$$

Мяркуем

$$\omega=-\frac{1}{v},$$

маем

$$\frac{\partial\omega}{\partial Q}=\frac{\frac{\partial v}{\partial Q}}{v^2},\ \frac{\partial v}{\partial Q}=v^2\frac{\partial\omega}{\partial Q}.$$

З (26) атрымаем

$$\frac{\partial\omega}{\partial Q}=B\exp(u). \tag{27}$$

Згодна з азначэннем

$$f=\exp(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!},$$

адкуль

$$\Delta f=\exp u(\exp\Delta u-1)=\exp u\left(\Delta u+(\Delta u)^2+\ldots\right)$$
$$(\Delta u=u(M')-u(M)).$$

З апошняй роўнасці маем: калі u – манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава функцыя па Q, тады $\exp u$ – таксама манагенная функцыя па Q у абсягу D, прычым

$$\frac{\partial(\exp u)}{\partial Q}=\exp u\frac{\partial u}{\partial Q}.$$

Такім чынам, $B\exp u$ ёсць функцыя, манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава па функцыі Q у абсягу D.

З (27) атрымаем

$$\frac{\partial}{\partial Q}\left(\omega-\int_{M_0}^{M}B\exp(u)dQ\right)=0,$$

г.зн.

$$\omega - \int_{M_0}^{M} B\exp(u)dQ = \Phi[\mathrm{P}],$$

дзе $\Phi[\mathrm{P}]$ – манагенная па P у абсягу D функцыя.

Такім чынам,

$$F = \exp(u)\cdot v,$$

дзе

$$u = \int_{M_0}^{M} AdQ,\ v = -\frac{1}{\omega},$$

$$\omega = \int_{M_0}^{M} B\exp(u)dQ + \Phi(\mathrm{P})$$

$\Phi[\mathrm{P}]$ – манагенная ў абсягу D па функцыі P функцыя.

Заўвага. Няхай у раўнанні (24) A і B – некаторыя канстанты. Тады мяркуем

$$u = AQ, F\cdot\exp(-u) = v.$$

Раўнанне (24) прыме выгляд

$$\frac{\partial v}{\partial Q} = B\exp(AQ)v^2. \tag{28}$$

Мяркуем $\omega = -\dfrac{1}{v}$, тады

$$\frac{\partial \omega}{\partial Q} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial Q}}{v^2}, \frac{\partial v}{\partial Q} = v^2\frac{\partial \omega}{\partial Q}.$$

З (28) маем

$$\frac{\partial \omega}{\partial Q} = B\exp(AQ),$$

адкуль

$$\omega = \frac{B}{A}\exp(AQ) + \Phi[\mathrm{P}].$$

Заключэнне. Такім чынам, дадзеным артыкуле знойдзены неабходныя і дастатковыя ўмовы, пры якіх сістэма дыферэнцыялных раўнанняў у частковых вытворных

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= B_1\frac{\partial v}{\partial x} + B_2\frac{\partial v}{\partial y} + M_1u + N_1v + F_1u^2 + E_1v^2 + C_1uv,\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= B_3\frac{\partial v}{\partial x} + B_4\frac{\partial v}{\partial y} + M_2u + N_2v + F_2u^2 + E_2v^2 + C_2uv,\end{aligned}\right\}$$

дзе $B_k, M_i, N_i, F_i, E_i, C_i$ (u,v) – вядомыя (шуканыя) камплексныя функцыі ад x, y класа $C^1(D)\left(C^2(D)\right)$ $(k = 1,\ldots 4; i = 1,2)$, рэдуцыруецца да кананічнага выгляду.

Пры дапамозе бікамплексных функцый, манагенных у сэнсе У.С. Фёдарава, у пэўным выпадку пабудавана агульнае рашэнне кананічнай сістэмы (сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных).

ЛІТАРАТУРА

1. Стельмашук, Н.Т. О применении одного обобщения ареолярных производных к преобразованиям некоторых систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных / Н.Т. Стельмашук // Bul. Inst. Politeh. Bucuresti.– 1962.– V.24.– №2.– P.19–35.
2. Стельмашук, Н.Т. О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных / Н.Т. Стельмашук // Сибирский математический журнал. – 1964.– Т. 5.– №1.– С. 166–173.
3. Векуа, И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа.– М.: Физматгиз, 1959.– 628 с.
4. Стельмашук, Н.Т. О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов / Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук.– 2008.– №2.– С.61–65.
5. Гусев, В.А. Об одном обобщении ареолярных производных / В.А. Гусев // Bul. Stiintific si tehnic al inst. lui Politehnic Timisoara.– 1962.– V. 7.– Fasc. 2.– P.223–238.

УДК 517.95

Шылінец У.А., Сушчынская А.С., Паляк Г.Л. **Аб пераўтварэнні да кананічнага выгляду сістэмы раўнанняў у частковых вытворных пры дапамозе бікамплексных дыферэнцыяльных аператараў**
// Весці БДПУ. Серия 3. 2014. №4. С.28–33.

У артыкуле знойдзены неабходныя і дастатковыя ўмовы, пры якіх сістэма дыферэнцыялных раўнанняў у частковых вытворных

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= B_1\frac{\partial v}{\partial x} + B_2\frac{\partial v}{\partial y} + M_1 u + N_1 v + F_1 u^2 + E_1 v^2 + C_1 uv,\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= B_3\frac{\partial v}{\partial x} + B_4\frac{\partial v}{\partial y} + M_2 u + N_2 v + F_2 u^2 + E_2 v^2 + C_2 uv,\end{aligned}\right\}$$

дзе $B_k, M_i, N_i, F_i, E_i, C_i$ $(u, v)-$ вядомыя (шуканыя) камплексныя функцыі ад x, y класа $C^1(D)\big(C^2(D)\big)$ $(k = 1,...4; i = 1,2)$, рэдуцыруецца да кананічнага выгляду. Пры дапамозе бікамплексных функцый, манагенных у сэнсе У.С. Фёдарава, у пэўным выпадку пабудавана агульнае рашэнне кананічнай сістэмы (сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у фармальных вытворных).

Бібліягр.– 5 назваў.